

2ª Lista de Exercícios F 604

07/04/2013

1) No lançamento de uma moeda, temos que a probabilidade para se obter cara é p e q a probabilidade para se obter coroa. Considere o experimento em que a moeda é lançada até que uma cara seja obtida. Seja X o número de lançamentos e, portanto, X é uma variável aleatória. Determine a entropia de informação $H(X)$ em bits para esse experimento.

2) Considere as variáveis aleatórias X e Y , distribuídas de acordo com a probabilidade conjunta $P(x_i \cdot y_j)$. A informação mútua entre as duas variáveis é definida por:

$$M(X, Y) \equiv \sum_{i,j} P(x_i \cdot y_j) \ln \left(\frac{P(x_i \cdot y_j)}{P_X(x_i)P_Y(y_j)} \right)$$

onde $P_X(x_i)$ e $P_Y(y_j)$ são as probabilidades marginais para X e Y .

a) Relacione $M(X, Y)$ com as entropias $H(X, Y)$, $H(X)$ e $H(Y)$.

b) Calcule a informação mútua da distribuição conjunta Gaussiana com a forma:

$$P(x \cdot y) \propto \exp \left(-\frac{ax^2}{2} - \frac{by^2}{2} - cxy \right)$$

3) Considere um gás ideal em uma dimensão. Em princípio a velocidade de uma partícula do gás se encontra no intervalo: $-\infty < v < \infty$.

a) Determine a densidade de probabilidade $p_1(v)$, sujeita ao vínculo que o valor médio do módulo da velocidade é igual c , ou seja, $\langle |v| \rangle = c$, através da maximização da entropia de informação.

b) Determine a densidade de probabilidade $p_2(v)$, dado o único vínculo sobre a energia cinética média, $\langle mv^2/2 \rangle = mc^2/2$, através da maximização da entropia de informação.

c) Qual dos casos acima fornece mais informação sobre a velocidade da partícula?

Quantifique a diferença de informação em bits através de:

$$H(p_2) - H(p_1) = \left[- \int_{-\infty}^{\infty} p_2(v) \ln p_2(v) dv - \left(- \int_{-\infty}^{\infty} p_1(v) \ln p_1(v) dv \right) \right] / \ln 2$$

4) Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. O primeiro experimento X_I consiste na retirada de uma bola da urna, a qual não é devolvida à urna. Na sequência, uma segunda bola é retirada, experimento X_{II} , a qual também não é devolvida à urna. Determine:

- a) A entropia de informação dos dois experimentos, $H(X_I)$ e $H(X_{II})$,
- b) As entropias condicionais, $H(X_{II} | X_I)$ e $H(X_I | X_{II})$ e
- c) A informação mútua $M(X_I, X_{II})$.