

## 2<sup>a</sup> Lista de Exercícios F 604

07/04/2013

- 1) No lançamento de uma moeda, temos que a probabilidade para se obter cara é  $p$  e  $q$  a probabilidade para se obter coroa. Considere o experimento em que a moeda é lançada até que uma cara seja obtida. Seja  $X$  o número de lançamentos e, portanto,  $X$  é uma variável aleatória. Determine a entropia de informação  $H(X)$  em bits para esse experimento.
- 2) Considere as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , distribuídas de acordo com a probabilidade conjunta  $P(x_i \cdot y_j)$ . A informação mútua entre as duas variáveis é definida por:

$$M(X, Y) \equiv \sum_{i,j} P(x_i \cdot y_j) \ln \left( \frac{P(x_i \cdot y_j)}{P_X(x_i)P_Y(y_j)} \right)$$

onde  $P_X(x_i)$  e  $P_Y(y_j)$  são as probabilidades marginais para  $X$  e  $Y$ .

- a) Relacione  $M(X, Y)$  com as entropias  $H(X, Y)$ ,  $H(X)$  e  $H(Y)$ .  
b) Calcule a informação mútua da distribuição conjunta Gaussiana com a forma:

$$P(x \cdot y) \propto \exp \left( -\frac{ax^2}{2} - \frac{by^2}{2} - cxy \right)$$

- 3) Considere um gás ideal em uma dimensão. Em princípio a velocidade de uma partícula do gás se encontra no intervalo:  $-\infty < v < \infty$ .
- a) Determine a densidade de probabilidade  $p_1(v)$ , sujeita ao vínculo que o valor médio do módulo da velocidade é igual  $c$ , ou seja,  $\langle |v| \rangle = c$ , através da maximização da entropia de informação.
- b) Determine a densidade de probabilidade  $p_2(v)$ , dado o único vínculo sobre a energia cinética média,  $\langle mv^2/2 \rangle = mc^2/2$ , através da maximização da entropia de informação.
- c) Qual dos casos acima fornece mais informação sobre a velocidade da partícula?  
Quantifique a diferença de informação em bits através de:

$$H(p_2) - H(p_1) = \left[ - \int_{-\infty}^{\infty} p_2(v) \ln p_2(v) dv - \left( - \int_{-\infty}^{\infty} p_1(v) \ln p_1(v) dv \right) \right] / \ln 2$$

4) Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. O primeiro experimento  $X_I$  consiste na retirada de uma bola da urna, a qual não é devolvida à urna. Na sequência, uma segunda bola é retirada, experimento  $X_{II}$ , a qual também não é devolvida à urna. Determine:

- a) A entropia de informação dos dois experimentos,  $H(X_I)$  e  $H(X_{II})$ ,
- b) As entropias condicionais,  $H(X_{II} | X_I)$  e  $H(X_I | X_{II})$  e
- c) A informação mútua  $M(X_I, X_{II})$ .