MS 211 - LISTA DE EXERCICIOS No. 5

RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

verão/2016

---

1. Considere o PVI: $y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$. No método de `Euler Aperfeiçoado` as aproximações para o valor da função y em x_{j+1} são obtidas através de:
$y(x_{j+1}) \sim y_{j+1} = r_j(x_{j+1}) = y_j + Mh$ onde $M = (f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + hy'_j))/2$. Analise a inclinação M da reta $r_j(x)$ e faça um gráfico com a interpretação geométrica deste método.

2. Considere o PVI: $y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$. O método de `Euler Modificado` as aproximações para o valor da função y em x_{j+1} são obtidas através de:
$y(x_{j+1}) \sim y_{j+1} = r_j(x_{j+1}) = y_j + hf(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$, onde $\bar{x}_j = x_j + 0.5h$ e $\bar{y}_j = y_j + (0.5h)y'_j$, onde o passo h é dado. Analise a inclinação da reta $r_j(x)$ e faça um gráfico com a interpretação geométrica deste método.

3. Considere o PVI: $y' = 1 + y/x$; $y(1) = 2$
a) Obtenha aproximações para $y(2)$, usando o Método de Euler com $h = 0.25$;
b) repita o item (a), usando agora o Método de Euler Aperfeiçoado;
c) repita o item (a), usando agora o Método de Euler Modificado.

4. Considere o PVI: $y' = y$, $y(0) = 1$. Mostre que o método de Euler Aperfeiçoado, quando aplicado a esta equação fornece : $y_{k+1} = (1+h+h^2/2)^{k+1}$. Comparando com a solução exata do problema, você esperaria que o erro tivesse sempre o mesmo sinal? Justifique!

5. *a)* Escreva a fórmula de iteração para o método de Taylor de 2a. ordem aplicado ao PVI: $y' + y = x$, $y(0) = 0$ considerando $h = 0.1$;
b) Verifique que $y(x) = \exp(-x) + x - 1$ é solução do PVI.

6. O PVI: $y' = -20y$; $y(0) = 1$ tem por única solução $y(x) = \exp(-20x)$.
a) Verifique a afirmação acima.
b) Verifique que qualquer método de Taylor de 2ª ordem, quando aplicado a este problema nos fornece: $y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

7. Considere a equação diferencial $y' = y\text{sen}(y) + x$ com a condição inicial $y(0) = 1$. Calcule $y'(0)$, $y''(0)$ e $y'''(0)$. Utilizando esta informação calcule aproximadamente $y(0.25)$.

8. Usando série de Taylor, encontre a solução do PVI $xy' = x - y$; $y(2) = 2$ em $x = 2.1$ com precisão de cinco casas decimais. *(**dica**: de quantos termos a série precisa para que o erro cometido seja da ordem de 10^{-6}? Consulte Conte & de Boor, Exemplo 8.1)*

9. Da série de Taylor de $y(x)$ encontre $y(0.1)$ com seis casas de precisão se $y(x)$ satisfaz

$$y' = xy + 1, \qquad y(0) = 1$$

10. Considere o PVI: $y' = y - x$; $y(0) = 2$. Calcule $y(1)$ através dos métodos de Euler e Runge-Kutta de 4a.ordem com $h = 0.25$. Comparar seus resultados com os valores de $y(x)$ nos pontos x_j, sabendo que $y(x) = \exp(x) + x + 1$.

11. Dado o PVI: $y' = -x/y$, $y(0) = 20$, deseja–se encontrar uma aproximação para $y(1)$. Resolva por:
a) Método de Euler Aperfeiçoado ou o Modificado com $h = 0.25$;
b) Runge–Kutta de 3ª ordem, $h = 0.25$;
c) Runge–Kutta de 4ª ordem, $h = 0.25$;
c) Comente seus resultados.

12. Considere os PVI de 2a.ordem abaixo:
a) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = -1$ e $y'(0) = 0$, com $x \in [0, 1]$, usando $h = 0.25$;
b) $y'' + 7y = 0, \quad y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$, com $x \in [0, 1]$, usando $h = 0.25$.

Escreva cada equação de $2a.$ ordem como um sistema de equações de $1a.$ ordem e resolva:
i) pelo método de Euler; *ii)* pelo método de Euler Aperfeiçoado;

13. Aplique o método de Euler ao PVI de ordem 3: $y''' - y'' + 0.2(y') + ysen(x) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1, y''(0) = 1$. Obtenha $y(1), y'(1)$ e $y''(1)$, usando $h = 0.5$

14. Resolva pelo Método de Diferenças Finitas, o seguinte problemas de valor de contorno (use $h = 0.25$): $y'' + 2y' + y = x$, $y(0) = 2$ e $y(1) = 0$

15. Considere o PVC: $y'' - y'sen(y) - xy = 0, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 5$. Escreva o sistema de equações que deverá ser resolvido para obter os valores y_i no intervalo [0,1], com espaçamento $h = 0.2$.

16. O método das diferenças finitas descrito a seguir é outra maneira de aproximarmos soluções de problemas de valor inicial: Substituindo $y'(x)$ por: $(y(x + h) - y(x))/h$ no PVI $y'(x) = f(x, y)$ $y' = (1/x)(2y + x + 1)$, $y(1) = 0.5$ por $(y(x + h) - y(x))/h$ e obtenha uma equação de diferenças para aproximar a solução da equação diferencial. Faça $h = 0.2$ e $h = 0.1$ e encontre, em cada caso, uma aproximação para $y(1.6)$. Analise os resultados comparando com a solução exata: $y(x) = 2x^2 - x - 0.5$.
