F-128 – Física Geral I

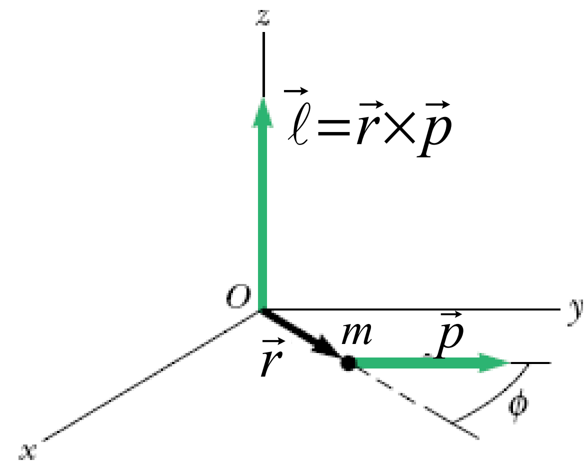
Aula exploratória-11a

UNICAMP – IFGW
username@ifi.unicamp.br

Momento Angular

O momento angular $\vec{\ell}$ de uma partícula de momento $\vec{p}$ em relação ao ponto O é:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$



(Note que a partícula *não* precisa estar girando em torno de O para ter momento angular em relação a este ponto).

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Por outro lado: $\vec{F}_{res} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Então: $\boxed{\dfrac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{res} = \vec{\tau}_{res}}$

$$\vec{\tau}_{res} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\ell} = \overrightarrow{\text{constante}}$$

Momento Angular

Forças Centrais

Há, entretanto, outros casos onde o momento angular se conserva mesmo na presença de forças não nulas. Um exemplo é o de forças centrais, que são forças da forma

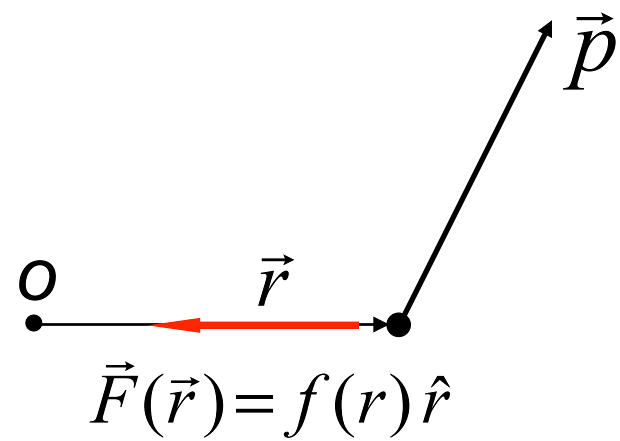
$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\hat{r}$$

Neste caso:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau} = \underbrace{\vec{r} \times f(r)\,\hat{r}}_{=0}$$

e se

$$\boxed{\vec{\tau} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\ell} = \overrightarrow{const}.}$$



Momento angular de um sistema de partículas

Lei fundamental da dinâmica das rotações

A variação do momento angular total de um sistema de partículas é:

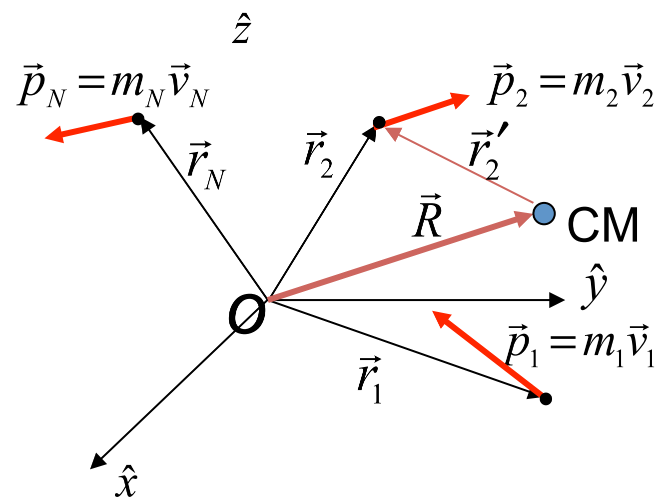
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Como

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_{i(ext)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i \leftarrow j})$$

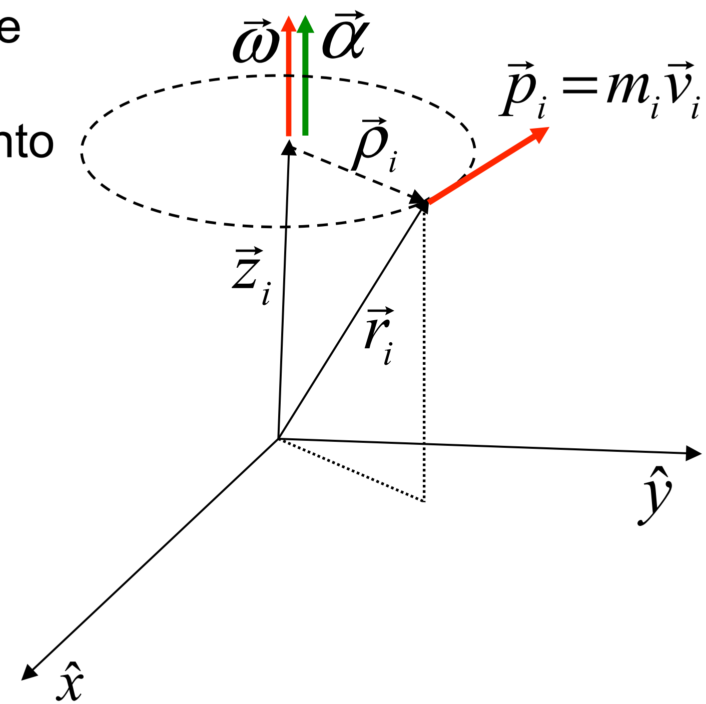
Temos

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{(ext)}}$$



Rotação em torno de um eixo fixo

Vamos agora estudar o movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Como podemos decompor o vetor posição de qualquer ponto do corpo rígido como



$$\tau^{(z)} = \sum_i \tau_i^{(z)} = \sum_i \frac{dl_i^{(z)}}{dt} =$$

$$\frac{d\left(\sum_i l_i^{(z)}\right)}{dt} = \frac{dL^{(z)}}{dt} = I\,\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

Mas, pela Lei fundamental da dinâmica das rotações:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(ext)} = \vec{\tau}_{(ext)} \quad \Longrightarrow \quad \tau^{(z)} = \tau_{(ext)}^{(z)} = \frac{dL^{(z)}}{dt} = I\,\alpha$$

Rotação vs. Translação

Tabela de analogias

	Rotação em torno de um eixo fixo	Movimento de translação
energia cinética	$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$	$K = \frac{1}{2} m v^2$
equilíbrio	$\sum \vec{\tau} = \vec{0}$	$\sum \vec{F} = \vec{0}$
2ª lei de Newton	$\sum \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$	$\sum \vec{F} = m \vec{a}$
2ª lei de Newton	$\sum \vec{\tau}_{(ext)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
momento	$L = I\omega$	$\vec{p} = m\vec{v}$
conservação	$\vec{L}_i = \vec{L}_f$	$\vec{p}_i = \vec{p}_f$
potência	$P = \tau\omega$	$P = Fv$

Exercício 01

Uma bola de massa m está localizada em das extremidades de um mastro que está fixo em uma parede (ponto P), como mostrado na figura. O comprimento do mastro é l e forma um ângulo θ com a horizontal. Suponha que a bola se desprenda e comece a cair.

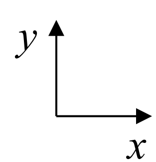
a) Determine o momento angular (em função do tempo) da bola em relação ao ponto P;

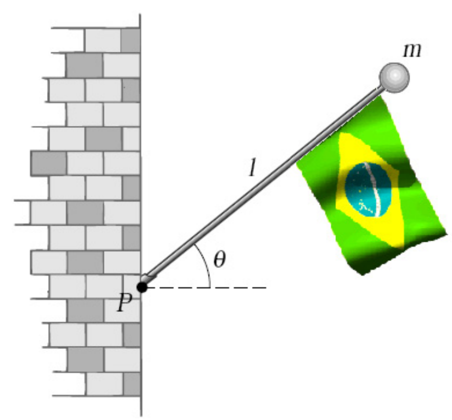
b) Calcule o torque sobre a bola e demonstre que ele é igual à derivada temporal do momento angular. Despreze as forças dissipativas.

Resp:

a) $\vec{L} = -mgl(\cos\theta)t\hat{k}$

b) $\vec{\tau} = -mgl\cos\theta\,\hat{k}$





Exercício 02

Dois astronautas, cada um com massa M, são ligados por uma corda de comprimento d e massa desprezível. Eles orbitam livremente em torno do centro de massa do conjunto, ambos com velocidade v. Tratando os astronautas como partículas, calcule:

a) o módulo do momento angular do sistema;

b) a energia rotacional do sistema.

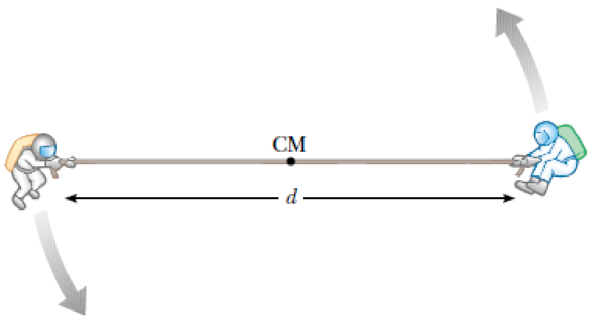
Puxando a corda, eles diminuem para $d/2$ a distância entre eles.

c) qual é o novo momento angular do sistema?;

d) quais são as novas velocidades dos astronautas?;

e) qual é a nova a energia rotacional do sistema?

f) que trabalho foi feito pelos astronautas ao encurtar



a) $\omega_i = \frac{2v}{d}$ $\quad I_i = \frac{Md^2}{2}$ $\quad L_{CM} = Mvd$

b) $K_{rot} = Mv^2$

c) $L_f = L_i = Mvd$

d) $I_f = \frac{Md^2}{8}, \ \omega_f = \frac{8v}{d}, \ v_f = 2v$

e) $K_{rot} = 4Mv^2$

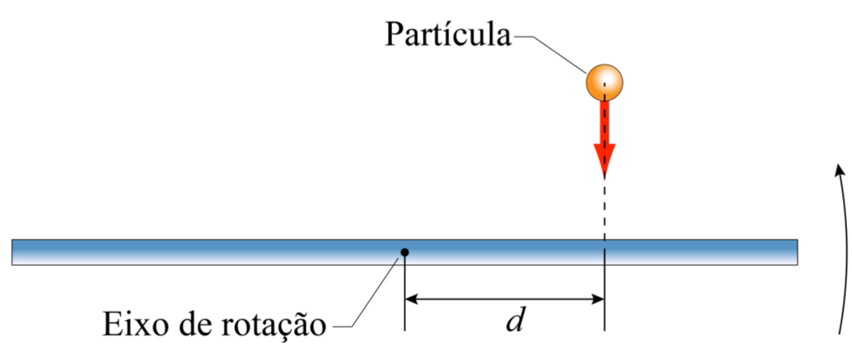
f) $W = \Delta K_{rot} = 3Mv^2$

Exercício 03

A figura é uma vista de cima de uma barra fina uniforme de comprimento L e massa M girando horizontalmente a w no sentido anti-horário em torno de um eixo que passa pelo centro. Uma partícula de massa $M/3$, que se move horizontalmente com uma velocidade de v0, choca-se com a barra e fica presa. A trajetória da partícula é perpendicular à barra no momento do choque, que ocorre a uma distância d do centro da barra.

a)Para que valor de d a barra e a partícula permanecem em repouso após o choque?

b)Em que sentido a barra e a partícula começam a girar se d é maior que o valor calculado no item a) ?



Exercício 04 - Extra

Uma bola de massa m = 0,4 kg é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 40,0 m/s. Qual é o seu momento angular em relação a P, um ponto a uma distância horizontal de 2,0 m do ponto de lançamento, quando a bola está:

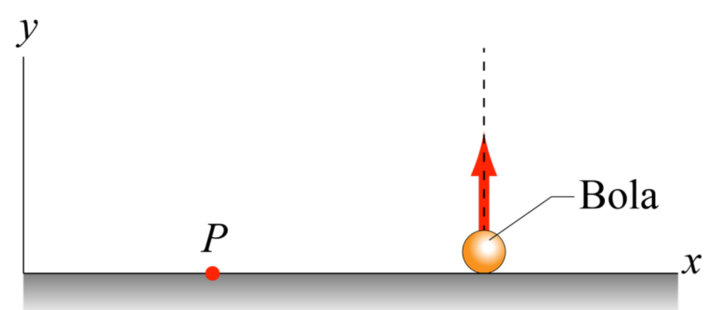
a) na altura máxima e

b) na metade do caminho de volta ao chão?

Qual é o torque em relação a P a que a bola é submetida devido à força gravitacional quando está

c) na altura máxima e

d) na metade do caminho de volta ao chão?



Exercício 05 – Extra

A figura abaixo mostra uma estrutura rígida formada por um aro de raio R e massa m e um quadrado feito de quatro barras finas de comprimento R e massa m cada uma. A estrutura rígida gira com velocidade constante em torno de um eixo vertical, com período de 2,5 s. Supondo que R = 0,5 m e m = 2,0 kg, calcule:

a) o momento de inércia da estrutura em relação ao eixo de rotação e

b) a componente do momento angular paralela ao eixo de rotação.

$$\boxed{I_{tot} = I_{aro} + I_{quad} = \frac{19mR^2}{6}}.$$

$$\boxed{L = I_{tot}\omega = \frac{76\pi mR^2}{30} \approx 4,0\ kgm^2/s}$$