CONDUTÂNCIA DE UM TUBO LONGO NO REGIME MOLECULAR

Considere a figura 1, que mostra um tubo de diâmetro D e comprimento L que conduz gás no regime molecular e cujas pressões em suas extremidades sejam P_1 e P_2, sendo $P_1 > P_2$. O fluxo de gás será então da esquerda para a direita ao longo da coordenada y. Admitamos regime estacionário e temperatura uniforme no sistema gás-tubo.

Chamemos de v_d a velocidade de deslocamento do gás no tubo, e consideremos um elemento de volume do gás, dV, de diâmetro D e comprimento dy.

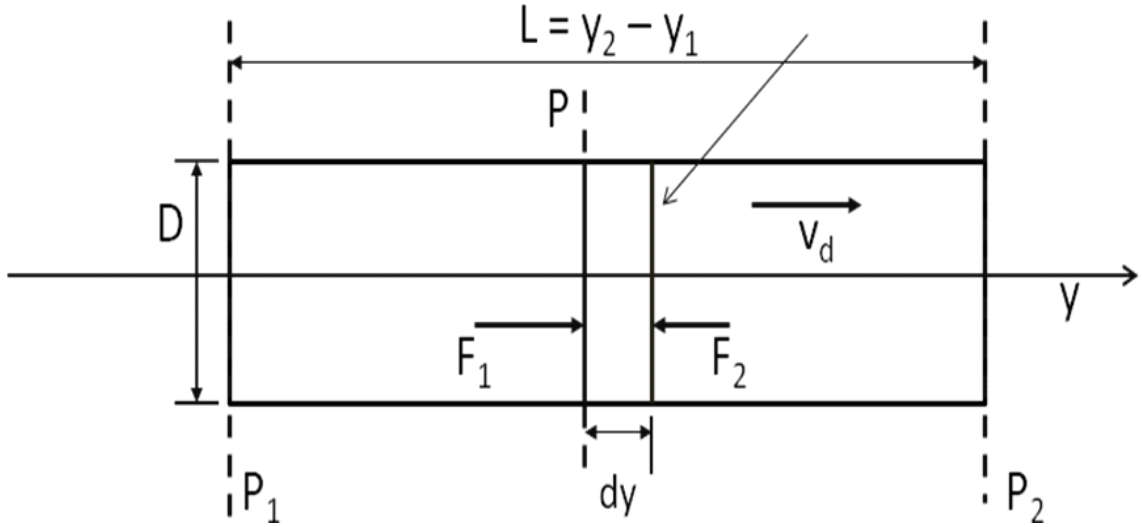

Figura 1. Tubo com comprimento L e diâmetro D. A seta indica o elemento de volume dV.

A força resultante que o gás exerce no elemento de parede do tubo correspondente ao elemento de volume é

F_{PAR} = taxa de transferência de momento das moléculas no elemento de parede

ou

F_{PAR} = (número de colisões por unidade de área/unidade de tempo) x A x mv_d

onde A é a superfície lateral do elemento de volume e mv_d é a componente do momento na direção y de cada molécula que colide com o elemento de parede. Portanto,

$$F_{PAR} = (nv_m/4)Amv_d \qquad (1)$$

ou

$$F_{PAR} = (nv_m/4)\ \pi D\ dy\ mv_d \qquad (2)$$

onde n é densidade do gás (volume^{-1}), v_m a velocidade média das moléculas, D é o diâmetro do tubo, dy é o elemento de comprimento ao longo da direção y, e m a massa de uma molécula.

A força total, devido à pressão do gás, que atua no elemento de volume é

$$F_{PRES} = P(\pi D^2/4) - (P+ dP)(\ \pi D^2/4) \qquad (3)$$

ou

$$F_{PRES} = -\ (\pi D^2/4)\ dP \qquad (4)$$

onde P é a pressão.

Como a força que o gás contido no elemento de volume exerce sobre a parede é igual à força que a parede exerce sobre o gás, a condição de equilíbrio é $F_{PAR} = F_{PRES}$. Portanto, igualando as equações (2) e (4), teremos

$$(nv_m/4)\pi D\ dy\ mv_d = -\ (\pi D^2/4)\ dP \qquad (5)$$

O volume de gás, dV, que cruza a seção reta do tubo no intervalo de tempo dt é

$$dV = (\pi D^2/4)\ v_d\ dt \qquad (6)$$

Logo,

$$dV/dt = (\pi D^2/4)\ v_d \qquad (7)$$

Multiplicando ambos os membros desta última equação por P, e lembrando a definição de corrente molecular (Q = P (dV/dt), tem-se

$$Q = (\pi D^2/4)\ P\ v_d \qquad (8)$$

Eliminando v_d entre as equações (5) e (8), e lembrando que $n = P/kT$ (Equação de Estado), onde k é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta, podemos escrever

$$4(v_m/kT)Q\ m\ dy = -\ \pi D^3\ dP \qquad (9)$$

Como temos apenas duas variáveis, y, definida entre os limites y_1 e y_2, e P, entre os limites P_1 e P_2, (ver figura), teremos, mediante integração e re-arranjo da equação resultanre

$$Q = (\pi D^3/4L)(kT/mv_m)(P_1 - P_2) \qquad (10)$$

onde $L = y_2 - y_1$.

A corrente molecular pode ser escrita como $Q = C\ (P_1 - P_2)$, onde C é a condutância. Portanto

$$C = (\pi D^3/4L)(kT/mv_m) \qquad (11)$$

Lembrando que $v_m = [8kT/\pi m]^{1/2}$, a substituição desta última equação em (11) resulta em

$$C = (\pi/8)[\pi kT/2m]^{1/2}(D^3/L) \qquad (12)$$

Numa demosntração mais rigorosa, temos que multiplicar esse resultado por $8/3\pi$. Então

$$C = (1/6)[2\pi kT/m]^{1/2}(D^3/L) \qquad (13)$$

Como $m = M/N_0$, sendo M a massa de um mol e N_0 o número de Avogadro, teremos, para essa última equação

$$C = (1/6)[2\pi kTN_0/M]^{1/2}(D^3/L) \qquad (14)$$

No sistema de unidades CGS, C(cm^3/s), M(g), T(K), D, L(cm), $N_0 = 6{,}02 \times 10^{23}$ e $k = 1{,}38 \times 10^{-16}$ erg/K. Portanto, a equação (14) pode ser escrita na forma

$$C = 3{,}81 \times 10^3(T/M)^{1/2}(D^3/L) \quad (cm^3/s) \qquad (15)$$

Ou, se quisermos C em (litro/s)

$$C = 3{,}81(T/M)^{1/2}(D^3/L) \qquad \text{(litro/s)} \qquad (16)$$

sempre lembrando que T(K), M(g), D,L(cm).