Interferômetro de Michelson

Hugo L. Fragnito e Antonio C. Costa
Unicamp – IFGW, Março de 2010

1 – INTRODUÇÃO

O interferômetro de Michelson é um instrumento que permite medir comprimentos com muita precisão. Consta (vide Fig. 1) de um espelho semitransparente ES, um espelho fixo (EF, a uma distância l_2) e outro móvel (EM, a uma distância l_1). A luz incidente é divida no SE em partes aproximadamente iguais; uma parte reflete sobre si mesma em EF e refletida no SE na direção do olho do observador (ou num anteparo no caso de utilizarmos um laser). A outra parte reflete sobre si mesma em EM, é transmitida por SE e interfere no anteparo com a primeira parte. A diferença de caminho óptico é $2(l_2 - l_1) = 2x$, onde x é posição de EM é relação ao ponto em que os dois braços do interferômetro são iguais. Se a fonte de luz é monocromática (frequência angular $\omega = k/c$; c é a velocidade da luz) com comprimento de onda λ ($k = 2\pi/\lambda$), o campo óptico resultante pode ser escrito como

$$E = E_1 \cos(\omega t - k2l_1) + E_2 \cos(\omega t - k2l_2),$$

A intensidade da luz, a menos de uma constante de proporcionalidade, é a média temporal do quadrado do campo:[1]

$$I = \langle E^2 \rangle = I_1 + I_2 + 2E_1E_2 \cos 2kx.$$

O último termo nesta expressão é chamado termo de interferência. Se o divisor de feixe for de 50%, então $I_1 = I_2 = E_1E_2 = I_0/2$ e temos

$$I = I_0 (1 + \cos 2kx). \tag{1}$$

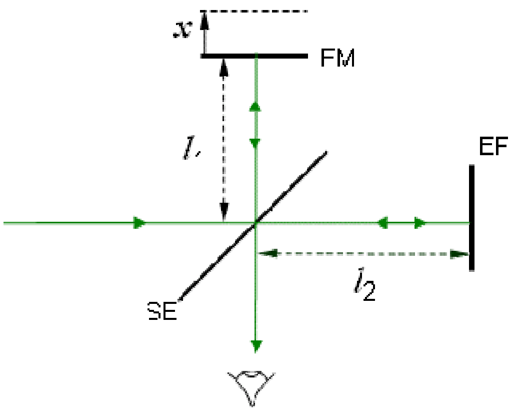

Figura 1. Interferômetro de Michelson. Normalmente se utiliza uma fonte extensa (como uma lâmpada de gás) e se observa com olho nu (ou com ajuda de uma lente ocular). Para o observador, os dois espelhos aparecem na mesma direção, porém deslocados pela distância x.

Deslocando EM, então, a intensidade passa por máximos e mínimos de interferência com período $2\pi/2k = \lambda/2$. Se soubermos λ, podemos medir um comprimento x apenas contando o

[1] Aqui utilizamos $< \cos(\omega t - k2l_1) \cos(\omega t - k2l_1) > = ½ < \cos[2\omega t - 2k(l_2+l_1)] + \cos[2k(l_2-l_1)] > = ½ \cos[2k(l_2-l_1)]$.

número de franjas de interferência N: $x = N\lambda/2$. Alternativamente, se soubermos x, podemos medir o comprimento de onda da luz como $\lambda = 2x/N$.

Se EM e EF estiverem exatamente perpendiculares, o padrão de interferência observado é na forma de círculos concêntricos (Fig. 2) e se estiverem ligeiramente inclinados um relação ao outro o padrão mostrará franjas claras e escuras (na realidade são também círculos concêntricos, mas com o centro fora do eixo de simetria).

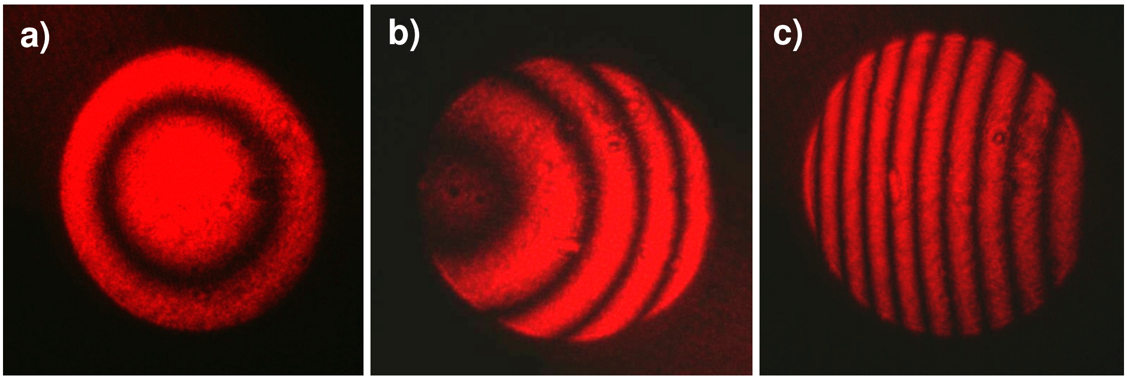

Figura 2. Padrões de interferência observados quando os espelhos estão alinhados (a) e ligeiramene desalinhados (b e c).

Na prática, o divisor de feixe é construído depositando uma fina camada metálica sobre a superfície de um vidro plano e relativamente espesso, de maneira a garantir que não haja deformações na superfície (Fig. 3). Como a luz refletida em EM percorre duas vezes a espessura da placa SE, coloca-se uma "placa compensadora", paralela a SE, do mesmo vidro e de espessura idêntica, para que nos dois braços do interferômetro os caminhos ópticos sejam idênticos quando $x = 0$.

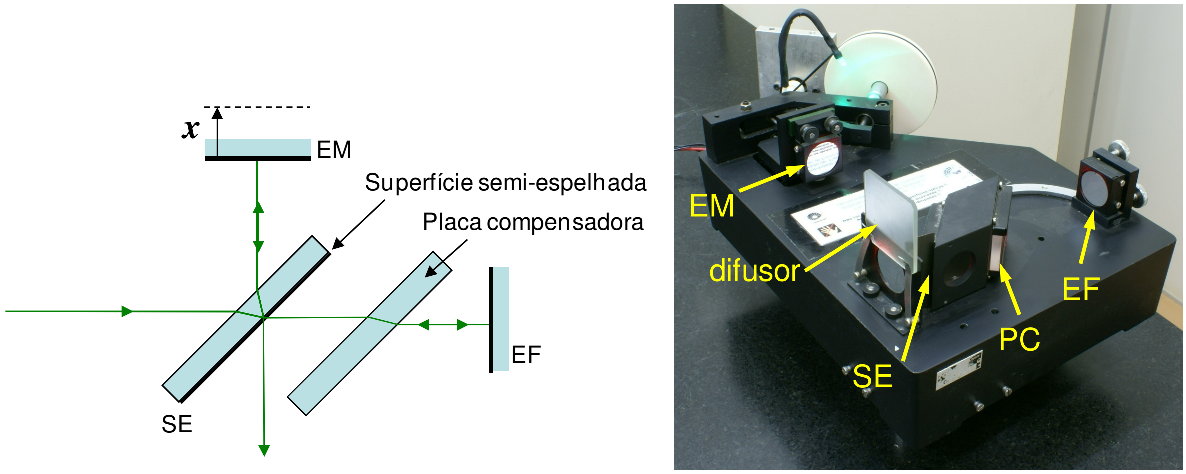

Figura 3. Interferômetro de Michelson com placa compensadora e foto do instrumento a utilizar no laboratório. EM: Espelho Móvel; EF: Espelho Fixo, SE: Semi-Espelho; PC: Placa Compensadora. Também é mostrado o vidro difusor que se utiliza no caso de lâmpadas.

Note na Fig. 3 que uma das reflexões em SE é interna (dentro do vidro) e a outra é externa (ao vidro). Isto introduz uma diferença de fase de π entre as duas ondas refletidas, de modo que, a rigor, a Eq. 1 deve ser substituída por

$$I = I_0 (1 - \cos 2kx), \tag{2}$$

Este fato é irrelevante para os fins práticos. A única diferença é que, quando $x = 0$ e o alinhamento é perfeito, temos uma franja circular escura no centro do padrão de interferência (em quanto que a Eq. 1 prediz um máximo).

2- Medidas de comprimentos de onda

O comprimento de onda, λ, de um laser ou de uma raia espectral se mede contando o número de máximos (ou mínimos), N, que "passam" por um dado ponto para um deslocamento x do espelho móvel, de modo que $\lambda = 2x/N$. A incerteza neste tipo de medida é de ± média franja, ou seja, $\Delta N = \pm½$, com a qual o erro relativo em uma medida de comprimento onda λ é

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2} = \frac{1}{2N}\sqrt{1+\left(\frac{4\Delta x}{\lambda}\right)^2} \, .$$

Contando um número suficientemente grande de franjas podemos fazer $\Delta\lambda/\lambda$ tão pequeno como desejado. Suponhamos que medimos x com parafuso micrométrico de precisão $\Delta L = \pm 5$ µm (i.e., a menor divisão é de 10 µm e $\Delta x = \Delta L$) e que queremos medir a linha espectral na região de 500 nm, com precisão de três algarismos significativos; ou seja, queremos que o resultado seja tal que $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-3}$. Para isto, devemos contar pelo menos $N = 500\sqrt{1+(4\Delta x/\lambda)^2} \simeq 20000$ franjas!

Para diminuir o número de franjas podemos utilizar um mecanismo de redução do avanço do parafuso. No interferômetro que utilizaremos no laboratório há um mecanismo –essencialmente uma alavanca– que reduz o movimento do espelho por um fator R de aproximadamente 5 vezes, de modo que, para cada divisão, o espelho desloca $F = 10\ \mu\text{m}/R = 2\ \mu\text{m/divisão}$. O erro do parafuso ($\Delta L = \pm 5$ µm) se traduz em uma incerteza de $\Delta x = \Delta L/R = \pm 1$ µm. No exemplo anterior, o mínimo número de franjas que devemos contar para medir λ com três algarismos significativos se reduz para 4000.

Geralmente o espelho é deslocado com um motor que não responde instantaneamente quando o paramos e temos de avaliar o número de divisões em que o movimento para. Neste caso, se não houver erro de paralaxe, a incerteza é de tipicamente ¼ de divisão, ou $\Delta x = \frac{1}{4} 10\ \mu\text{m}/R = 0{,}5\ \mu\text{m}$ e a contagem no exemplo anterior cai para umas 2060 franjas. [2]

Se, para N franjas, o número de divisões do parafuso é n, temos que $x = nF$, e a equação básica para medir comprimentos de onda $\lambda = 2x/N$ pode ser escrita de forma compacta como

$$\lambda = 2nF/N, \tag{3}$$

com um erro dado por

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2} \, . \tag{4}$$

[2] É possível reduzir o erro ainda mais contando o número exato de franjas necessário para que o parafuso desloque por um número exato de divisões. A incerteza neste caso depende de nossa percepção sobre quando houve um número exato de divisões. Se não houver erro de paralaxe, podemos posicionar o risco da divisão do parafuso exatamente sobre a linha de referência com erro de um décimo de divisão: $\Delta x = \frac{1}{10} 10\ \mu\text{m}/R = 0{,}2\ \mu\text{m}$. Com 940 franjas, aproximadamente, já obtemos a precisão desejada. Note que neste caso devemos continuar contando franjas até que tenhamos simultaneamente e exatamente um número inteiro de divisões e um número inteiro de franjas.

3- Medida da separação de um dubleto

O espectro de algumas lâmpadas possui um par de raias bem próximas, chamado de um "dubleto". Exemplos são o dubleto amarelo do sódio e o dubleto amarelo do mercúrio. A origem física do dubleto é que esses átomos possuem dois níveis de energia muito próximos. Num determinado instante de tempo, um átomo emite em uma ou outra raia, mas não nas duas. Isto significa que a luz emitida em uma raia não tem correlação (coerência) com a emitida em outra raia[3]. Assim sendo, não há interferência entre os campos das duas raias. O padrão de interferência é então simplesmente a soma dos padrões:

$$I = I_a(1 - \cos 2k_a x) + I_b(1 - \cos 2k_b x),$$

onde $k_n = 2\pi/\lambda_n$ ($n = a$ ou b; λ_a e λ_b são os comprimentos de onda dos componentes do dupleto). Se as intensidades das raias são iguais ($I_a = I_b = I_0/2$), podemos escrever[4]

$$I = I_0(1 - \cos\delta kx\ \cos 2kx), \tag{5}$$

onde $k = (k_a + k_b)/2 = 2\pi/\lambda$ (λ é o comprimento de onda médio), $\delta k = |k_a - k_b|/2$.

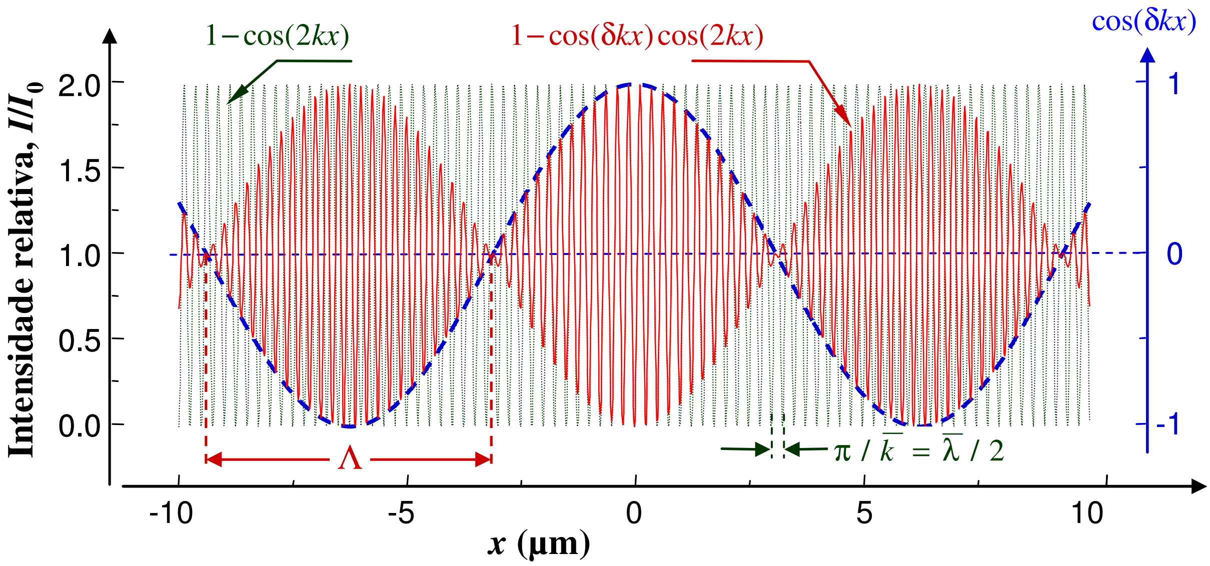

Figura 4. Variação da intensidade com a distância entre espelhos no caso de um dupleto de igual intensidade. A senóide verde representa o padrão de interferência para o comprimento de onda médio; a senoide com linha azul pontilhada é $\cos\delta kx$ e a curva vermelha é o resultado I/I_0.

A fig. 4 ilustra a intensidade relativa (I/I_0) como função de x. As franjas de interferência correspondendo ao comprimento de onda médio ($\lambda = 2\pi/k$) são "moduladas" pela função $\cos\delta kx$, aparecendo bem contrastadas em certas regiões e desaparecendo nas posições em que $\cos\delta kx = 0$. Os mínimos de contraste (ou de "visibilidade" das franjas) se repetem com período $\Lambda = \pi/\delta k$ ou, utilizando $\delta k/k = |\delta\lambda/\lambda|$, $\Lambda = \lambda^2/2\delta\lambda$. Assim,

$$\delta\lambda = \lambda^2/2\Lambda. \tag{6}$$

Medindo o período Λ e sabendo o comprimento de onda médio, podemos determinar $\delta\lambda$.

[3] Isto é verdade para qualquer par de raias espectrais, não apenas para o dubleto.
[4] Aqui utilizamos a igualdade trigonométrica $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$.

No caso do dubleto amarelo do sódio (comprimento de onda médio $\lambda_{Na} = (589{,}29 \pm 0{,}05)$ nm e separação $\delta\lambda$ = 0,6 nm), o período esperado é de Λ = 291 µm.

4 - OBJETIVOS

Utilizar o interferômetro de Michelson para medir comprimentos de onda e dubletos.

5- PREPARAÇÃO

A menor divisão do parafuso micrométrico do interferômetro é de 10 µm e o fator de redução é 5.

a) Se λ = 633 nm, quantas franjas são contadas para 10, 20, 50 divisões?
b) O dubleto do mercúrio tem λ_a = 579,07 nm e λ_b = 576,96 nm. A cada quantas divisões do parafuso espera que as raias desapareçam?
c) Idem para dubleto do sódio (λ_a = 589,592 nm e λ_b = 588,995 nm).

6 - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

6.1- Alinhamento

Para alinhar os espelhos utilizamos um laser colimado, O feixe deve incidir aproximadamente no centro de cada espelho e se observam dois pontos brilhantes no anteparo (a parede do laboratório). O espelho fixo EF possui dois parafusos para seu alinhamento. Se os dois pontos coincidem no anteparo os espelhos estarão aproximadamente alinhados. A seguir colocamos uma lente divergente ou uma lente convergente de curta distância focal, de modo a expandir os feixes projetados no anteparo. Geralmente observamos raias de interferência, mas se retocamos o alinhamento do espelho EF até que os espelhos fiquem perfeitamente perpendiculares entre si, o padrão consistirá de círculos concêntricos (fig. 2a).

Para facilitar a contagem de franjas de interferência é aconselhável trabalhar com EF ligeiramente desalinhado, de modo a se projetar no anteparo um padrão como o da fig. 2b. Utilize o motor para girar o parafuso e ajuste a velocidade adequada para a contagem. Durante a contagem de franjas gire o parafuso sempre no mesmo sentido (nunca volte atrás; o sistema parafuso-motor tem certa folga que pode causar erros).

Se contarmos exatamente n divisões para exatamente N franjas de interferência, o EM terá percorrido uma distância $x = Fn = N\lambda/2$, onde F é o quanto avança EM por cada divisão (em unidades de mícron por divisão).

6.2– Calibração da escala do parafuso micrométrico

Para calibrar o parafuso (isto é, determinar F com boa precisão) utilizamos um laser de He-Ne [$\lambda_0 = (632{,}82 \pm 0{,}05)$ nm no ar] e contamos pelo menos N_0 = 2000 franjas. Se o número de divisões do parafuso é n_0, então

$$F = \frac{N_0 \lambda_0}{2 n_0}.$$

O erro em F será devido à incerteza em λ_0 (±0,05 nm), em N_0 (±½ franja) e em n_0 (±¼ divisão):

$$\Delta F = F\sqrt{(\Delta N_0 / N_0)^2 + (\Delta\lambda_0 / \lambda_0)^2 + (\Delta n_0 / n_0)^2}\ .$$

Para F ~ 2 µm/div, a contribuição mais importante dentro da raiz vem do termo $(\Delta n_0/n_0)^2$ que é umas vezes maior que $(\Delta n_0/n_0)^2$ e umas cem vezes maior que $(\Delta\lambda_0/\lambda_0)^2$. Por isso, é muito importante medir bem n_0 – utilize uma lupa para ver bem as divisões do parafuso!.

Todas as medidas realizadas com este instrumento acarretarão um erro relativo $\Delta F/F$; por essa razão, é essencial fazer esta calibração com a melhor precisão possível. Para isto, devemos contar o maior número de franjas que a nossa paciência permite – porém compatível com o tempo disponível para realizar o experimento!

Ajuste a velocidade de avanço do espelho de modo a contar as franjas com facilidade. Conte em voz alta para que seus colegas verifiquem que não pulou nenhuma franja. Pratique com umas 50 franjas para se familiarizar com a contagem de franjas, a leitura das divisões do parafuso e a resposta do motor. Verifique que está dando tudo certo: F deve ser algo próximo de 2 µm/div. Uma vez treinado, posicione o espelho de modo a coincidir com uma divisão do parafuso e anote o valor. Conte 100 franjas e descanse, continue até 200 franjas e descanse, e assim sucessivamente até contar umas 2000 franjas. Quando tiver passado de 2000, o seu colega deverá olhar atentamente o parafuso e, ouvindo a contagem, parar o movimento quando o parafuso indicar um número exato de divisões, o que poderá acontecer para 2004 franjas, por exemplo.

6.3- Determinação do λ de uma fonte espectral.

Uma vez calibrado o parafuso, podemos medir o λ de uma fonte desconhecida, contando pelo menos 500 franjas para uma precisão aceitável. A fonte desconhecida poderá ser outro laser ou uma determinada raia de uma lâmpada (por exemplo, a linha verde do mercúrio).

Substitua o laser de He-Ne pela fonte com λ a determinar.

Se a fonte for uma lâmpada espectral deve utilizar um filtro óptico para selecionar a cor desejada e um vidro difusor (fig. 3) – utilize um filtro verde no caso da linha verde do Hg. As franjas não são visíveis quando projetadas na parede; devem ser vistas diretamente a olho nu como na fig. 1. Retoque o alinhamento do espelho fixo EF até achar franjas como na fig. 2b. Utilize um suporte para apoiar a cabeça, de modo que o seu olho fique sempre na mesma posição.

Conte as franjas (N > 500), deslocando o parafuso com o motor, para um número ~exato de divisões do parafuso e um número ~inteiro de franjas. Comece contando 50 franjas e, utilizando a eq. (4), verifique que está dando certo (por exemplo, no caso da linha verde do Hg deve ser perto de λ_{Hg} = 546,07 nm) e continue a contagem, descansando a cada 100 ou 200 franjas, até completar 500 ou mais franjas.

6.4- Determinação do δλ do dubleto amarelo do sódio.

Substitua a fonte de luz por uma lâmpada de sódio. Neste caso não precisa de filtro, pois o amarelo do Na é bem mais intenso do que as outras cores.[5] Coloque o vidro difusor e retoque o alinhamento do espelho EF para obter franjas.

Solte a correia que liga o parafuso ao motor e gire o parafuso até um dos extremos. Deslocando o parafuso micrométrico com a mão, procure uma posição em que as franjas de interferência desaparecem. Anote a leitura do parafuso, em número de divisões (n_1). Procure as próximas posições de contraste nulo (n_2, n_3,..., n_{18}) girando o parafuso com a mão e sempre na

[5] No caso do dubleto amarelo do mercúrio é preciso utilizar um filtro do tipo interferencial, pois a linha verde é consideravelmente mais intensa que o dubleto.

mesma direção (as franjas desaparecem aproximadamente a cada três voltas do parafuso). Compute os períodos $\Lambda_i = F\,(n_{i+1} - n_i)$ e determine a média e seu desvio, $\Lambda \pm \Delta\Lambda$.[6]

A separação do dubleto é dada pela eq. (6), onde o comprimento de onda médio $\lambda_{Na} = (589{,}29 \pm 0{,}05)$ nm. Determine $\delta\lambda$ e o seu desvio $\Delta(\delta\lambda)$.

7 - BIBLIOGRAFIA

1. F. A. Jenkins and H. White, *Fundamentals of Optics,* MacGraw Hill, New York (1976).

2. J. P. McKelvey and H. Grotch, *Fisica 4*, cap. 24, Harbra - Harper & Row do Brasil, São Paulo (1981).

3. G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics,* Holt, Rinehart and Winston, second edition, New York (1975).

4. E. Hecht, *Optics,* Adelphi University, Addison-Wesley, New York (1990).

[6] Utilize a formula para o erro padrão da média $\Delta\Lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(\Lambda_i - \Lambda)^2}{N(N-1)}}$.