F041 e F042 - Tópicos de Física Matemática I e II (Turma A)
FI263 - Tópicos de Física Teórica I (Turma B)

2º Semestre - 2014 Marcio José Menon

Capítulo 1 SIMETRIAS, SISTEMAS DE COORDENADAS E MÉTRICA

• ÍNDICE

6.2.4 Exemplos
a) Sistema Retilíneo Oblíquo em 2D
b) Sistemas Ortonormais em 3D
• Expressões Gerais
• Sistemas Retangular, Esférico e Cilíndrico
c) Sistema Curvilíneo Não Ortogonal em 2D
6.3 Espaços de Dimensão n
6.3.1 Forma Quadrática Fundamental
a) Expressão Geral
b) Exemplo de Interesse em 4D
6.3.2 Forma Diferencial Definida Positiva
6.3.3 Espaço de Riemann e Espaço Euclidiano
a) Definições
• Espaço de Riemann
• Espaço Euclidiano
b) Exemplos
• Espaços de Riemann e Euclidiano em 3D
• Espaço Euclidiano de Dimensão n (R^n)
• Espaço Pseudo-Euclidiano (Minkowski)
6.4 Notas Históricas - Georg Friedrich Bernhard Riemann

• Leituras Sugeridas
- M.R. Spiegel, “Análise Vetorial”, Capítulo 7.
- F.W. Byron, R.W. Fuller, “ Methematics of Classical and Quantum Physics”, Seção 1.7.
- L. Leithold, “O Cálculo com Geometria Analítica”(Harper & Row, São Paulo, 1977), Vol. 2, Capítulos 15, 16 e 17 (revisar).

Figura 1: G.F.B. Riemann (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Riemann.html).

• **QUESTÕES PROPOSTAS**

2. Conceitos Básicos

Questão 1

Explique o conceito de *elemento de arco* (ou *elemento de linha*) ds e demonstre as seguintes relações:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}, \qquad ds = r d\alpha,$$

onde $d\vec{r}$ é a *diferencial do vetor posição* (ou deslocamento infinitesimal) e $d\alpha$ o elemento de ângulo, em radianos, subentendido pelo elemento de arco ds.

3. Simetrias - Sistemas de Coordenadas Retangulares, Esféricas e Cilíndricas

Questão 2

a) Considere o plano (2D). Qual é o procedimento geral para se construir (estabelecer) um sistema de coordenadas? Para responder, faça referência aos conceitos de versores da base, coordenadas, simetrias, curvas coordenadas. Explique em que ordem esses conceitos devem ser considerados e como são conectados.

b) Exemplifique esse procedimento nos casos de simetrias retangular e circular.

Questão 3

No caso do plano (2D), demonstre as seguintes relações entre os versores da base retangular, $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ e da base polar, $\{\hat{r}, \hat{\varphi}\}$:

a) versores retangulares em função dos polares:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \cos\varphi\, \hat{r} - \operatorname{sen}\varphi\, \hat{\varphi}, \\ \hat{y} &= \operatorname{sen}\varphi\, \hat{r} + \cos\varphi\, \hat{\varphi}. \end{aligned}$$

b) versores polares em função dos retangulares:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos\varphi\, \hat{x} + \operatorname{sen}\varphi\, \hat{y}, \\ \hat{\varphi} &= -\operatorname{sen}\varphi\, \hat{x} + \cos\varphi\, \hat{y}. \end{aligned}$$

Questão 4

a) Qual é uma diferença essencial entre a base retangular $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ e a polar $\{\hat{r}, \hat{\varphi}\}$?

b) Mostre que no sistema polar, os versores $\hat{r}$ e $\hat{\varphi}$ obedecem

$$\frac{d\hat{r}}{d\varphi} = \hat{\varphi}, \qquad \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\hat{r}.$$

Questão 5

Mostre que se um versor $\hat{u}$ depende de uma variável escalar α, $\hat{u} = \hat{u}(\alpha)$, então:

$$\frac{d\hat{u}}{d\alpha} \ \textit{é perpendicular a } \hat{u}.$$

Questão 6

a) Mostre que em coordenadas polares a diferencial do vetor posição é dada por

$$d\vec{r} = r\, \hat{r} + r\, d\varphi\, \hat{\varphi}.$$

b) Sendo $s = \int_c ds$, onde $ds = |d\vec{r}|$ (questão 1), mostre que o perímetro de uma circunferência de raio R é $2\pi R$.

Questão 7

a) Considere o espaço (3D). Qual é o procedimento geral para se construir (estabelecer) um sistema de coordenadas? Para responder, faça referência aos conceitos de versores da base, coordenadas, simetrias, superfícies coordenadas. Explique em que ordem esses conceitos devem ser considerados e como são conectados.

b) Exemplifique esse procedimento nos casos de simetrias retangular, esférica e cilíndrica.

Questão 8

Seja $\vec{r}$ o vetor posição de uma partícula em relação à origem de um sistema de coordenadas retangulares no espaço (3D). Faça um esboço, indicando onde se localizam as coordenadas retangulares (x, y, z), esféricas (r, θ, φ) e cilíndricas (ρ, φ, z) do vetor.

Questão 9

Com base na resposta da questão anterior, obtenha as seguintes relações entre as coordenadas:

a) Esféricas em função das retangulares e relações inversas.

b) Cilíndricas em função das retangulares e relações inversas.

c) Esféricas em função das cilíndricas e relações inversas.

Respostas:

$$a) \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right\}, \quad \varphi = \tan^{-1}\left\{\frac{y}{x}\right\} \\ x &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad z = r\,\cos\theta. \end{aligned}$$

$$b) \qquad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1}\left\{\frac{y}{x}\right\} \quad z = z \\ x &= \rho\,\cos\varphi, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad z = z. \end{aligned}$$

$$c) \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2+z^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left\{\frac{\rho}{z}\right\}, \quad \varphi = \varphi \\ \rho &= r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \varphi = \varphi, \qquad z = r\,\cos\,\theta. \end{aligned}$$

Questão 10

a) Justificando a resposta, demonstre as seguintes relações entre os versores das bases retangular, esférica e cilíndrica:

$$\hat{\rho} = \cos\varphi\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{y}, \qquad \hat{\varphi} = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y},$$

$$\hat{r} = \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{z}, \qquad \hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{\rho} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{z},$$

b) Demonstre os seguintes resultados para as derivadas dos versores em relação às coordenadas (note as derivadas totais e parciais):

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\varphi} = \hat{\varphi}, \quad \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\hat{\rho}, \quad \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi} = \mathrm{sen}\theta\,\hat{\varphi}, \quad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = \hat{r}, \quad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\varphi} = \cos\theta\,\hat{\varphi}.$$

Questão 11

a) Mostre que nos sistemas retangular, esférico e cilíndrico a diferencial do vetor posição é dada por:

$$d\vec{r} = \begin{cases} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z} \\ \\ = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi} \\ \\ = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{z} \end{cases}$$

b) Explique e discuta os significados geométricos dos coeficientes diferenciais dos versores das bases, nos 3 casos acima considerados.

4. Sistemas de Coordenadas Retilíneas e Curvilíneas

Questão 12

Explique o que são sistemas de coordenadas retilíneas e sistemas de coordenadas curvilíneas. Dê exemplos.

Questão 13

Esta questão trata do estabelecimento de um sistema de coordenadas do plano, baseado na *simetria elíptica*. Utilizando os dados fornecidos abaixo e considerando um procedimento análogo ao estabelecimento do sistema de coordenadas polares (simetria circular), responda às seguintes questões:
a) Justificando a resposta, estabeleça as curvas coordenadas.
b) Num ponto genérico do plano, indique as curvas coordenadas e os versores da base. O sistema é ortogonal? Explique.
c) Obtenha as relações entre as coordenadas desse sistema e as coordenadas retangulares x, y, bem como as relações inversas.
d) Esse sistema de coordenadas pode ser considerado uma generalização de algum sistema de coordenadas conhecido? Qual? Justifique a resposta.

Dados:

Equação de uma elipse no plano xy, com centro na origem, eixo principal no eixo x, semi-eixo maior a no eixo x e semi-eixo menor b no eixo y:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Note que variando-se a e b de uma mesma quantidade u, a elipse (curva) passa por todos os pontos do plano (exceto a origem).

Resposta ítem (c) Relações inversas: $x = a\,u\cos\psi$, $y = b\,u\,\mathrm{sen}\,\psi$.

Questão 14

Reveja as definições e propriedades das superfícies de revolução e superfícies quádricas (por exemplo, Leithold seções 16.7 e 16.8).

Questão 15

A equação geral de um parabolóide de revolução (eixo z) é dada por

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z - z_0}{b} = 0,$$

onde a e b são constantes. Se $b > 0$, a concavidade (abertura) é no sentido positivo do eixo z e se $b < 0$, no sentido contrário. Em $x = y = 0$, $z = z_0$.

Considere um sistema de coordenadas curvilíneas u, v, φ que possui a seguinte relação com o sistema de coordenadas retangulares x, y, z:

$$x = u\,v\cos\varphi, \qquad y = u\,v\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad z = \frac{u^2 - v^2}{2}.$$

a) Justificando analiticamente a resposta, determine as superfícies coordenadas $u = constante$, $v = constante$ e $\varphi = constante$.
b) Faça um esboço das projeções dessas superfícies no plano $y = 0$. Nesse plano, identifique dois pontos P, Q, localizados (determinados) pelas intersecção das superfícies coordenadas.

5. Sistemas de Coordenadas Ortonormais (3D)

Questão 16

Considere um sistema de coordenadas ortonormais em 3D, u_1, u_2, u_3, base $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$ e o caso geral em que $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$. Com base nos resultados da questão 11, infira a expressão geral da diferencial do vetor posição $d\vec{r}$ no sistema ortonormal. Explique o que são *fatores de escala* e como são determinados.

Questão 17

Preencha a Tabela 1 sobre Sistemas de Coordenadas Ortonormais em 3D.

sistema de coordenadas	versores da base	diferenciais das coordenadas	fatores de escala	componentes vetoriais de $d\vec{r}$
curvilíneas ortonormais (3D)	$\hat{u}_i$ $i = 1, 2, 3$	du_i $i = 1, 2, 3$	h_i $i = 1, 2, 3$	$d\vec{l}_i = h_i du_i \hat{u}_i$ $i = 1, 2, 3$
retangulares				
esféricas				
cilíndricas				

Tabela 1: Sistemas de coordenadas ortonormais (3D) (Questões 17 e 19).

Questão 18

Justificando a resposta, mostre que no sistema de coordenadas ortonormais (3D), os elementos de área e volume são expressos por

$$\begin{aligned} d\vec{A}_i &= d\vec{l}_j \times d\vec{l}_k, \quad i, j, k \text{ permutações cíclicas de } 1, 2, 3 \\ dV &= |(d\vec{l}_1 \times d\vec{l}_2) \cdot d\vec{l}_3| \end{aligned}$$

onde $d\vec{l}_i = h_i du_i \hat{u}_i,\ i = 1, 2, 3$ são as componentes vetoriais de $d\vec{r}$.

Questão 19

Com base na questão anterior e nos dados preenchidos na Tabela 1, determine os elementos diferenciais:
a) de volume em coordenadas retangulares, esféricas e cilíndricas;
b) de área normais às seguintes superfícies coordenadas

b1) $z =$ cte, b2) $r =$ cte, b3) $\rho =$ cte, b4) $\theta =$ cte.

Respostas:

$$d\vec{A}_z = dx\, dy\, \hat{z} \qquad d\vec{A}_r = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{r}$$

$$d\vec{A}_\rho = \rho\, d\varphi\, dz\, \hat{\rho} \qquad d\vec{A}_\theta = r \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\varphi\, \hat{\theta}$$

6. Sistema Geral de Coordenadas: Forma Quadrática Fundamental e Métrica

Questão 20

Considere um sistema geral de coordenadas (curvilíneas/retilíneas, ortogonal/não ortogonal) v_1, v_2, v_3, base $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$. Quais argumentos permitem generalizar o resultado da questão 14 para a diferencial do vetor posição? Mostre que neste caso geral,

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i dv_i \hat{v}_i \qquad \text{e} \qquad h_i \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v_i},$$

onde $h_i = |\partial \vec{r}/\partial v_i|,\ i = 1, 2, 3$ são os fatores de escala.

Questão 21

Para o sistema de coordenadas da questão anterior:
a) Determine a expressão geral do quadrado do elemento de arco.
b) Identifique os coeficientes métricos e expresse o resultado em termos desses coeficientes (Forma Quadrática Fundamental);
c) Expresse a métrica através de uma representação matricial.

Questão 22

Considere o caso particular de um sistema de coordenadas ortonormal em 3D.
a) Escreva a representação matricial da métrica em termos dos fatores de escala.
b) Escreva a representação matricial da métrica para os sistemas de coordenadas retangulares, esféricas e cilíndricas.
c) Determine as expressões correspondentes do quadrado do elemento de arco em cada um dos três sistemas.

Questão 23

Considere o sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais no plano, da Questão 13,

$$x = a\,u\,\cos\psi, \qquad y = b\,u\,\mathrm{sen}\,\psi.$$

Expressando o vetor posição $\vec{r}$ em termos das coordenadas u e ψ na base fixa $\{\hat{x}, \hat{y}\}$, responda as questões que seguem.
a) Determine $\partial\vec{r}/\partial u$, o coeficiente métrico h_u e o versor $\hat{u}$.
b) Determine $\partial\vec{r}/\partial\psi$, o coeficiente métrico h_ψ e o versor $\hat{\psi}$.
c) Com base nos resultados dos dois ítens anteriores, mostre, analiticamente, que o sistema é ortogonal se $a = b$; se $a \neq b$ os versores da base são ortogonais somente nos ponto onde $\psi = n\pi/2$, para $n = 0, 1, 2$ e 3.
d) Determine a representação matricial da métrica e mostre que no *caso particular* em que $a = b = 1$ adimensionais, a métrica é dada por:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, qual a interpretação geométrica da coordenada u? Essa expressão corresponde à métrica de qual sistema de coordenadas?

Questão 24

Como os resultados das questões 20 e 21 podem ser generalizados para n dimensões?

Questão 25

Dê as seguintes definições:

a) Forma diferencial definida positiva.

b) Espaço de Riemann.

c) Espaço Euclidiano.

Questão 26

Considere o caso de três dimensões. Quais sistemas de coordenadas possuem métrica correspondente a espaços de Riemann e a espaço Euclidiano. Explique.