F041 e F042 - Tópicos de Física Matemática I e II (Turma A)
FI263 - Tópicos de Física Teórica I (Turma B)

2º Semestre - 2014 Marcio José Menon

Capítulo 3

COMPONENTES CONTRAVARIANTES E COVARIANTES DE UM VETOR

• ÍNDICE

0. Objetivos e Plano Geral
1. Componentes de um Vetor numa Base Oblíqua Tridimensional
2. Bases Recíprocas - Componentes Contravariantes e Covariantes
3. Métrica e a Relação Geral entre as Componentes Contravariantes e Covariantes
4. Exemplos e Aplicações
5. Definição Geral de Vetor via Transformação de Coordenadas

0. Objetivos e Plano Geral

1. Componentes de um Vetor numa Base Oblíqua Tridimensional
- 1.1 O "Problema" Geométrico em Duas Dimensões
- 1.2 Abordagem Algébrica
  - 1.2.1 Formulação e Notação
  - 1.2.2 Resultado Algébrico

2. Bases Recíprocas - Componentes Contravariantes e Covariantes
- 2.1 Conceito e Definição de Bases Recíprocas
  - 2.1.1 Projeção Ortogonal e Notação
  - 2.1.2 Base Associada à Base Dada
    - a) Interpretação Geométrica
    - b) Relação Algébrica
    - c) Dimensões
  - 2.1.3 Relação Inversa
  - 2.1.4 Definição de Bases Recíprocas
  - 2.1.5 Propriedades Notáveis
    - a) Caso de Bases Ortonormais
    - b) Orientação das Bases
      - Quiralidade
      - Ângulo entre Vetores de Mesmo Índice
    - c) Volumes Associados aos Vetores das Bases
      - Produto Triplo Escalar
      - Expressões Gerais
      - Relação entre os Volumes
    - d) Aplicações em Cristalografia
- 2.2 Componentes de um Vetor
  - 2.2.1 Base Dada
  - 2.2.2 Base Recíproca
    - a) Notação
    - b) Resultado Algébrico
  - 2.2.3 Resumo e Comentários

2.2.4 Interpretações Geométricas em Duas Dimensões
a) Resultados Algébricos
b) Dimensões de Componentes e Vetores
c) Versores das Bases Dada e Recíproca
d) Projeções Paralelas (Componentes)
• Expressões Algébricas
• Diagrama Vetorial
e) Projeções Ortogonais
• Expressões Algébricas
• Diagrama Vetorial
f) Resumo e Comentário sobre Extensões das Projeções
2.3 Transformação Linear de Coordenadas - Componentes Contravariantes e Covariantes
2.3.1 Transformações Direta e Inversa (ou Contrária)
a) Base Retangular - Revisão
b) Bases Genéricas
• Notação para os Coeficientes da Transformação
• Expressão dos Coeficientes em Termos dos Vetores das Bases
• Resumo
2.3.2 Transformação das Componentes de um Vetor
a) Base Dada: Componentes Contravariantes
b) Base Recíproca: Componentes Covariantes
c) Resumo
d) Comentários sobre as Notações Covariante e Contravariante
• Consistência
• Significados da Palavra “Covariância”

3. Métrica e as Relações entre Componentes Contravariantes e Covariantes
3.1 Métricas Associadas às Bases Recíprocas
3.1.1 Sistema Curvilíneo Genérico - Revisão
3.1.2 Base Dada
3.1.3 Base Recíproca
3.2 Relações entre as Componentes
3.2.1 Covariantes em Termos das Contravariantes
3.2.2 Contravariantes em Termos da Covariantes
3.2.3 Representações Matriciais
3.3 Invariantes - Produto Escalar
3.3.1 Importância do Produto Escalar
3.3.2 Expressões Algébricas para o Produto Escalar
3.3.3 Quadrado do Elemento de Arco
3.3.4 Produtos Escalares dos Vetores das Bases - Resumo
3.4 Convenção da Soma (Einstein)

4. Exemplos e Aplicações
4.1 Sistema Genérico de Coordenadas
4.2 Coordenadas Retilíneas - Sistemas Oblíquos
4.3 Coordenadas Curvilíneas - Sistemas Ortonormais

5. Definição Geral de Vetor via Transformação de Coordenadas
5.1 Considerações Gerais
5.1.1 Resultados e Conceitos Básicos
5.1.2 Notação para as Componentes do Vetor Posição

5.1.3 Coeficientes das Transformação - Notação Contravariante
5.1.4 Extensão para n Dimensões
5.2 Definições
5.2.1 Vetores - Componentes Contravariantes e Covariantes
5.2.2 Escalares
5.3 Exemplos

• Referências Básicas

- A.I. Borisenko, I.E. Tarapov, *Vector and Tensor Analysis with Applications* (Dover, New York, 1979), caps. 1 e 2.

- J. Foster, J.D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity* (Springer, New York, 1998), cap. 1.

- W. Hauser, *Introduction to the Principles of Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 1966), cap. 1.

• **QUESTÕES PROPOSTAS**

1. Componentes de um Vetor numa Base Oblíqua Tridimensional

Questão 1
a) Considere duas bases de versores no plano, uma ortogonal e outra oblíqua, com origens coincidentes. Através de esquemas e desenhos, discuta as diferenças entre as projeções ortogonais e paralelas de um dado vetor nas duas bases.
b) Quais projeções correspondem às componentes do vetor nas bases? Justifique a resposta.

Questão 2
Esta questão trata de algumas propriedades úteis envolvendo matrizes, determinantes e sistemas de equações algébricas não homogêneas. Reveja a dedução das propriedades abaixo, consultando textos (elementares) de álgebra linear.

a) Determinantes e Matrizes
• Notação
- Matriz 3 x 3:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

- Determinante associado:

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

• Propriedades

(P1) Se duas linhas ou duas colunas de um determinante forem permutadas, o determinante troca de sinal.

(P2) Se A e B são duas matrizes quadradas, então $det\ [AB] = [det\ A][det\ B]$.

(P3) O determinante é invariante se qualquer linha e a coluna correspondente forem trocadas.

(P4) $det\ A$ = $det\ A^t$ (decorre de P3)

(P5) Os vetores corrrespondentes às colunas de uma matriz $A = (a_{ij})$ são linearmente dependentes (LD) se e somente se $det\ A = 0$; se $det\ A \neq 0$ são linearmente independentes (LI).

(P6) O produto triplo escalar de 3 vetores expressos em coordenadas retangulares obedece

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

e pode ser interpretado geométricamente como o módulo do volume de um paralelepípedo que possui os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ como lados e origem comum em um dos vértices.

(P7) Das propriedades P1 e P6:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

(permutações cíclicas)

(P8) Se $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ forem *não coplanares* (LI) então $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \neq 0$ (decorre de P4 e P5 e pode também ser demonstrada através da interpretação geométrica de P6: volume do paralelepípedo).

b) Sistemas de equações algébricas não homogêneas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

onde, x_1, x_2, x_3 são incógnitas e c_i, a_{ij}, $i,\ j$ = 1, 2, 3 são constantes dadas.

• Representação matricial $A|x\rangle = |c\rangle$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

• Soluções

- Método 1: Matriz Inversa

$$|x\rangle = A^{-1}|c\rangle, \qquad A^{-1} = \frac{(Cof\ A)^t}{det\ A},$$

onde $(Cof\ A) \equiv (c_{ij})$, sendo $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$ e m_{ij} (denominado *menor*), o determinante que se obtém eliminando-se a linha e a coluna correspondente a um dado elemento a_{ij} da matriz A.

- Método 2: Regra de Cramer

$$x_1 = \frac{1}{det\ A} \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{det\ A} \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{det\ A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}.$$

Questão 3

Considere a base retangular ortonormal $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ e uma base arbitrária *não ortogonal* de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ (base oblíqua: 3 vetores não coplanares), cada um com componentes na base retangular dadas por $v_{ix},\ v_{iy},\ v_{iz}, i = 1, 2, 3$. Seja $\vec{A}$ um dado vetor com componentes A_x, A_y, A_z na base retangular. Denote A^i, $i = 1, 2, 3$ as componentes de $\vec{A}$, não conhecidas, na base arbitrária $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$.

a) Monte o sistema correspondente de equações algébricas não homogêneas tendo como incógnitas A^i, $i = 1, 2, 3$.

b) Utilizando a *Regra de Cramer* e propriedades elementares de matrizes e determinantes (questão 2), mostre, <u>em</u> <u>detalhe</u>, que as componentes de $\vec{A}$ na base arbitrária são dadas por

$$A^i = \vec{A} \cdot \frac{\vec{v}_j \times \vec{v}_k}{\vec{v}_i \cdot (\vec{v}_j \times \vec{v}_k)}, \qquad i, j, k \text{ permutações cíclicas de } 1, 2, 3.$$

c) Resolva a questão do ítem anterior utilizando o *Método da Matriz Inversa* (questão 2).

2. Bases Recíprocas: Componentes Contravariantes e Covariantes

Questão 4

Com relação ao resultado da questão 3, considere a notação

$$\frac{\vec{v}_j \times \vec{v}_k}{\vec{v}_i \cdot (\vec{v}_j \times \vec{v}_k)} \equiv \vec{v}^{\,i}, \qquad i, j, k \text{ permutações cíclicas de } 1, 2, 3.$$

a) Quais as direções dos vetores $\vec{v}^{\,i},\ i = 1, 2, 3$, em relação aos vetores da base dada, $\vec{v}_i,\ i = 1, 2, 3$? Explique.

b) Determine algebricamente as projeções <u>ortogonais</u> dos vetores $\vec{v}^{\,i},\ i = 1, 2, 3$, nas direções dos vetores da base dada, demonstrando o seguinte resultado:

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}^{\,j} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

c) Com base no resultado do ítem enterior, mostre que os vetores da base dada podem ser expressos por

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{v}^{\,j} \times \vec{v}^{\,k}}{\vec{v}^{\,i} \cdot (\vec{v}^{\,j} \times \vec{v}^{\,k})}, \qquad i, j, k \text{ permutações cíclicas de } 1, 2, 3.$$

Questão 5
a) Dê a definição formal de *Bases Recíprocas*.
b) Qual a razão dessa denominação?

Questão 6
a) Mostre que os resultados das questões 3 e 4 (ítem c) podem ser expressos na forma

$$\vec{v}^{\,i} = \frac{\vec{v}_j \times \vec{v}_k}{V_d}, \qquad \vec{v}_i = \frac{\vec{v}^{\,j} \times \vec{v}^{\,k}}{V_r},$$

onde V_d e V_r são os volumes dos paralelepípedos gerados pelos vetores das bases dada e recíproca, respectivamente.
b) Mostre que

$$V_d = \frac{1}{V_r}.$$

Questão 7
Discuta algumas aplicações do conceito de bases recíprocas na descrição e no estudo das estruturas de cristais, através do fenômeno de difração (redes recíprocas). Consulte, por exemplo:
- C. Kittel, "Introduction to Solid State Physics", 7th ed. (John Wiley, 1996), Caps. 1 e 2;

Questão 8
Sejam $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ uma base genérica dada e $\{\vec{v}^{\,1}, \vec{v}^{\,2}, \vec{v}^{\,3}\}$ a base recíproca (ou dual) associada. Denotando A^i, $i = 1, 2, 3$ as componentes de um vetor $\vec{A}$ na base dada e A_i, $i = 1, 2, 3$ na base recíproca, demonstre os seguintes resultados:

a) As componentes de $\vec{A}$ na base dada (projeções paralelas) são expressas pelas projeções ortogonais de $\vec{A}$ nas direções dos vetores da base recíproca, $A^i = \vec{A} \cdot \vec{v}^{\,i}$, $i = 1, 2, 3$.
b) As componentes de $\vec{A}$ na base recíproca (projeções paralelas) são expressas pelas projeções ortogonais de $\vec{A}$ nas direções dos vetores da base dada, $A_i = \vec{A} \cdot \vec{v}_i$, $i = 1, 2, 3$.

Questão 9
Considere uma base oblíqua no plano $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ e um vetor $\vec{A}$.
a) Escolhendo uma posição no plano para a base dada acima, faça um esboço (desenho) dos <u>versores</u> associados à base dada e à sua base recíproca (utilize a definição de bases recíprocas).
b) Determine as expressões algébricas das componentes do vetor $\vec{A}$ nas duas bases de versores (dada e recíproca). Faça um esboço indicando essas componentes (projeções paralelas) no gráfico.
c) Repita o ítem anterior para as projeções ortogonais nas duas bases.
d) Faça uma tabela indicando as expressões algébricas das projeções paralelas (componentes) e ortogonais nas bases dada e recíproca (Tabela 1).
e) Demonstre através de diagramas as seguintes propriedades geométricas:
e1) As extensões das paralelas à base dada levam a projeções ortogonais na base recíproca;

projeções:	paralelas	ortogonais
base dada	$A^1 v_1$ e $A^2 v_2$	A_1/v_1 e A_2/v_2
base recíproca	$A_1 v^1$ e $A_2 v^2$	A^1/v^1 e A^2/v^2

Tabela 1: Questão 9 - Projeções paralelas e ortogonais de um vetor $\vec{A}$ nas bases dada $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ e recíproca $\{\vec{v}^{\,1}, \vec{v}^{\,2}\}$

e2) As projeções paralelas à base recíproca são extensões das projeções ortogonais à base dada.
f) Quais são as expressões algébricas correspondentes às propriedadas geométricas do ítem anterior?

Questão 10

Considere uma mudança de base

$$b: \ \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \quad \rightarrow \quad b': \ \{\vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}', \vec{v}_3{}'\}$$

com a seguinte notação:

- Transformação Direta

$$\vec{v}_i{}' = \sum_{j=1}^{3} \lambda^j_{i'} \vec{v}_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad |v'\rangle = \Lambda |v\rangle$$

- Transformação Inversa (ou Contrária) Geral

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda^{j'}_i \vec{v}_j{}', \quad i = 1, 2, 3, \quad |v\rangle = \Lambda^{-1} |v'\rangle$$

a) A partir da definição de bases recíprocas, mostre que pode-se expressar:

$$\lambda^j_{i'} = \vec{v}_i{}' \cdot \vec{v}^{\,j} \quad \text{e} \quad \lambda^{j'}_i = \vec{v}_i \cdot \vec{v}^{\,j\,\prime}.$$

b) Mostre que as componentes de um vetor $\vec{A}$ na base dada transformam-se como

$$A'^{\,i} = \sum_{j=1}^{3} \lambda^{i'}_j A^j, \quad i = 1, 2, 3.$$

c) Mostre que as componentes de um vetor $\vec{A}$ na base recíproca transformam-se como

$$A'_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda^j_{i'} A_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

d) As componentes de um vetor $\vec{A}$ na base dada e na base recíproca são denominadas *contravariantes* e *covariantes*, respectivamente. Qual a razão dessas denominações?

Questão 11

Mostre que na mudança de base da questão anterior, os vetores da base recíproca transformam-se como

$$\vec{v}^{\,\prime i} = \sum_{j=1}^{3} \lambda^{i'}_j \vec{v}^{\,j}.$$

Questão 12
a) Nas notações covariante e contravariante associa-se índices às grandezas envolvidas, "em baixo" e "em cima", respectivamente. Essas notações são consistentes em todos os casos tratados envolvendo componentes de um vetor e vetores das bases dada e recíproca? Explique.
b) Discuta 3 significados usuais da palavra "covariância" na Física .

3. Métrica e as Relações Gerais entre Componentes Contravariantes e Covariantes

Questão 13
Reveja o conceito e definição de Métrica (capítulo 1).

Questão 14
Discuta os argumentos que levam às seguintes expressões da métrica associada a uma base dada, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e a sua base recíproca, $\{\vec{v}^{\,1}, \vec{v}^{\,2}, \vec{v}^{\,3}\}$:

$$g_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j \quad \text{(dada)}, \qquad g^{ij} = \vec{v}^{\,i} \cdot \vec{v}^{\,j} \quad \text{(recíproca)}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Questão 15
Mostre que as componentes covariantes e contravariantes de um dado vetor não são independentes, mas correlacionadas através da métrica. Para tanto, considere um vetor $\vec{A}$ e demonstre as seguintes relações:

$$A^j = \sum_{i=1}^{3} g^{ij} A_i, \qquad A_j = \sum_{i=1}^{3} g_{ij} A^i, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Questão 16
Sejam dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e uma base genérica $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Considerando as componentes contravariantes e covariantes desses vetores obtenha todas as expressões possíveis para o produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

Questão 17
a) Explique o que significa *Convenção da Soma*.
b) Reescreva os resultados das questões 15 e 16 utilizando a convenção da soma.

4. Exemplos e Aplicações

Questão 18
Considere uma base oblíqua bidimensional de versores $\hat{v}_1$ e $\hat{v}_2$, formando entre si um ângulo $\theta = \pi/3$ radianos e um vetor $\vec{R}$ no plano dos versores, com componentes R^1 e R^2 nessa base dada (portanto, contravariantes).

a) Escolhendo um segmento orientado para representar $\vec{R}$ (que não coincida com as direções dos versores da base), faça um diagrama vetorial indicando $\vec{R}$, a base $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$ e as projeções paralelas de $\vec{R}$ nessa base, com as expressões algébricas correspondentes. Explique.

b) Determine as representações matriciais da métrica associada à base dada e à recíproca.

c) Determine as componentes covariantes de $\vec{R}$, denotadas R_1 e R_2.

d) Determine os módulos, as direções e os sentidos dos vetores da base recíproca $\vec{v}^{\,1}$ e $\vec{v}^{\,2}$.

e) Determine as projeções paralelas de $\vec{R}$ na base recíproca e faça um diagrama vetorial indicando as projeções e expressões algébricas correspondentes.

Questão 19

Considere uma base oblíqua tridimensional de vetores, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e que os vetores $\vec{v}_i = h_i\hat{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, na base retangular $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, possuem as seguintes decomposições:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= 3\hat{x} - 4\hat{y} = (3, -4, 0), \\ \vec{v}_2 &= 3\hat{y} + 4\hat{z} = (0, 3, 4), \\ \vec{v}_3 &= -\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z} = (-1, 1, 2). \end{aligned}$$

Considere também um vetor $\vec{A}$, expresso na base retangular por

$$\vec{A} = 5\hat{x} - 3\hat{y} + 8\hat{z} = (5, -3, 8).$$

a) Considerando como referência os eixos retangulares, com escalas numéricas, faça um esboço (desenho) da base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e outro do vetor $\vec{A}$.
b) Determine os vetores da base recíproca, $\{\vec{v}^{\,1}, \vec{v}^{\,2}, \vec{v}^{\,3}\}$ (ou seja, as expressões desses vetores na base retangular). Resposta:

$$\vec{v}^{\,1} = \frac{2\hat{x} - 4\hat{y} + 3\hat{z}}{22}, \quad \vec{v}^{\,2} = \frac{8\hat{x} + 6\hat{y} + \hat{z}}{22}, \quad \vec{v}^{\,3} = \frac{-16\hat{x} - 12\hat{y} + 9\hat{z}}{22}.$$

c) Determine as componentes contravariantes e covariantes de $\vec{A}$ e expresse $\vec{A}$ nas bases dada e recíproca. Resposta:

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A^i\vec{v}_i = \frac{23}{11}\vec{v}_1 + \frac{15}{11}\vec{v}_2 + \frac{14}{11}\vec{v}_3, \qquad \vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i\vec{v}^{\,i} = 27\vec{v}^{\,1} + 23\vec{v}^{\,2} + 8\vec{v}^{\,3}$$

d) Determine as projeções paralelas de $\vec{A}$ na base dada e na base recíproca. Resposta:

$$\begin{aligned} &\text{Dada}: \ A^1v_1 = \frac{115}{11}, \quad A^2v_2 = \frac{75}{11}, \quad A^3v_3 = \frac{14\sqrt{6}}{11} \\ &\text{Recíproca}: \ A_1v^1 = \frac{27\sqrt{29}}{22}, \quad A_2v^2 = \frac{23\sqrt{101}}{22}, \quad A_3v^3 = \frac{4\sqrt{481}}{11}. \end{aligned}$$

Questão 20

Considerando o enunciado e resultados da questão anterior, responda as questões que seguem.
a) Determine a representação matricial da métrica, nas formas covariante, (g_{ij}) e contravariante, (g^{ij}). Resposta:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 25 & -12 & -7 \\ -12 & 25 & 11 \\ -7 & 11 & 6 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \frac{1}{484}\begin{pmatrix} 29 & -5 & 43 \\ -5 & 101 & -191 \\ 43 & -191 & 481 \end{pmatrix}.$$

b) A partir das componentes contravariantes de $\vec{A}$ (ítem (c) da questão anterior) e utilizando a representação matricial da métrica, determine as componentes covariantes correspondentes. Resposta: mesma do ítem (c) da questão 19.
c) A partir das componentes covariantes de $\vec{A}$ (ítem (c) da questão anterior) e utilizando a representação matricial da métrica, determine as componentes contravariantes correspondentes. Resposta: mesma do ítem (c) da questão 19.

Questão 21

Esta é uma questão preparatória para as questões 22 e 23, as quais tratam de um sistema de coordenandas curvilíneas ortonormais.

Considere o sistema de coordenadas cilíndricas ρ, φ e z no contexto estudado de uma base genérica dada,

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}, \quad \vec{v}_i = h_i \hat{v}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

a) Denotando os vetores da base $\vec{v}_1 = \vec{v}_\rho$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_\varphi$ e $\vec{v}_3 = \vec{v}_z$, mostre que no sistema cilíndrico temos como base dada:

$$\{\vec{v}_\rho, \vec{v}_\varphi, \vec{v}_z\} = \{\hat{\rho}, \rho\,\hat{\varphi}, \hat{z}\}.$$

b) Mostre que, na base retangular, os vetores acima são dados por

$$\begin{aligned} \vec{v}_\rho &= (\cos\,\varphi, \operatorname{sen}\varphi, 0) \\ \vec{v}_\varphi &= (-\rho \operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\,\varphi, 0) \\ \vec{v}_z &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

c) Mostre que o vetor posição $\vec{r}$ pode ser expresso na base retangular em termos das coordenadas cilíndricas, na forma

$$\vec{r} = (\rho\cos\,\varphi, \rho \operatorname{sen}\varphi, z) = \vec{r}(\rho, \varphi, z).$$

Questão 22

Considere a base $\{\vec{v}_\rho, \vec{v}_\varphi, \vec{v}_h\}$ e o vetor $\vec{r}$ da questão anterior.

a) Mostre que os vetores da base recíproca são dados por:

$$\{\vec{v}^\rho, \vec{v}^\varphi, \vec{v}^z\} = \{\hat{\rho}, \frac{1}{\rho}\,\hat{\varphi}, \hat{z}\}.$$

e na base retangular,

$$\vec{v}^\rho = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, 0), \quad \vec{v}^\varphi = (\frac{-\operatorname{sen}\varphi}{\rho}, \frac{\cos\varphi}{\rho}, 0), \quad \vec{v}^z = (0, 0, 1).$$

b) Denotando $r^i,\ i = 1, 2, 3$ as componentes contravariantes de $\vec{r}$, mostre que são dadas por

$$r^1 = \rho,\ r^2 = 0,\ r^3 = z,$$

de modo que, na base dada:

$$\vec{r} = \rho\vec{v}_\rho + z\vec{v}_z \quad (= \rho\hat{\rho} + z\hat{z}).$$

c) Denotando $r_i,\ i = 1, 2, 3$ as componentes covariantes de $\vec{r}$, mostre que são dadas por

$$r_1 = \rho,\ r_2 = 0,\ r_3 = z,$$

de modo que, na base recíproca:

$$\vec{r} = \rho\vec{v}^\rho + z\vec{v}^z \quad (= \rho\hat{\rho} + z\hat{z}).$$

d) Mostre que as projeções paralelas de $\vec{r}$ na base dada são

$$r^1 v_\rho = \rho,\ r^2 v_\varphi = 0,\ r^3 v_z = z$$

e na base recíproca,

$$r_1 v^\rho = \rho,\ r_2 v^\varphi = 0,\ r_3 v^z = z.$$

e) Essas projeções paralelas coincidem com as ortogonais? Explique a razão.

Questão 23

Com base nos resultados das duas questões anteriores, responda as questões que seguem.
a) Mostre que a representação matricial da métrica nas formas covariante e contravariante são dadas por:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) A partir das componentes contravariantes de $\vec{r}$ (questão 22, ítem b) e utilizando a representação matricial da métrica (ítem anterior), determine as componentes covariantes correspodentes. Resposta: mesma do ítem c da questão 22.
c) A partir das componentes covariantes de $\vec{r}$ (questão 22, ítem c) e utilizando a representação matricial da métrica (ítem anterior), determine as componentes contravariantes correspodentes. Resposta: mesma do ítem b da questão 22.

Questão 24

Resolva as questões 21, 22 e 23 considerando o sistema de coordenadas esféricas.

5. Definição Geral de Vetor via Transformação de Coordenadas

Questão 25

Denote x^i, x_i, $i = 1, 2, 3$ as componentes contravariantes e covariantes, respectivamente, do vetor posição $\vec{r}$ num sistema arbitrário de coordenadas. Mostre que numa transformação linear de coordenadas (mudança de base),

$$b: \ \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \quad \rightarrow \quad b': \ \{\vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}', \vec{v}_3{}'\},$$

as componentes contravariantes e covariantes transformam-se, respectivamente, como:

$$x'^{\,i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^j} x^j, \qquad x_i' = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\,i}} x_j.$$

Questão 26

Dê as definições de componentes covariantes e contravariantes de um vetor, via transformação geral de coordenadas.

Questão 27

a) Considere o vetor deslocamento diferencial $d\vec{r}$ e a transformação vetorial nabla $\vec{\nabla}$. Numa transformação de coordenadas as componentes desses vetores transformam-se de forma covariante ou contravariante? Justifique a resposta.
b) A notação

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

é consistente? Explique.

Questão 28

Considere uma transformação de coordenadas retangulares x, y, z para curvilíneas v^1, v^2, v^3:

$$x^1 = x, \ \ x^2 = y, \ \ x^3 = z \quad \Longrightarrow \quad x'^{\,1} = v^1, \ \ x'^{\,2} = v^2, \ \ x'^{\,3} = v^3,$$

$$v^i = v^i(x, y, z), \quad i = 1, 2, 3$$

e seja $\vec{r} = \vec{r}(v^1, v^2, v^3)$ o vetor posição de um ponto de uma curva no espaço.

a) No capítulo 1, vimos que para ijk PC de 123, a curva v^i é determinada pela intersecção das superfícies coordenadas v^j constante e v^k constante. Mostre que os vetores $\partial\vec{r}/\partial v^i$ são tangentes às curvas v^i, $i = 1, 2, 3$, respectivamente e portanto formam uma base (denominada base dada ou base natural).

b) Mostre que os vetores $\partial\vec{r}/\partial v^i$ transformam-se de modo covariante, o que justifica a notação para a base dada (ou natural):

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v^i} = \vec{v}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

onde $\vec{v}_i = h_i\hat{v}_i$.

Questão 29

a) No caso da questão anterior, mostre que

$$dv^i = \vec{\nabla}v^i \cdot d\vec{r}, \quad i = 1, 2, 3,$$

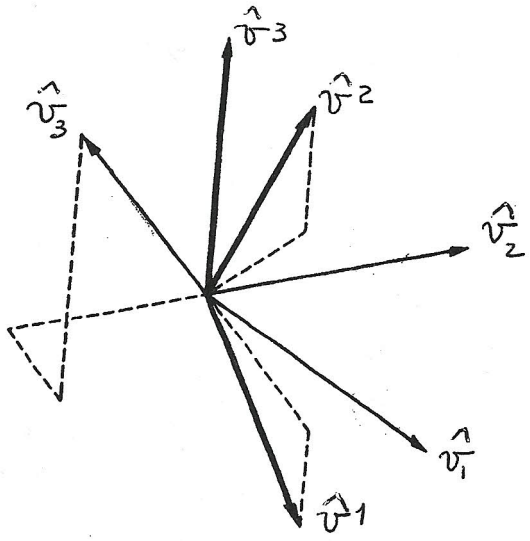
onde $\vec{\nabla}v^i$ é o gradiente do campo escalar $v^i = v^i(x, y, z)$ e $d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$. Interprete geométricamente a relação acima, mostrando que $\vec{\nabla}v^i$ é normal à superfície coordenada v^i constante, $i = 1, 2, 3$.

b) Mostre que os vetores $\vec{\nabla}v^1$, $\vec{\nabla}v^2$ e $\vec{\nabla}v^3$ constituem uma base que é recíproca da base dada ou natural $\{\partial\vec{r}/\partial v^1, \partial\vec{r}/\partial v^2, \partial\vec{r}/\partial v^3\}$, o que justifica a notação para a base recíproca ou dual:

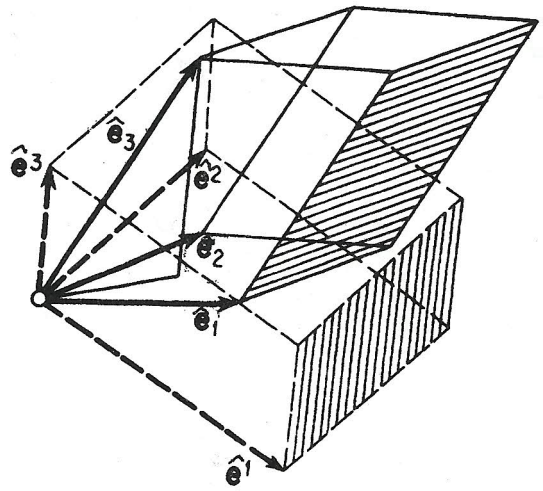
$$\vec{\nabla}v^i = \vec{v}^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Questão 30

Estude as seções 1.0 a 1.4 do livro *A Short Course in General Relativity*, de J. Foster e J.D. Nightingale e faça os exercícios correspondentes às seções.



Hauser



Borisenko - Tarapov