F041 e F042 - Tópicos de Física Matemática I e II (Turma A)
FI263 - Tópicos de Física Teórica I (Turma B)

2º Semestre - 2014 Marcio José Menon

Capítulo 4 INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE TENSORES

• ÍNDICE

1. Resultados Básicos em Espaços de Dimensão 3
2. Tensores de Ordem N em Espaços de Dimensão 3
3. Tensores de Ordem N em Espaços de Dimensão n
4. Exemplos e Aplicações
5. Operações Básicas com Tensores

1. Resultados Básicos em Espaços de Dimensão 3
- 1.1 Operadores e Vetores - Revisão
  - 1.1.1 Definição de Operador no Espaço Euclidiano
  - 1.1.2 Definição Geral de Vetor
- 1.2 Leis de Transformação para os Produtos das Componentes de um Vetor
  - 1.2.1 Produtos de Duas Componentes
    - a) Notação
    - b) Expressões Algébricas
    - c) Comparação com a Definição de Operador
  - 1.2.2 Produtos de Três ou Mais Componentes
- 1.3 Ordenação

2. Tensores de Ordem N em Espaços de Dimensão 3
- 2.1 Lei de Transformação e Ordem do Tensor
- 2.2 Ordem 0 (escalares)
- 2.3 Ordem 1 (vetores)
- 2.4 Ordem 2
- 2.5 Ordem Superior a 2
  - 2.5.1 Notação para Tensores Mistos
  - 2.5.2 Exemplos

3. Tensores de Ordem N em Espaços de Dimensão n
- 3.1 Conceito Geral
- 3.2 Exemplos em Diferentes Dimensões
- 3.3 Tensores de Ordem N Tipo (p,q)
- 3.4 Campos Tensoriais

4. Exemplos e Aplicações
- 4.1 Tensores de Ordem 2 em Espaços de Dimensão n
  - 4.1.1 Tensor Métrico
    - a) Métrica Associada à Base Dada (covariante)
    - b) Métrica Associada à Base Recíproca (contravariante)
  - 4.1.2 Tensor Delta de Kronecker (misto)

4.2 Tensores Cartesianos em Espaços de Dimensão 3
4.2.1 Tensores Cartesianos
4.2.2 Tensor Momento de Inércia (Ordem 2)
a) Momento de Inércia
• Uma Partícula
• Distribuições Discretas e Contínuas de Massa
b) Lei de Transformação - Tensor de Ordem 2
4.2.3 Expansão de Multipolos
a) Expressão Geral
• Potencial Elétrico de uma Carga Puntual
• Potencial de uma Distribuição (Contínua) de Cargas
b) Momento de Monopolo (Ordem 0)
c) Momento de Dipolo (Ordem 1)
d) Momento de Quadrupolo (Ordem 2)
e) Momento de Octupolo (Ordem 3)
f) Expansão Tensorial

5. Operações Básicas com Tensores
5.1 Adição e Subtração
5.2 Propriedades de Simetria
5.3 Multiplicação de Tensores
5.3.1 Produto Exterior
5.3.2 Contração
5.3.3 Produto Interior
a) Definição e Exemplos
f) Tensores Associados
5.4 Lei do Quociente
5.5 Invariância das Equações Tensoriais

• **Referências**

- A.I. Borisenko, I.E. Tarapov, *Vector and Tensor Analysis with Applications* (Dover, New York, 1979), caps. 2 e 3.

- J. Foster, J.D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity*, 2nd edition (Springer, 1998), cap. 1.

- M.R. Spiegel, *Análise Vetorial* (McGraw-Hill, São Paulo, 1974), cap. 8.

- David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edition (Person Education, New Jersey, 1999), seção 3.4.

• **QUESTÕES PROPOSTAS**

1. Resultados Básicos em Espaços de Dimensão 3

Questão 1

Revise os conceitos associados à definição de operadores via transformação de coordenadas, no caso de espaço euclidiano (cap. 2). Na relação de similaridade, considere o caso geral, com a matriz inversa e obtenha a lei de transformação dos elementos de matriz correspondentes.

Questão 2

No capítulo anterior vimos que numa mudança de uma *base genérica* em 3 dimensões,

$$b: \ \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \quad \rightarrow \quad b': \ \{\vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}', \vec{v}_3{}'\},$$

define-se as componentes contravariantes e covariantes de um vetor pelas seguintes leis de transformação (convenção da soma, $i, j = 1, 2, 3$):

$$V'^i = \lambda^{i'}_j V^j \ \ (\text{contravariantes}) \quad \text{e} \quad V'_i = \lambda^j_{i'} V_j \ \ (\text{covariantes}),$$

onde, em termos das componentes contravariantes do vetor posição,

$$\lambda^{i'}_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \quad \text{e} \quad \lambda^j_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}.$$

Denotando os 4 produtos possíveis envolvendo as componentes covariantes e contravariantes pelos símbolos:

$$V^i V^j \equiv V^{ij}, \qquad V_i V_j \equiv V_{ij}, \qquad V^i V_j \equiv V^i_j, \qquad V_i V^j \equiv V^j_i,$$

determine as leis de transformação dessas quantidades.

Questão 3

Qual (quais) resultado (s) da questão anterior corresponde (m) à definição de operador, revisada na questão 1? Justifique a resposta.

2. Tensores de Ordem N em Espaços de Dimensão 3

Questão 4

Dê as definições de tensores de ordem 0, 1, 2 e 3 em espaços de dimensão 3.

Questão 5

Com relação à resposta da questão anterior, quais tensores possuem representações matriciais? Explique, indicando o tipo (ordem) das matrizes correspondentes.

Questão 6

Uma matriz quadrada sempre representa um tensor de ordem 2? Explique.

Questão 7
a) Num espaço de dimensão 3, quantos elementos possuem as componentes de um tensor de ordem 5?
b) Escreva a lei de transformação (definição) de um tensor misto de ordem 5, covariante de ordem 3 e contravariante de ordem 2.

3. Tensores de Ordem N em Espaços de Dimensão n

Questão 8
a) Discuta a generalização da questão 4 para espaços de dimensão n. Comente alguns exemplos nos casos de $n = 1, 2, 3$ e 4.
b) Num espaço de dimensão 4, escreva a lei de transformação de um tensor de ordem 5 tipo (2,3). Qual o número de elementos desse tensor?

4. Exemplos e Aplicações

Questão 9
Considere uma base genérica

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}.$$

a) Mostre que os coeficientes métricos da base,

$$g_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j, \quad i, j = 1, 2, ..., n$$

constituem as componentes de um tensor covariante de ordem 2.
b) Mostre que os coeficientes métricos da base recíproca,

$$g^{ij} = \vec{v}^i \cdot \vec{v}^j \quad i, j = 1, 2, ..., n$$

constituem as componentes de um tensor contravariante de ordem 2.

Questão 10
A partir da definição de bases recíprocas, mostre que o delta de Kronecker é um tensor misto de ordem 2, covariante de ordem 1 e contravariante de ordem 1 (tensor isotrópico).

Questão 11
Explique o que são *Tensores Cartesianos* e qual a propriedade notável a eles associada.

Questão 12
Considere uma partícula de massa m e velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a um eixo de direção arbitrária e que passa pela origem o de um sistema de coordenadas retangulares. Seja $\vec{r}$ o vetor posição da partícula em relação à origem o.
a) Mostre que a relação vetorial geral entre o momento angular $\vec{L}$ e velocidade angular $\vec{\omega}$ da partícula é dada por:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} - m\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})$$

b) O momento angular $\vec{L}$ é paralelo a $\vec{\omega}$? Explique.

Questão 13
a) Utilizando coordenadas retangulares, mostre que as componentes retangulares da equação vetorial da questão anterior são dadas por

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j, \qquad i = 1, 2, 3,$$

onde

$$I_{ij} = mr^2\delta_{ij} - mx_ix_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

são os elementos do momento de inércia da partícula em relação à origem o.
b) Mostre que no caso de uma distribuição contínua de massa os elementos acima são dados por:

$$I_{ij} = \int \{\delta_{ij}r^2 - x_ix_j\}dm, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Questão 14
Demonstre, em detalhe que o momento de inércia de um corpo, expresso em coordenadas retangulares, constitui um Tensor de Ordem 2 (covariante).

Questão 15
Esta é uma questão preparatória para as questões 16 a 20. Reveja os conceitos e propriedades relacionadas com a *Expansão Multipolar do Potencial Eletrostático*. Consulte, por exemplo, D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edition, Sect. 3.4.

Questão 16.
Sejam $\vec{R}$ e $\vec{r}$ dois vetores com origem comum, θ o menor ângulo que formam entre si. Mostre que o inverso do módulo do vetor relativo pode ser expresso na forma:

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \frac{1}{R}\sum_{N=0}^{\infty} P_N(\cos\theta)\left[\frac{r}{R}\right]^N,$$

onde P_N são os polinômios de Legendre.

Questão 17.
a) Mostre que para uma distribuição contínua de cargas o potencial num ponto $\vec{R}$, fora da distribuição, pode ser expresso na forma:

$$V(\vec{R}) = k\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{R^{N+1}}\int P_N(\cos\theta)\, r^N\, dq,$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição do elemento de carga dq e θ o menor ângulo entre $\vec{R}$ e $\vec{r}$;
b) Obtenha a expressão explícita dos termos da série correspondentes a $N = 0$ (monopolo) $N = 1$ (dipolo) $N = 2$ (quadrupolo) e $N = 3$ (octupolo).

Questão 18.

Com base nos resultados da questão anterior, mostre que:
a) vetorialmente, o termo de dipolo pode ser expresso na forma

$$V_{dip}(\vec{R}) = \frac{k}{R^2}\,\hat{R}\cdot\vec{p},$$

onde

$$\vec{p} = \int \vec{r}dq$$

é o Momento de Dipolo da Distribuição de Cargas;
b) em coordenadas retangulares, $\vec{R} = (X_1, X_2, X_3)$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, o termo de dipolo pode ser expresso na forma

$$V_{dip}(\vec{R}) = \frac{k}{R^2}\sum_{i=1}^{3}\frac{X_i}{R}Q_i,$$

onde

$$Q_i = \int x_i\,dq, \qquad i = 1, 2, 3$$

são as componentes do Momento de Dipolo da Distribuição de Cargas.

Questão 19.

Mostre que em coordenadas retangulares:
a) o termo de quadrupolo pode ser expresso na forma

$$V_{qua}(\vec{R}) = \frac{k}{R^3}\,\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{X_i}{R}\frac{X_j}{R}\,Q_{ij},$$

onde

$$Q_{ij} = \int [3x_ix_j - \delta_{ij}r^2]dq, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

são as componentes do Momento de Quadrupolo da Distribuição de Cargas;
b) o termo de octupolo pode ser expresso na forma

$$V_{oct}(\vec{R}) = \frac{k}{R^4}\,\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{X_i}{R}\frac{X_j}{R}\frac{X_k}{R}\,Q_{ijk},$$

onde

$$Q_{ijk} = \int [x_ix_jx_k - 3r^2\,\delta_{jk}\,x_i\,]dq, \qquad i, j, k = 1, 2, 3$$

são as componentes do Momento de Octupolo da Distribuição de Cargas.

Questão 20
a) No caso da expansão de multipolos (questões anteriores), mostre que o momento de monopolo é um tensor de ordem 0 e que o momento de dipolo, expresso em coordenadas retangulares, é um tensor de ordem 1 (covariante).
b) Mostre que os momentos de quadrupolo e de octupolo, expressos em coordenadas retangulares, são tensores de ordem 2 e 3, respectivamente (covariantes).

5. Operações Básicas com Tensores

Questão 21
Sejam A_i^{jk} e B_i^{jk} tensores. Mostre que o resultado das seguintes operações constitui também um tensor. Em cada caso, qual a ordem e o tipo do tensor resultante?
a) $A_i^{jk} + B_i^{jk}$.
b) $A_i^{jk} B_l^{mn}$ (produto exterior).

Questão 22
Mostre que um tensor A^{ij} pode ser expresso como a soma de dois tensores, um simétrico e outro anti-simétrico em relação ao par de índices.

Questão 23
Mostre que a contração do produto exterior (produto interior) de dois tensores A^i e B_j é um invariante.

Questão 24
Mostre que se um tensor A_{ij}^{klm} é simétrico (anti-simétrico) em relação aos índices k e l num sistema de coordenadas, então ele também é simétrico (anti-simétrico) em relação aos mesmos índices numa transformação de coordenadas.