**F415 - MECÂNICA GERAL II**

Turma C 1º Semestre - 2014 Márcio José Menon

# 0. INTRODUÇÃO GERAL

## • ÍNDICE


A. Mecânica Vetorial e Mecânica Analítica
B. Formalismo de Lagrange
C. Formalismo de Hamilton
D. Movimento de Uma Partícula em Uma Dimensão

**A. Mecânica Vetorial e Mecânica Analítica**

**B. Formalismo de Lagrange**
B.1 Dois Caminhos
B.2 Conceitos Básicos
B.2.1 Vínculos e Número de Graus de Liberdade
B.2.2 Coordenadas e Velocidades Generalizadas
• Sistema
• Coordenadas Generalizadas
• Velocidades Generalizadas
B.2.3 Energia Cinética Generalizada
• Expressão Geral
• Resultado Fundamental
B.3 Equacões de Lagrange
B.3.1 Princípio de Hamilton
B.3.2 Lagrangiana
B.3.3 Equacões de Euler-Lagrange
B.4 Momento Canônico e Função Energia
B.4.1 Momento Canônico
• Momento Generalizado
• Momento Canônico
• Equações de Lagrange
B.4.2 Função Energia e Energia Mecânica
• Função Energia
• Energia Mecânica
B.5 Integrais Primeiras e Leis de Conservação
B.5.1 Integrais Primeiras ou Integrais de Movimento
B.5.2 Conservação do Momento Canônico
• Enunciado
• Implicações Físicas
B.5.3 Conservação da Função Energia
• Caso Geral
• Conservação da Energia Mecânica

B.5.4 Simetrias e Leis de Conservação
- Leis de Conservação
- Simetrias
- Resumo e Conclusões

**C. Formalismo de Hamilton**

C.1 Hamiltoniana: Conceito e Definição
C.1.1 Idéia Básica
C.1.2 Procedimento
C.1.3 Hamiltoniana
C.1.4 Energia Mecânica
C.2 Equações Canônicas do Movimento

**D. Movimento de Uma Partícula em Uma Dimensão**

D.1 Motivação e Objetivos
D.2 Equações de Lagrange
D.3 Integrais Primeiras
D.3.1 Momento Canônico
D.3.2 Função Energia
- Conservação da Energia Mecânica
- Procedimento Formal

D.4 Movimentos Possíveis
D.4.1 Idéia e Importância
D.4.2 Bases do Método
D.4.3 Expansão do Potencial - Período para Pequenas Oscilações
Obs: Formalismo de Hamilton

**Referências**: Marion-Thornton Cap. 7, Goldstein Caps. 1 e 2.

-Referência sugerida: Sharon B. McGrayne, "Mulheres que ganharam o Prêmio Nobel em Ciências" (Marco Zero, 1994), Capítulo 4 Emmy Noether.

## • QUESTÕES PROPOSTAS

### B. Formalismo de Lagrange

**Questão 1**

A energia cinética de um sistema de $n$ partículas de massas $m_\alpha$, $\alpha = 1, 2, ..., n$, em coordenadas retangulares $x_{\alpha,i}$, $i = 1, 2, 3$, é dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{3} m_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}^2.$$

Considere uma transformação das coordenadas retangulares para coordenadas generalizadas $q_j$, $j = 1, 2, ..., s$ onde $s$ é o número de graus de liberdade do sistema. De forma

compacta, representa-se a transformação de coordenadas por

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t).$$

a) Determine as expressões das velocidades $\dot{x}_{\alpha,i}$ em termos das coordenadas e velocidades generalizadas.
b) Obtenha a expressão da energia cinética generalizada do sistema.

**Questão 2**

Com base na expressão da energia cinética generalizada da questão anterior:
a) identifique a dependência de cada termo com as velocidades generalizadas;
b) em qual situação a expressão geral de $T$ se reduz ao termo quadrático nas velocidades generalizadas? Explique.
c) mostre que no caso do ítem anterior, a seguinte relação é verificada:

$$\sum_{l=1}^{s} \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2T.$$

**Questão 3**

a) Explique a origem do conceito e dê a definição de Momento Canônico.
b) Expresse as equações de Lagrange em termos dos Momentos Canônicos.

**Questão 4**

a) Derivando $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ em relação ao tempo e utilizando as equações de Lagrange, mostre que

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

b) Discuta a origem do conceito e dê a definição da Função Energia de um sistema, $h = h(q_j, \dot{q}_j, t)$. Qual a relação entre as derivadas temporais de $h$ e de $L$?
c) Sob quais condições a Função Energia é a Energia Mecânica do Sistema (cinética mais potencial)? Justifique a resposta.

**Questão 5**

a) O que são Integrais Primeiras ou Integrais de Movimento?
b) Sob quais condições o Momento Canônico é uma Integral de Movimento?
c) Repita o ítem (b) para a Função Energia $h$.
d) Repita o ítem (b) para a Energia Mecânica $E$.

**Questão 6**

a) O que é uma Coordenada Cíclica ou Ignorável?
b) Enuncie a Lei de Conservação do Momento Canônico em termos do conceito de Variável Cíclica. Explique.
c) Discuta a Lei de Conservação do Momento Canônico no caso de coordenadas cíclicas lineares e angulares.

**Questão 7**

Considerando o Momento Canônico e a Função Energia, discuta os conceitos de Simetrias, Invariâncias e Leis de Conservação. Faça um esquema resumido das condições e conclusões.

**C. Formalismo de Hamilton**

**Questão 8**

a) A Função Energia é a Hamiltoniana de um sistema? Explique.
b) Sob quais condições a Hamiltoniana corresponde à Energia Mecânica de um sistema?
c) Diferenciando $H = H(q_j, p_j, t)$ e $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ e comparando os coeficientes, demonstre as equações de movimento de Hamilton (equações canônicas):

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad k = 1, 2, ...., s.$$

Obtenha também, a relação entre as derivadas temporais total e parcial de $H$.
d) Qual a diferença matemática essencial entre as equações de movimento de Hamilton e de Lagrange?

**D. Movimento de uma Partícula em Uma Dimensão**

**Questão 9**

Considere uma partícula de massa $m$ movendo-se em uma dimensão (eixo $x$) e submetida a uma energia potencial $U(x)$. Explique e discuta o método formal de obtenção da equação paramétrica do movimento, $x = x(t)$, através das seguintes abordagens:
a) Equações de Lagrange;
b) Integrais primeiras do movimento.

**Questão 10**

Para o sistema da questão anterior, considere que $x_0$ é um ponto de equilíbrio estável da energia potencial $U(x)$. Justificando a resposta em detalhe, determine o período para pequenas oscilações da partícula em torno do ponto $x_0$.