F 415 Mecânica Geral - Turma C - 1º Semestre 2014

Márcio José Menon

0. INTRODUÇÃO GERAL

(revisão resumida e notação para F415)

A. Mecânica Vetorial e Mecânica Analítica

B. Formalismo de Lagrange

C. Formalismo de Hamilton

D. Movimento de Uma Partícula em Uma Dimensão

A. Mecânica Vetorial e Mecânica Analítica

- **Vetorial**:

Newton - *Principia* (1687) + notação vetorial Gibbs-Heaviside (1890)

dinâmica: $\vec{F} \Longrightarrow$ cinemática: $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

- **Analítica**:

Leibniz (1686, 1695), Euler (1744), Lagrange (1788), Hamilton (1833), Jacob (1837), Noether (1918)

dinâmica: $U \Longrightarrow$ cinemática: T

$$L = T - U \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right] = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \qquad j = 1, 2, 3, ..., s.$$

(Obs: Newton/Leibniz $\Rightarrow$ Noether: $\sim$ 230 anos $\Rightarrow$ F315/F415!!!)

B. Formalismo de Lagrange

B.1 Dois Caminhos

B.2 Conceitos Básicos

B.3 Equações de Lagrange

B.4 Momento Canônico e Função Energia

B.5 Integrais Primeiras e Leis de Conservação

B.1 Dois Caminhos

• Newton → deslocamentos virtuais / Princípio de D'Alembert → equações de Lagrange (Goldstein, Cap. 1, Symon, Cap. 9 - tema trabalho)

• Princípio de Hamilton → cálculo variacional (Euler) → equações de Lagrange (Marion-Thornton, Caps 6 e 7)

B.2 Conceitos Básicos

B.2.1 Vínculos e Número de Graus de Liberdade

B.2.2 Coordenadas e Velocidades Generalizadas

B.2.3 Energia Cinética Generalizada

B.2.1 Vínculos e Número de Graus de Liberdade

Vínculos: restrições ao movimento $\rightarrow$ expressos por equações de vínculo.

NGL: É o número de coordenadas independentes necessárias e suficientes para especificar a posição de um sistema = (número total de coordenadas) menos (número de equações de vínculo):

$$s = N - m$$

* Exemplo: Movimento de uma partícula

- Livre no espaço: N = 3 (x, y, z ou r, θ, ϕ ou ρ, ϕ, z), $m = 0$, $s = 3$

- Vinculada mover no plano xy: N = 3, m = 1 ($z = 0$), $s = 2$ (x, y ou ρ, ϕ)

* Outros exemplos?

B.2.2 Coordenadas e Velocidades Generalizadas

• Sistema

- n partículas

$$\text{índices} \begin{cases} \text{gregos} \rightarrow \text{partículas} : \alpha = 1, 2, ..., \text{n} \\ \text{latinos} \rightarrow \text{coordenadas} : \text{i} = 1, 2, 3 \end{cases}$$

- massas: m_α

- vetores posição: $\vec{r}_\alpha$

- Coordenadas retangulares: $x_{\alpha,1}$, $x_{\alpha,2}$, $x_{\alpha,3}$ $\rightarrow$ <u>compacta</u>: $x_{\alpha,i}$, $i = 1, 2, 3$

- m equações de vínculo

- Número total de coordenadas: $N = 3n$

- Número de Graus de Liberdade: $s = 3n - m$

• Coordenadas Generalizadas

- Escolha: número de graus de liberdade + simetria $\rightarrow$ s coordenadas *independentes*

$$q_j, \quad \mathbf{j = 1,\ 2,...s} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{jk} \quad (1 \text{ se } j = k \text{ ou } 0 \text{ se } j \neq k)$$

- Transformação Geral de Coordenadas

$$x_{\alpha,1} = x_{\alpha,1}(q_1, q_2, ..., q_s, t)$$
$$x_{\alpha,2} = x_{\alpha,2}(q_1, q_2, ..., q_s, t)$$
$$x_{\alpha,3} = x_{\alpha,3}(q_1, q_2, ..., q_s, t)$$
$$\alpha = 1, 2, ..., n$$

Notação <u>compacta</u>:

$$\mathbf{x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t)}$$

$$i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, ..., s, \quad \alpha = 1, 2, ..., n$$

Exemplo) Uma partícula - plano: retangulares $[x,\ y]$ $\rightarrow$ polares $[r,\ \theta]$

$$x_{1,1} = x = x(r, \theta) = r \cos\theta$$
$$x_{1,2} = y = y(r, \theta) = r \operatorname{sen}\theta$$

- Velocidades Generalizadas

$$\dot{q}_j \equiv \frac{dq_j}{dt}, \qquad j = 1, 2, ..., s$$

- Transformação Geral das Velocidades Generalizadas

Deriva em relação ao tempo:

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}$$

$$i = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad \alpha = 1, 2, ..., n$$

Exemplo) $\dot{x} = \cos\theta\,\dot{r} - r\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}$; $\dot{y} = \text{sen}\,\theta\,\dot{\text{r}} + \text{r}\cos\theta\,\dot{\theta}$.

Mecânica Lagrangiana $\Rightarrow$ Equações de movimento em termos das coordenadas e velocidades generalizadas.

B.2.3 Energia Cinética Generalizada

- Expressão Geral

Coordenadas retangulares:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{3} m_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}^2$$

Substitui $\dot{x}_{\alpha,i}$ e eleva ao quadrado (Thornton-Marion - Sec. 7.8):

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}m_\alpha\left[\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}\right]^2 + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{s} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}\dot{q}_j \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{2}m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k \end{aligned}$$

Exemplo) $T = \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\}$.

Notação Goldstein (Sec. 1.6): $T = T_0 + T_1 + T_2$

$T_0 \Rightarrow$ independe das velocidades generalizadas

$T_1 \Rightarrow$ dependência linear: $T_1 = \sum_{j=1}^{s} a_j \dot{q}_j$

$T_2 \Rightarrow$ dependência quadrática: $T_2 = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$

(a_j e b_{jk} independem das velocidades generalizadas)

- Se a transformação de coordenadas independe explicitamente do tempo:

$$\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad T_0 = 0,\ T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T_2$$

$$\Downarrow$$

função quadrática homogênea das velocidades

• Resultado Fundamental

Neste caso em que $T = T_2 = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$, derivando em relação a $\dot{q}_l$, multiplicando por $\dot{q}_l$ e somando em l (Thornton-Marion Sec. 7.8)

$$\sum_{l=1}^{s} \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2 \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T$$

B.3 Equações de Lagrange

B.3.1 Princípio de Hamilton

A Evolução temporal de todo sistema mecânico, consistente com os vínculos, ocorre de modo a minimizar a integral no tempo da diferença entre energia cinética e potencial:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - U] dt = 0$$

B.3.2 Lagrangiana

Coordenadas e velocidades generalizadas (potenciais independentes da velocidade):

$$T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, t) \equiv L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

- Dimensões: energia

- Caso de $U = U(q_j, \dot{q}_j, t)$: ver Goldstein (Sec. 1.5), Symon (Sec. 9.8)

B.3.3 Equações de Euler-Lagrange

Princípio de Hamilton $\Rightarrow$ cálculo variacional:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., s$$

(sistema de s equações diferenciais de 2a. ordem nas s variáveis $q_j(t)$)

B.4 Momento Canônico e Função Energia

B.4.1 Momento Canônico

- "Momento Generalizado"

Da expressão de T em coordenadas generalizadas:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = a_j + 2\sum_{k=1}^{s} b_{jk}\dot{q}_k \rightarrow \text{linear nas velocidades generalizadas}$$

Exemplo "simplório": $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x$

$$\partial T/\partial \dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad \text{"momento generalizado"}$$

- Momento Canônico

No caso mais geral em que $U = U(q_j, \dot{q}_j, t)$:

$$L = T - U \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\Downarrow$$

generalização do "momento generalizado" $\partial T / \partial \dot{q}_j$

$$\Downarrow$$

Momento Canônico $\quad \mathrm{p_j} \equiv \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{j}}$

De fato: se $\partial U / \partial \dot{q}_j = 0 \rightarrow p_j = \partial T / \partial \dot{q}_j$ - "momento generalizado"

- Equações de Lagrange (em termos do momento canônico)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{dp_j}}{\mathbf{dt}} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q_j}} \qquad j = 1, 2, ..., s$$

B.4.2 Função Energia e Energia Mecânica (Goldstein, Sec. 2.6)

• Função Energia

Derivando L em relação a t, $dL(q_j, \dot{q}_j, t)/dt$ e das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

dimensões de energia e função de q_j, $\dot{q}_j$ e t

função $\Downarrow$ energia

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Decorre:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

• Energia Mecânica

Caso particular fundamental:

1) Se eqs. de transformação de coord. independem do tempo (Sec. B.2.3):

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \quad \Rightarrow \quad T = T_2 \quad \text{e} \quad \sum_{l=1}^{s} \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2T$$

2) Se potencial independe das velocidades generalizadas, $U = U(q_k, t)$:

$$\partial L / \partial \dot{q}_k = \partial T / \partial \dot{q}_k$$

Com isso:

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) = 2T - (T - U) = T + U \equiv E \text{ (energia mecânica total)}$$

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) = E$$

Portanto, neste caso:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

B.5 Integrais Primeiras e Leis de Conservação

B.5.1 Integrais Primeiras ou Integrais de Movimento

Definição: São funções de q_j, $\dot{q}_j$ e t que possuem valores constantes durante o movimento (dependem apenas das condições iniciais):

$$f = f(q_j, \dot{q}_j, t) = \text{constante}$$

$$\Downarrow$$

equações diferenciais de 1a. ordem na variável $q_j(t)$

$$\Downarrow$$

uma integração $\rightarrow$ equação paramétrica do movimento: $q_j(t)$ (parâmetro t)

daí $\Downarrow$ nome

Integrais Primeiras ou Integrais de Movimento

Papel fundamental $\Rightarrow$ Leis de Conservação $\Rightarrow$ dois resultados básicos:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad k = 1, 2, ..., s \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{t}}$$

B.5.2 Conservação do Momento Canônico

Se $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ <u>independe</u> de uma dada coordenada q_i:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dp_i}{dt} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p_i = p_i(q_j(t), \dot{q}_j(t)) = \text{constante } (j \neq i) \Rightarrow \text{Integral Primeira}$$

Obs: como p_i constante, $\partial p_i / \partial t = 0$.

Denomina-se:

q_i: coordenada cíclica ou ignorável

p_i: momento canônico conjugado à variável q_i

- Enunciado

  O momento canônico conjugado a uma coordenada cíclica se conserva.

• Implicações Físicas

- Se q_i (cíclica) é uma coordenada linear (deslocamento espacial):

conservação do momento linear

$$\Updownarrow$$

L invariante por translação espacial numa dada direção $(\partial L/\partial q_i = 0)$

- Se q_i (cíclica) é uma coordenada angular (deslocamento angular):

conservação do momento angular

$$\Updownarrow$$

L invariante por rotação em torno de uma dada direção (eixo) $(\partial L/\partial q_i = 0)$

Portanto:

invariância $\Longleftrightarrow$ lei de conservação

B.5.3 Conservação da Função Energia

• Caso Geral: Se L <u>independe</u> <u>explicitamente</u> do tempo, $L = L(q_k, \dot{q}_k)$:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$h = h(q_j(t), \dot{q}_j(t)) = \text{constante} \Rightarrow \text{Integral Primeira da Função Energia}$$

• Conservação da Energia Mecânica: Se eqs. de transf. independem t e o potencial independe $\dot{q}_j$, como vimos:

$$T = T_2, \quad U = U(q_k, t) \quad \Rightarrow \quad h = T + U = E \quad \Rightarrow \quad dE/dt = -\partial L/\partial t$$

Se L <u>independe</u> <u>explicitamente</u> do tempo, $L = L(q_k, \dot{q}_k)$:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E = E(q_j(t), \dot{q}_j(t)) = \text{constante} \Rightarrow \text{Integral Primeira de Energia}$$

B.5.4 Simetrias e Leis de Conservação

- Leis de Conservação

Associadas à dependência explícita de L com coordenadas (linear ou angular) e/ou tempo:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad \rightarrow \quad \text{se} \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k = \text{cte} \qquad \text{(linear ou angular)}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \text{se} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \text{cte} \qquad \text{(função energia)}$$

- Simetrias

$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \;\Rightarrow$ sistema invariante por translação: $q_j \rightarrow q_j + \Delta q_j$ (simetria)

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow$ sistema invariante por translação: $t \rightarrow t + \Delta t$ (simetria)

- Resumo e Conclusões

Invariância de L em Deslocamentos:	Simetria do espaço e tempo	Propriedade da Lagrangiana	Lei de Conservação
lineares (translações)	espaço homogêneo	$\partial L/\partial q_k = 0$	momento linear
angulares (rotações)	espaço isotrópico	$\partial L/\partial q_k = 0$	momento angular
temporais	tempo homogêneo	$\partial L/\partial t = 0$	F. Energia h ou energia E

simetria $\Longleftrightarrow$ invariância de L $\Longleftrightarrow$ lei de conservação

Teorema de Noether - 1918 (Emmy Noether 1882 - 1935)
(tema trabalho)

C. Formalismo de Hamilton

C.1 Hamiltoniana: Conceito e Definição

C.2 Equações Canônicas de Movimento

C.1 Hamiltoniana: Conceito e Definição

C.1.1 Idéia Básica

$L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ e $h = h(q_j, \dot{q}_j, t) \rightarrow$ coordenadas, velocidades e tempo

Porém

$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ (momento canônico) $\leftrightarrow$ conjugado à variável cíclica q_k

$$\Downarrow$$

Linguagem mais prática, elegante e fundamental:

substituir $q_k, \dot{q}_k \rightarrow q_k$ e p_k (variáveis canônicas)

(transformações de Legendre - Lanczos cap. 6)

C.1.2 Procedimento

Em

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

1) Substituir $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$

2) Expressar $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_j, p_j, t)$

$$\Downarrow$$

C.1.3 Hamiltoniana

$$H \equiv H(q_j, p_j, t) = \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \; p_k - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Com isso,

$$\frac{dH}{dt}(q_k, p_k, t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(q_k, \dot{q}_j, t)$$

C.1.4 Energia Mecânica

Se transf. coord. independe explicitamente do tempo e energia potencial independe das veloc. generalizadas:

$$H(q_j, p_j, t) = E(q_j, p_j, t) \qquad \text{(energia mecânica do sistema)}$$

(se independe explicitamente do tempo $\Rightarrow$ conservação da energia)

C.2 Equações Canônicas do Movimento

Diferenciando $H(q_k, p_k, t)$ e $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ e comparando os coeficientes das diferenciais (Thornton-Marion, Sec. 7.10):

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad k = 1, 2, ..., s$$

$$\Downarrow$$

Equações de Movimento de Hamilton (canônicas)

$$\downarrow$$

sistema de $2s$ eqs. diferenciais de 1a. ordem

(Lagrange: s eqs. dif. 2a. ordem)

D. Movimento de Uma Partícula em Uma Dimensão

D.1 Motivação e Objetivos

- Motivação

Resumir (e solidificar) abordagem que utilizaremos no estudo de "Forças Centrais" e "Problema de Dois Corpos" (Thornton-Marion - Cap. 8)

- Sistema

Uma partícula de massa m movendo-se em uma dimensão (direção x) e submetida a uma energia potencial $U = U(x)$

- Objetivo

Dados x_0, $\dot{x}_0$ em $t = 0$ determinar formalmente o estado mecânico da partícula: $x(t)$ e $\dot{x}(t)$

• Técnicas

Resoluções formais ($U(x)$ arbitrária) via

D.2 Equações de Lagrange

D.3 Integrais Primeiras

D.4 Estudo dos Movimentos Possíveis

Obs: final $\rightarrow$ solução via eqs. de Hamilton (complemento)

D.2 Equações de Lagrange

- Número de graus de liberdade $\rightarrow$ em relação ao espaço euclidiano tridimensional:

$$N = 3,\ m = 2\ (y = 0 \text{ e } z = 0) \Rightarrow s = 1$$

- Coordenadas/velocidades generalizadas:

$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x}$$

- Lagrangiana:

$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) = L(x, \dot{x})$ (independe explicitamente de t)

- Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} \qquad (F_x)$$

$$\Downarrow$$

Dados $U(x)$, e x_0, $\dot{x}_0$ em $t = 0$ resolve eq. dif. 2a. ordem (2a. lei de Newton) obtendo $x(t)$ (eq. paramétrica de movimento) e derivando: $\dot{x}(t)$.

D.3 Integrais Primeiras

D.3.1 Momento Canônico

$L = L(x, \dot{x})$ e $s = 1 \rightarrow$ não há coordenada ignorável $\rightarrow$ momento (linear) não se conserva. De fato,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow \frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} \overset{\text{EL}}{=} -\frac{dU}{dx} \neq 0 \text{ (pois } U = U(x))$$

$$\Downarrow$$

p_x não é integral de movimento

D.3.2 Função Energia

- Conservação da Energia Mecânica

- Como $q_1(x) = x$ independe explicitamente de t e $U(x)$ independe $\dot{x}$:

$$h = T + U = E \quad \Rightarrow \quad E = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

- Como $L = L(x, \dot{x})$ não depende explicitamente do tempo:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \text{cte} \Rightarrow E = \text{cte}$$

$$\Downarrow$$

$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E(x, \dot{x}) = \text{cte}$$

$$\Downarrow$$

Integral Primeira de Energia

(eq. dif. 1a. ordem em $x(t)$ - não linear!!)

Dados x_0, $\dot{x}_0$ em $t = 0$ determina $E \rightarrow x(t)$??

- Procedimento Formal

Explicita $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \quad \text{(função de } x\text{)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = dt$$

Para $t' : 0 \to t$ e $x' : x_0 \to x$:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{[E - U(x')]}}$$

Dado $U(x)$:

1) "integra" obtendo $t = t(x, x_0, E)$

2) inverte obtendo $x = x(x_0, E, t)$

Depende de 2 ctes x_0 e $E = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + U(x_0)$ (eq. dif. 2a. ordem)

D.4 Movimentos Possíveis (Thornton-Marion Sec. 2.6)

D.4.1 Idéia e importância

- Conhecido $U(x)$ (gráfico) "descobrir" movimentos possíveis para diferentes valores de E;

- Método útil se eqs. de Lagrange e/ou Integrais de Movimento são de difícil solução;

- Informações adicionais sobre o movimento.

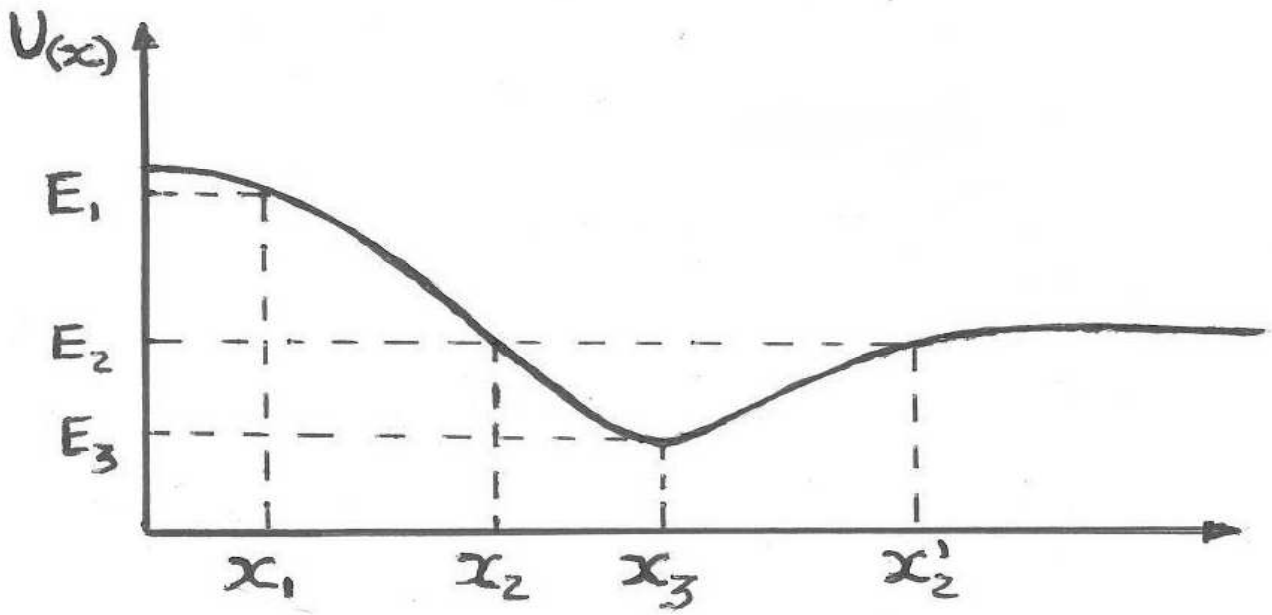
D.4.2 Bases do Método

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

$$\text{movimentos} \begin{cases} \text{possíveis} : E \geq U(x) \rightarrow \dot{x} \ \ \text{real} \\ \text{impossíveis} : E < U(x) \rightarrow \dot{x} \ \ \text{imaginária} \end{cases}$$

Em $E = U(x) \rightarrow \dot{x} = 0$ - denominado "ponto de retorno" (movimento)

• Movimentos possíveis - Exemplo típico:



- Se $E = E_1$: solta em x_1 vai para $x = \infty$ e vinda de $x = \infty$, x_1 é ponto de retorno

- Se $E = E_2$: solta em x_2 oscila entre x_2 e x'_2 (pontos de retorno) - partícula ligada ou presa ao potencial

- Se $E = E_3$: x_3 é ponto de equilíbrio estável (deslocamento - pode oscilar)

D.4.3 Expansão do Potencial - Período para Pequenas Oscilações

Considerando-se "pequenos" deslocamentos em torno de um ponto de equilíbrio estável, pode-se determinar o período das chamadas "pequenas oscilações".

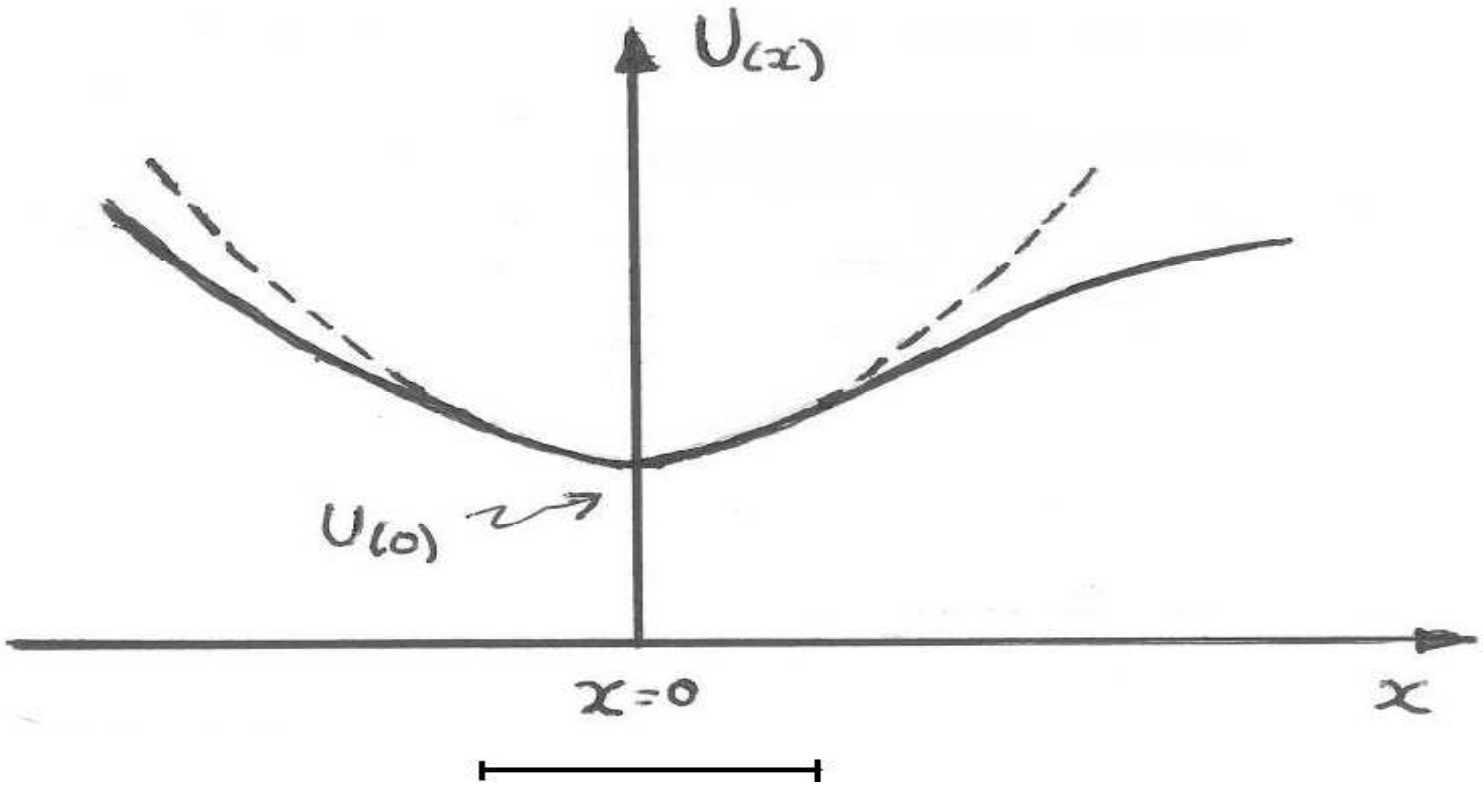
Se x_0 é um ponto de equilíbrio estável, considera-se a expansão de Taylor de $U(x)$ em torno de x_0:

$$U(x) = U(x_0)\frac{[x-x_0]^0}{0!} + U'(x_0)\frac{[x-x_0]^1}{1!} + U''(x_0)\frac{[x-x_0]^2}{2!} + ...$$

Como x_0 é extremo (ponto de mínimo), $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) > 0$, desprezando termos de ordem superior a 2 e tomando $x_0 = 0$:

$$U(x) \sim U(0) + \frac{1}{2}U''(0)x^2$$

(parábola com mínimo no ponto $(0, U(0))$)



Lembrando OHS-1D: m submetida a $F = -kx \rightarrow$ energia potencial:

$$U(x) - U(0) = -\int_0^x F(x')dx' = -\int_0^x -kx'dx' \rightarrow U(x) = U(0) + \frac{1}{2}kx^2$$

Portanto:

$$k \Longleftrightarrow U''(0)$$

Período para pequenas oscilações:

- 2a. Lei Newton: $m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

- Frequência de oscilação: $\frac{k}{m} = \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Período $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$T^{\text{OHS}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Logo, o período para pequenas oscilações, no caso de $U(x)$, é dado por

$$T^{\text{PO}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(0)}}$$

Obs: Formalismo de Hamilton (para m submetida a $U(x)$ - 1D)

- Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$$

- Função Energia:

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad \Rightarrow \quad h = h(x, \dot{x}) = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L$$

- Momento Canônico:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- Hamiltoniana:

$$H = H(x, p_x) = \frac{p_x}{m}p_x - \frac{1}{2}m\left[\frac{p_x}{m}\right]^2 + U(x) \quad \Rightarrow \quad H = \frac{p_x^2}{2m} + U(x)$$

- Equações de Movimento

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_x = -\frac{dU}{dx} \quad \text{(2a. Lei de Newton)}$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad (p_x = m\dot{x})$$