F415 - MECÂNICA GERAL II

Turma C 1º Semestre - 2014 Márcio José Menon

1. MOVIMENTO SOB A AÇÃO DE FORÇAS CENTRAIS

• ÍNDICE

A. Estabelecimento do Problema
B. Teoremas de Conservação - Integrais Primeiras do Movimento
C. Equações de Lagrange
D. Energia Potencial Efetiva e Energia Centrífuga
E. Discussão Geral sobre Movimentos Possíveis e Trajetórias
F. Força Central Inversamente Proporcional ao Quadrado da Distância

A. Estabelecimento do Problema
A.1 O Problema de Dois Corpos
A.2 Energia Potencial Central e "Lagrangiana"
A.2.1 Condições Assumidas
A.2.2 Expressões Analíticas
• Sistema
• Energia Potencial Central
• Energia Cinética
• "Lagrangiana Geral"
A.3 Redução do Problema de Dois Corpos ao Problema Equivalente de Um Corpo
A.3.1 Decomposição do Movimento: Centro de Massa e Relativo
• Posição do Centro de Massa
• Decomposição do Movimento
A.3.2 Massa Reduzida e o Problema Equivalente de Um Corpo
• Movimento do Centro de Massa
• O Problema Equivalente de Um Corpo
• Massa Reduzida
• Discussão sobre Interpretações Físicas
A.4 Força Central no Problema Equivalente de Um Corpo
A.4.1 Dedução
A.4.2 Interpretações Física e Geométrica

B. Teoremas de Conservação - Integrais Primeiras do Movimento
B.1 Conservação do Momento Angular
B.1.1 Abordagem Vetorial
• Constância do Momento Angular
• Implicação Geométrica: Trajetória Plana

B.1.2 Abordagem Analítica
- Coordenadas Generalizadas e Lagrangiana
- Coordenada Cíclica e Integral Primeira de Momento Angular

B.1.3 Constância da Velocidade Areolar
- Velocidade Areolar
- Caso de Força Central

B.2 Conservação da Energia Mecânica
B.2.1 Função Energia
B.2.2 Integral Primeira de Energia
B.3 Momento Linear Radial
B.4 Obtenção Formal das Equações Paramétricas da Trajetória e da Trajetória
B.4.1 Equações Paramétricas da Trajetória
B.4.2 Equação da Trajetória

C. Equações de Lagrange
C.1 Equações do Movimento
C.1.1 Coordenada Radial
C.1.2 Coordenada Angular
C.1.3 Equivalência com a Abordagem Vetorial
C.2 Desacoplamento das Equações
C.3 Conexão Formal entre Lei de Força e Equação da Trajetória
C.3.1 Formalismo
C.3.2 Exemplos

D. Energia Potencial Efetiva e Energia Centrífuga
D.1 Energia Potencial Efetiva
D.1.1 Analogia com o Movimento de Uma Partícula em Uma Dimensão
D.1.2 Definição de Energia Potencial Efetiva
D.2 Energia Centrífuga
D.2.1 Conceito e Definição de Energia Centrífuga
D.2.2 Força Centrífuga
D.2.3 Discussão sobre a Origem da Força Centrífuga
D.3 Resumo, Exemplos Típicos e Comentários
D.3.1 Resumo
D.3.2 Energia Potencial Efetiva para Forças Centrais Típicas
- Oscilador Harmônico Isotrópico
- Força Central Inversamente Proporcional ao Quadrado da Distância

E. Discussão Geral sobre Movimentos Possíveis e Trajetórias
E.1 Definições de Curvas e Trajetórias de Interesse
E.1.1 Curvas
E.1.2 Trajetórias
E.2 Dependências Radial e Angular
E.2.1 Radial
E.2.2 Angular

E.3 Trajetória no Caso de Equilíbrio Estável
E.4 Trajetórias com Um Ponto de Retorno
E.4.1 Movimento a Partir do Ponto de Retorno
E.4.2 Partícula Vindo do Infinito
E.5 Trajetórias com Dois Pontos de Retorno
E.5.1 Características Gerais
E.5.2 Período Radial, Período Angular e Precessão (Revolução)
E.5.3 Trajetórias Limitadas Abertas e Fechadas
• Conceitos e Definições
• Condições Periódicas para Trajetórias Fechadas
• Ângulo de Varredura num Período Radial: Condição para Trajetória Fechada
- Teorema de Bertrand
E.5.4 Trajetória Fechada Simples: Área em Função do Período
E.5.5 Período Radial para Pequenas Oscilações
• Formulação
• Trajetória Típica
• Exemplo

F. Força Central Inversamente Proporcional ao Quadrado da Distância
F.1 Formulação
F.1.1 Força e Energia Potencial
F.1.2 Energia Potencial Efetiva e Energia Total
F.2 Equação Geral da Trajetória
F.2.1 Solução Geral da Equação Diferencial
F.2.2 Constantes de Integração
F.2.3 Análise das Trajetórias
• Excentricidade e Energia Total
• Distância do Centro Geométrico ao Vértice
• Ramos da Hipérbole
F.3 Energia Potencial Efetiva e Trajetórias: Discussão Geral e Resumo
F.3.1 Discussão Geral (Exercício)
F.3.2 Resumo: Estados de Espalhamento e Estados Ligados
F.4 O Problema de Kepler - Trajetórias Elípticas
F.4.1 Algumas Definições e Conceitos da Astronomia
F.4.2 A Revolução Cosmológica
F.4.3 Solução do Problema de Kepler
• Leis de Kepler
• Demonstração das Leis de Kepler a partir da Lei da Gravitação Universal
• Lei da Gravitação Universal a partir das Leis de Kepler
F.4.4 Desenvolvimentos do Formalismo
• O Problema de Muitos Corpos e a Mecânica Celeste
- Teoria de Perturbação
- Descoberta de Planetas
- Variação da Excentricidade da Órbita Terrestre
- Avanço do Periélio da Órbita da Terra
• Precessão do Periélio de Mercúrio e a Relatividade Geral

F.5 O Problema de Rutherford - Trajetórias Hiperbólicas

F.5.1 Introdução

- Importância
- Aspecto Teórico: Estado de Espalhamento e Trajetória Hiperbólica
- Aspecto Experimental: Fluxo de Partículas e Seção de Choque
- Objetivo (final) do Estudo

F.5.2 O Experimento de Rutherford

F.5.3 Força Central e Ângulo de Espalhamento

- Força Central e Trajetória
- Grandezas Cinemáticas - Colisões Elásticas
- Ângulo de Espalhamento e Parâmetro de Impacto

F.5.4 Conceito e Definição de Seção de Choque

- Grandezas Experimentais
- Seção de Choque
- Seção de Choque Diferencial
- Seção de Choque Diferencial e Parâmetro de Impacto
- Resumo

F.5.5 Seção de Choque de Rutherford

- Formulação
- Comparação com os Dados Experimentais

F.5.6 Raio Nuclear

- Ponto de Retorno
- Distância de Aproximação Máxima
- Observações

F.5.7 Comentários sobre o Efeito de Recúo do Alvo

Apêndice

Referências:

- Marion-Thornton Cap. 8 e Cap. 9 (seções 9.9 e 9.10)
- Symon Seções 3.13 a 3.16 (abordagem vetorial);
- Goldstein Cap. 3 (abordagem analítica).

- Leitura sugerida:

R. Feynman, *The Characther of Physical Law* (MIT Press, 1965), Chap. 1 The Law of Gravitation, an example of Physical Law.

• **QUESTÕES PROPOSTAS**

A. Estabelecimento do Problema

Questão 1
a) Explique o que significa *o problema de dois corpos* e energia potencial central. Discuta em detalhe as condições assumidas;
b) Escreva a "Lagrangiana Geral" para o problema de dois corpos sob a ação de uma energia potencial central, considerando a origem o do sistema de referência fixa no sistema de laboratório (figura 1). Utilize notação vetorial.

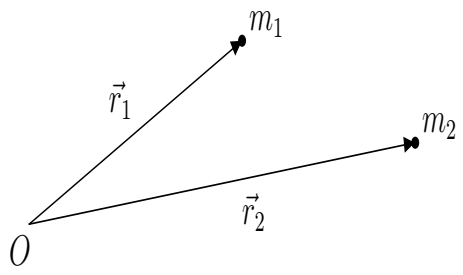

Figura 1: Questão 1.

Questão 2
Sendo m_1 e m_2 as massas dos corpos interagentes, $\vec{R}$ a posição do centro de massa do sistema e $\vec{r}$ o vetor relativo de m_1 a m_2, mostre que a energia cinética do sistema pode ser expressa por:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\dot{\vec{r}}^2.$$

Cada termo é associado a qual tipo de movimento?

Questão 3
a) Mostre que o problema de dois corpos, sob a ação de uma energia potencial central, pode ser reduzido ao problema equivalente de um corpo, através de definição de uma massa reduzida para o sistema. Explique em detalhe as condições assumidas.
b) Explique o significado físico e geométrico desse problema equivalente de um corpo.
c) Esse problema equivalente pode ser exato ou aproximado? Discuta e explique essas duas situações.

Questão 4
Da questão 3, a lagrangiana do problema equivalente de um corpo sob a ação de uma energia potencial central pode ser expressa por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(r),$$

onde $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ é a massa reduzida do sistema.
a) Mostre que a força central associada à energia potencial central genérica $U(r)$ é dada por

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}.$$

(utilize o operador vetorial nabla $\vec{\nabla}$ em coordenadas esféricas ou retangulares).
b) Explique os significados físico e geométrico dessa força e dê alguns exemplos de interesse físico.

B. Teoremas de Conservação - Integrais Primeiras de Movimento

Questão 5

Utilizando uma abordagem vetorial, mostre que para uma partícula submetida a uma força central genérica (questão 4):
a) o momento angular é conservado;
b) a trajetória é plana, contida no plano perpendicular ao vetor momento angular.

Questão 6

Com base nos resultados da questão 5, considere agora a abordagem analítica.
a) Justificando a resposta, obtenha as coordenadas generalizadas adequadas ao problema de dois corpos sob a ação de uma energia potencial central.
b) Mostre que em termos das coordenadas generalizadas a lagrangiana é expressa por:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - U(r) = L(r, \dot{r}, \dot{\theta}).$$

c) Justificando a resposta, mostre que a *Integral Primeira de Momento Angular* é dada por

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} \equiv l \ \ (\text{constante}).$$

Questão 7

Considere novamente a abordagem vetorial.
a) Dê a definição de *Velocidade Areolar* e obtenha sua expressão em coordenadas polares.
b) Mostre que o raio vetor de uma partícula submetida a uma força central varre áreas iquais em tempos iquais.

Questão 8

Para um sistema com s graus de liberdade, a função energia é dada por

$$h = h(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

e obedece

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

a) Mostre que, no caso do problema de dois corpos sob a ação de uma energia potencial central, tem-se

$$h = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r) = T + U = E$$

e que a energia total E é constante.

b) Introduzindo na expressão acima o momento angular l (questão 6), mostre que a *Integral Primeira de Energia* pode ser expressa por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) = E(r, \dot{r}).$$

Questão 9

No caso de uma energia potencial central genérica, o momento linear (radial) é conservado? Justifique a resposta.

Questão 10

Para uma partícula submetida a uma energia potencial central genérica, $U(r)$, as *Equações Paramétricas da Trajetória*, $r(t)$ e $\theta(t)$, podem ser <u>formalmente</u> obtidas a partir das *Integrais Primeiras do Movimento* (questão 6, ítem c e questão 8, ítem b). Demonstre essa afirmação, respondendo, em detalhe, as questões dos ítens que seguem.

a) A partir das integrais primeiras, demonstre os seguintes resultados:

$$\theta(t) = \frac{l}{m}\int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')} + \theta_0, \qquad t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - l^2/2mr'^2 - U(r')}}.$$

b) Quantas e quais são as constantes de integração (determinadas pelas condições iniciais)?

c) Qual o procedimento <u>formal</u> para se obter as equações paramétricas da trajetória?

Questão 11

a) No caso da questão anterior, mostre que pode-se também obter <u>formalmente</u> a *Equação da Trajetória*, demonstrando o seguinte resultado:

$$\theta(r) = \frac{l}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2\sqrt{E - l^2/2mr'^2 - U(r')}} + \theta_o.$$

b) Quais são as constantes de integração?

c) Qual a importância física desse resultado?

C. Equações de Lagrange

Questão 12

a) Escreva a Lagrangiana para o problema equivamente de uma partícula submetida a uma energia potencial central (massa m, energia potencial $U(r)$).

b) A partir da equações de Euler-Lagrange, obtenha as equações de movimento.
c) Essa equações são as mesmas obtidas através da segunda lei de Newton, $\vec{F} = d\vec{p}/dt$? Justifique a resposta.
d) Explique como pode-se obter formalmente as equações paramétricas da trajetória.

Questão 13
a) A partir das equações de movimento da questão anterior, introduzindo o momento angular l, a força central correspondente F e efetuando a mudança de variável $r = 1/u$, obtenha a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{u^2 l^2}\, F(1/u),$$

ou, em termos de r:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{1}{r}\right] + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{l^2}\, F(r).$$

b) Quais os significados físico e geométrico associados a esse resultado e qual sua importância fundamental?

Questão 14
Marion - Thornton, exemplos 8.1 e 8.2.

D. Energia Potencial Efetiva e Energia Centrífuga

Questão 15
Considerando analogias com o movimento de uma partícula em uma dimensão (submetida a uma energia potencial dependente só da posição), explique o conceito e dê a definição de *Energia Potencial Efetiva* associada a uma força central.

Questão 16
Utilizando o operador vetorial nabla $\vec{\nabla}$ em coordenadas polares ou retangulares, mostre que

$$\vec{\nabla}\left[\frac{1}{r^2}\right] = -\frac{2}{r^3}\,\hat{r}.$$

Questão 17
a) Explique o conceito e dê a definição de *Energia Centrífuga* associada ao problema de forças centrais.
b) Deduza a expressão da *Força Centrífuga* associada à energia centrífuga.
c) Explique em detalhe o efeito da força ou energia centrífuga no movimento de uma partícula submetida a uma força central.
d) A força centrífuga tem origem dinâmica? Explique.

Questão 18

Considere a sequinte função real de uma variável real:

$$f(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}, \qquad a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0.$$

a) Quais são os limites de $f(x)$ para $x \to \infty$ e $x \to 0$?

b) Determine os extremos de $f(x)$ e os valores de x para esses extremos. São máximos ou mínimos? Justifique a resposta.

c) Faça um esboço do gráfico de $f(x)$, indicando nos eixos os valores dos extremos (x e f) em termos dos parâmetros a e b.

Resposta ítem (b): $x_0 = 2a/b$ e $f(x_0) = -b^2/4a$.

Questão 19

A variação da energia potencial associada a uma força $\vec{F}$, entre dois pontos $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, é definida por

$$U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Utilizando escolhas adequadas para os pontos de referência onde toma-se $U = 0$, determine a energia potencial associada às forças centrais dos dois ítens abaixo. Em seguida, justificando a resposta, esboce os gráficos das energias potenciais <u>efetivas</u> associadas

a)

$$\vec{F} = -k\,\vec{r}, \quad k > 0 \quad (\text{oscilador harmônico isotrópico}).$$

b)

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2}\hat{r}, \quad \text{considerando os dois casos} \quad k > 0 \quad \text{e} \quad k < 0.$$

Questão 20

Considere uma energia potencial central atrativa do tipo

$$U(r) = -\frac{k}{r^n}, \quad k > 0, \quad n > 0.$$

a) Para quais valores de n a partícula pode atingir a origem (centro de força), isto é, vencer a barreira da força centrífuga? Justifique a resposta.

b) Marion - Thornton, exemplo 8.3.

E. Discussão Geral sobre Movimentos Possíveis e Trajetórias

Questão 21

Explique os seguintes conceitos:

a) Curvas abertas, curvas fechadas, curvas simples e curvas não simples.

b) Trajetórias limitadas e trajetórias não limitadas (ilimitadas).

c) Uma trajetória limitada pode ser aberta? Explique.

Questão 22

Considere o movimento de uma partícula submetida a uma força central com a energia potencial efetiva (típica/genérica) indicada na figura abaixo. Se a partícula possui momento angular $l > 0$, discuta os movimentos e trajetórias possíveis nos seguintes casos:
a) $E = E_0$ (equilíbrio estável);
b) $E = E_1$ (um ponto de retorno);
c) $E = E_2$ (dois pontos de retorno).

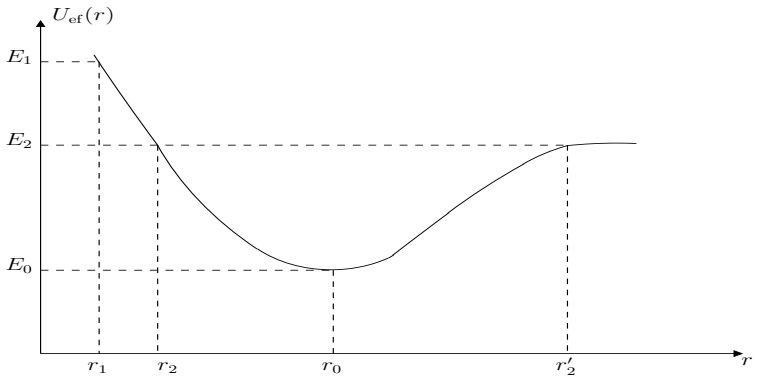

Figura 2: Questão 22.

Questão 23

No caso da questão anterior, se $l = 0$ quais são os movimentos e trajetórias possíveis?

Questão 24

No caso de dois pontos de retorno da questão 22, $r_2 = r_{\rm min}$ e $r_2' = r_{\rm max}$, a trajetória abaixo é possível? Explique.

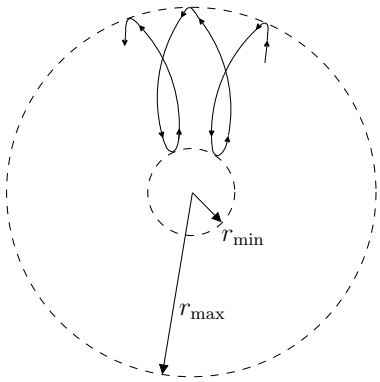

Figura 3: Questão 24.

Questão 25

a) No caso de trajetórias com dois pontos de retorno, explique o que são: período radial τ_r, período angular τ_θ e precessão (revolução).

b) Considere que a partícula parte de um ponto A de coordenadas $r_{\max}$ e θ_0, como indicado na figura que segue. Faça um esboço das trajetórias possíveis nos casos em que $\tau_r > \tau_\theta$ e $\tau_r < \tau_\theta$. Utilize duas figuras.

c) Faça um esboço da trajetória no caso em que $\tau_r = \tau_\theta$. Qual o nome desse tipo de curva?

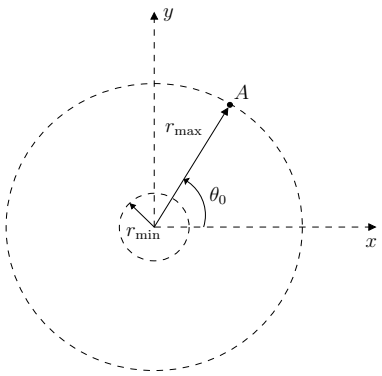

Figura 4: Questão 25.

Questão 26

No caso de dois pontos de retorno, mostre que a condição para trajetória fechada, após uma revolução, é que a razão entre os períodos radial e angular seja um número racional:

$$\frac{\tau_r}{\tau_\theta} = \frac{n}{m}, \qquad n \text{ e } m \text{ inteiros.}$$

Questão 27

No caso de dois pontos de retorno, o ângulo de abertura correspondente a um período radial ($r_{\max} \to r_{\min} \to r_{\max}$) é denominado *Ângulo de Varredura* $\Delta\theta$ (figura abaixo).

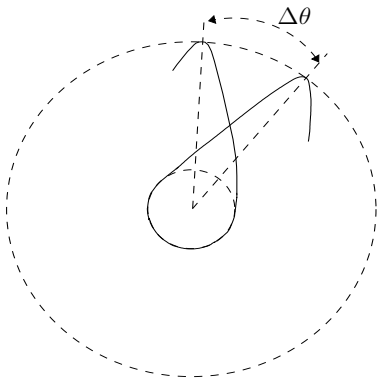

Figura 5: Questão 27.

a) Mostre que para uma energia potencial central $U(r)$, esse ângulo pode ser calculado através da seguinte integral:

$$\Delta\theta = 2l \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m[E - l^2/2mr^2 - U(r)]}}.$$

b) Mostre que a condição para trajetória fechada é que o ângulo de varredura, num período radial, seja uma fração racional de 2π radianos:

$$\Delta\theta = \frac{m}{n}\, 2\pi, \qquad m \text{ e } n \text{ inteiros.}$$

c) Pode-se demonstrar que somente em casos especiais de $U(r)$ a condição acima é obedecida, levando a trajetórias fechadas (Teorema de Bertrand). Quais energias potenciais de interesse físico obedecem essa condição? Veja, por exemplo, Goldstein Sec. 3.6 ou Lemos Sec. 1.7.

Questão 28

a) Mostre que no caso de a trajetória ser uma curva fechada simples, a área A, que tem a trajetória como fronteira, pode ser expressa em termos do período de oscilação τ através de

$$A = \frac{l\tau}{2m}, \qquad l: \text{ momento angular.}$$

b) Que período é esse? Angular? Radial? Explique.

Questão 29

Considere o caso de pequenas oscilações em torno de um ponto de equilíbrio estável r_0.
a) Através da expansão de Taylor da energia potencial efetiva $U_{ef}(r)$, mostre que período radial para pequenas oscilações (PO) é dado por

$$\tau_r^{\text{PO}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''_{ef}(r_0)}}, \qquad \text{onde} \qquad U''_{ef}(r_0) = \left.\frac{d^2}{dr^2}U_{ef}(r)\right|_{r=r_0}.$$

b) Nesse caso de pequenas oscilações, faça um esboço de uma trajetória possível.

Questão 30

(Exame de Ingresso Unificado da Pós-Graduação - 1º Sem. 2008)

Considere uma partícula de massa m movendo-se sob a ação de um potencial central $U(r) = k[r/r_0]^4$, onde k e r_0 são constantes positivas. Em coordenadas polares o movimento radial é dado pela equação:

$$m\ddot{r} = -\frac{dU_{\text{ef}}}{dr}, \quad \text{onde} \quad U_{\text{ef}} = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

e $l = mr^2\dot{\theta}$ é o momento angular perpendicular ao plano do movimento.
a) Faça um esboço do potencial efetivo.

b) Encontre a distância a da partícula ao centro de forças para que seu movimento seja uma órbita circular com momento angular $l = 2r_0\sqrt{mk}$. Calcule as energias cinética, potencial e total nessa órbita.
c) Determine o período de rotação desse movimento circular.
d) Se a partícula em órbita circular sofrer uma pequena perturbação que não altere o valor de l, ela começara a oscilar em torno da órbita original. Determine o período de pequenas oscilações radiais desse movimento.
Respostas:

a) $a = r_0$, $T = 2k$, $U = k$;

c) $\tau_\theta = \pi r_0\sqrt{m/k}$;

d) $\tau_r^{\mathrm{PO}} = \pi r_0\sqrt{m/6k}$.

F. Força Central Inversamente Proporcional ao Quadrado da Distância

Questão 31

Estude o texto *Comentários sobre Cônicas* (pasta F415 C - BIF).

Questão 32

Considere uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{k}{r^2}\hat{r}, \qquad k \text{ real} \qquad (> 0 \quad \text{ou} \quad < 0),$$

com energia potencial associada $U = k/r$ (questão 19).
a) A partir da equação fundamental que conecta trajetória e força central (questão 13), mostre que neste caso, em termos da variável $u = 1/r$, tem-se a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mk}{l^2}.$$

b) Mostre que a solução geral dessa equação, na variável r, é dada por

$$\frac{1}{r} = B + A\cos(\theta + \delta),$$

sendo

$$B = -\frac{mk}{l^2}$$

e A e δ constantes arbitrárias.

Questão 33

A equação geral das cônicas, em coordenadas polares, com origem em um dos focos, pode ser escrita como (por exemplo, questão 31):

$$\frac{1}{r} = B + A\cos(\theta - \theta_0),$$

sendo a excentricidade e e a distância a do centro geométrico ao vértice (caso da elipse e hipérbole) dadas, respectivamente, por

$$e = \frac{A}{|B|}, \qquad a = \left|\frac{B}{A^2 - B^2}\right|.$$

Com base na solução geral para a equação da trajetória da questão anterior (ítem b), responda as questões dos ítens que seguem, justificando as respostas.
a) Qual o significado geométrico da constante de fase δ?
b) Mostre que nos pontos de retorno, onde $\dot{r} = 0$, tem-se $dr/d\theta = 0$ e com base nesses dois resultados, mostre que em termos das grandezas do problema físico, a constante A é dada por

$$A = \sqrt{\left[\frac{mk}{l^2}\right]^2 + \frac{2mE}{l^2}},$$

de modo que

$$A^2 = B^2 + \frac{2mE}{l^2}.$$

c) Mostre que em termos das grandezas do problema físico, a excentricidade é expressa por

$$e = +\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}.$$

d) Mostre que para a elipse e para a hipérbole tem-se:

$$a = \left|\frac{k}{2E}\right|.$$

Qual o significado geométrico dessa grandeza? O que se pode inferir de sua dependência com k e E?
e) Mostre que para a hipérbole, se $k < 0$ a trajetória corresponde ao ramo mais próximo do foco (ramo $+$) e se $k > 0$ ao ramo mais distante do foco (ramo $-$). Faça um esboço desses dois casos.

Questão 34

Com base na expressão da excentricidade demonstrada na questão anterior (ítem c):

a) Faça um esboço do gráfico da energia total E em função da excentricidade e. Indique no gráfico os pontos/regiões associados a

a1) elipse, hipérbole e parábola;

a2) estados ligados e não ligados (estados de espalhamento)

b) Explique, algebricamente, porque a energia total E pode ser negativa. Qual o significado físico desse valor algébrico?

Questão 35

Considere uma energia potencial atrativa $U = -k/r$, $k > 0$ e que a partícula é lançada de uma posição $\vec{r}_0$ com velocidade $\vec{v}_0$, perpendicular a $\vec{r}_0$ (Figura 6). Faça um esboço das trajetórias possíveis, indicando as cônicas correspondentes.

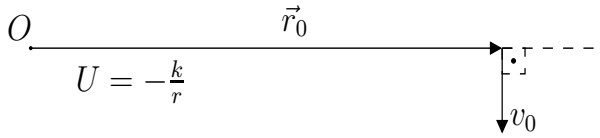

Figura 6: Questão 35.

Questão 36

Para uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância, a energia potencial efetiva é dada por

$$U_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}.$$

Discuta os movimentos e trajetórias possíveis para $l = 0$ e em seguida para $l \neq 0$, considerando os seguintes casos:
a) $k = 0$;
b) $k > 0$;
c) $k < 0$. No caso $l \neq 0$, considere as possibilidades: $E > 0$ $E = 0$ e $E < 0$.
d) Faça um resumo dos gráficos e trajetórias para os estados ligados e os estados de espalhamento.

Questão 37

Explique o significado dos seguintes termos:
a) órbita;
b) apsides;
c) pericentro e apocentro;
d) perigeu e apogeu;
e) periélio e afélio.

Questão 38

Explique, resumidamente (umas duas páginas) o que foi a *Revolução Cosmológica*. Referências básicas para informações adicionais às aulas:

- H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica, 1 - Mecânica* (Edgard Blücher, 1981), Cap. 10 Gravitação.

- R. Feynman, *The Characther of Physical Law* (MIT Press, 1965), Chap. 1 The Law of Gravitation, an example of Physical Law.

- P. Lucie, *Física Básica 1, A Gênese do Método Científico* (Campus, 1977).

Questão 39

Enuncie as Três Leis de Kepler.

Questão 40

A *Lei da Gravitação Universal* estabelece que "no Universo matéria atrai matéria na razão direta das massas e inversa do quadrado da distância que as separa":

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}.$$

a) A partir dessa lei, deduza as duas primeiras leis de Kepler (órbitas elípticas e lei das áreas).
b) Levando em conta o efeito da massa reduzida, demostre a terceira lei de Kepler (razão entre semi-eixo maior e período). Essa lei é exata ou aproximada? Explique.

Questão 41

A partir das Leis de Kepler e da Terceira Lei de Newton (ação/reação), deduza a Lei da Gravitação Universal.

Questão 42

As Leis de Kepler e da Gravitação Universal dizem respeito ao problema de dois corpos. Porém, no Universo e no sitema solar em particular, temos um problema de muitos corpos. No caso da órbita da Terra, discuta dois tipos de desvios observados das Leis de Kepler.

Questão 43

A Mecânica Clássica consegue explicar o valor observado da precessão do periélio de Mercúrio? Discuta a resposta de forma qualitativa.

Questão 44

Leia as seguintes seções do livro texto (Thornton e Marion):
- 8.9 Dinâmica Orbital
- 8.10 Ângulos Apsidais e Precessão
- 8.11 Estabilidade de Órbitas Circulares

Questão 45

Mostre que no caso da hipérbole, o ângulo α entre a assíntota e o eixo principal está relacionado com a excentricidade e pela relação

$$\cos\alpha = \frac{1}{e}$$

(veja, por exemplo, o texto *Comentários sobre Cônicas*).

Questão 46

Considere um projétil de massa m_1, carga $q_1 > 0$, sendo espalhado por um alvo de carga $q_2 > 0$ *fixo na origem* o do SL e que a interação (repulsão) é coulombiana.
a) Mostre que a trajetória do projétil corresponde ao ramo negativo de uma hipérbole;
b) Mostre que o ângulo ψ, de espalhamento do projétil no SL, pode ser expresso por

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{k}{l}\sqrt{\frac{m_1}{2E}},$$

onde $k = q_1 q_2$ (sistema gaussiano), l é o momento angular do projétil em relação à origem o, $E = m_1 u_1^2/2$, sendo u_1 a velocidade do projétil no SL.

Questão 47
a) Explique o conceito de *Parâmetro de Impacto* e obtenha sua relação com o momento angular l.
b) Mostre que em termos do parâmetro de impacto da colisão, b, o ângulo de espalhamento do projétil (questão anterior) é expresso por:

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{q_1 q_2}{m_1 u_1^2 b}$$

Questão 48
a) Explique o conceito e dê a definição de *Seção de Choque* de uma colisão. Discuta as interpretações estatística e geométrica dessa grandeza física.
b) Mostre que, num experimento de colisões, se Φ_e é o número de partículas espalhadas por unidade de tempo, Φ_i o número de partículas incidentes por unidade de tempo e n o número de centros espalhadores por unidade de área do alvo, então a *Seção de Choque Diferencial* é dada por

$$d\sigma = \frac{d\phi_e}{n\phi_i}$$

e, no caso de simetria azimutal:

$$d\sigma = 2\pi b db.$$

Questão 49
Com base nos resultados das questões 46, 47 e 48, mostre que a *Seção de Choque de Rutherford* (diferencial), no caso de alvo fixo, pode ser expressa por
a)

$$\frac{d\sigma}{d\psi} = \left[\frac{q_1 q_2}{2m_1 u_1^2}\right]^2 \frac{2\pi \mathrm{sen}\psi}{\mathrm{sen}^4(\frac{\psi}{2})}.$$

b)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{q_1 q_2}{2m_1 u_1^2}\right]^2 \mathrm{cosec}^4(\frac{\psi}{2}),$$

onde $d\Omega = 2\pi \mathrm{sen}\psi d\psi$ é o elemento de ângulo sólido, no caso de simetria azimutal.

Questão 50
a) No caso da questão anterior, mostre que a distância de aproximação máxima do projeto em relação ao alvo é dada por

$$r_0 = \frac{2q_1 q_2}{m_1 u_1^2}.$$

b) Explique a importância física desse resultado no experimento de Rutherford.