**F415 - MECÂNICA GERAL II**

Turma C 1º Semestre - 2014 Marcio José Menon

# 2. MECÂNICA DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

**• ÍNDICE**


A. Introdução
B. Conceitos Básicos e Notação
C. Teoremas e Leis de Conservação
D. Colisões de Duas Partículas
E. Limite para o Contínuo - Corpos Rígidos

**A. Introdução**

**B. Conceitos Básicos e Notação**
B.1 Sistema Discreto de $n$ Partículas
B.2 Massa Total e Centro de Massa
B.3 Forças Internas e Forças Externas
B.4 Equações de Movimento e Leis de Conservação: Estratégia de Estudo
B.5 Terceira Lei de Newton: Formas Fraca e Forte
B.5.1 Forma Fraca
B.5.2 Forma Forte
B.5.3 Exemplos Típicos

**C. Teoremas e Leis de Conservação**
C.1 Momento Linear
C.1.0 Caso de Uma Partícula
C.1.1 Momento Linear do Sistema
C.1.2 Força Resultante sobre o Sistema
C.1.3 Conservação do Momento Linear
C.1.4 Estudo do Centro de Massa
a) Movimento do Centro de Massa
b) Momento Linear do Sistema em Relação ao Centro de Massa
C.2 Momento Angular
C.2.0 Caso de Uma Partícula
C.2.1 Momento Angular do Sistema
C.2.2 Torque Resultante sobre o Sistema
C.2.3 Conservação do Momento Angular
C.2.4 Estudo do Centro de Massa: Decomposição do Movimento
a) Momento Angular do Sistema em Relação ao Centro de Massa
• Decomposição do Movimento
• Momento Angular Orbital e de Spin

b) Torque em Relação ao Centro de Massa
c) Conservação do Momento Angular
C.3 Energia
C.3.0 Caso de Uma Partícula
a) Teorema do Trabalho - Energia Cinética
b) Energia Potencial e Conservação da Energia
c) Forças Conservativas e Não Conservativas
C.3.1 Energia Cinética do Sistema
a) Teorema do Trabalho - Energia Cinética
b) Centro de Massa: Decomposição do Movimento
C.3.2 Energia Potencial do Sistema
a) Forças Externas
b) Forças Internas
c) Energia Potencial Total
C.3.3 Conservação da Energia do Sistema
C.4 Resumo e Comentários

**D. Colisões de Duas Partículas**

D.1 Estabelecimento do Problema
D.1.1 Importância
D.1.2 Colisões no Sistema de Laboratório
D.1.3 Condições Assumidas
D.1.4 Estratégia de Estudo
D.2 Leis de Conservação
D.2.1 Conservação do Momento
a) Linear Total
b) Angular Total
D.2.2 Conservação da Energia - Fator $Q$
a) Energias Mecânica e Não Mecânica
b) Balanço Energético
c) Conservação da Energia Cinética
d) Processos Endoérgicos e Exoérgicos
D.2.3 Colisões Elásticas e Inelásticas
D.3 Colisões Elásticas
D.3.1 Introdução
a) Objetivos
b) Sistemas de Referência
c) O Problema da Notação
d) Estratégias
D.3.2 Diagramas Vetoriais de Momentos Lineares
a) Sistema de Laboratório (SL)
• Notação
• Conservação do Momento Linear
• Diagramas - Estados Inicial e Final
b) Sistema de Centro de Massa (SCM)

- Notação
- Conservação do Momento Linear
- Diagramas - Estados Inicial e Final

D.3.3 Diagramas Vetoriais de Velocidades

a) Diagramas Básicos no SL e Velocidade do CM no SL
- Estados Inicial e Final
- Velocidade do CM no SL

b) Diagramas Básicos no SCM
- Momentos Lineares e Velocidades
- Estados Inicial e Final

c) Diagramas das Velocidades Finais no SCM e SL
- Resultados Básicos
- Projétil - Espalhamentos “para frente”e “para tras” (SCM)
- Alvo

D.3.4 Relações Algébrias entre Velocidades

a) Leis de Conservação em Termos das Velocidades (SL e SCM)

b) Velocidade Inicial do Alvo no SCM

c) Velocidades no SCM (projétil e alvo, inicial e final)

d) Velocidade Relativa Inicial Projétil-Alvo (SL e SCM)

e) Velocidades Finais no SCM e Velocidade Relativa Inicial no SL

f) Velocidades do CM no SL e Final do Projétil no SCM em Termos das Massas

D.3.5 Relações entre Ângulos de Espalhamento

a) Projétil - SL e SCM
- Em Termos de Velocidades
- Em Termos das Massas
- Casos Particulares

b) Alvo - SL e SCM
- Em Termos de Velocidades
- Relação Angular
- Casos Particulares

c) Efeito do Recúo do Alvo no Espalhamento de Rutherford

D.3.6 Comentários sobre Relações entre Energias Cinéticas

D.4 Colisões Inelásticas

D.4.1 Leis de Conservação

D.4.2 Colisões Unidimensionais

D.4.3 Inelasticidade e Coeficiente de Restituição

D.4.4 Exemplos

**E. Limite para o Contínuo - Corpos Rígidos**

E.1 Conceito e Definição Clássica de Corpo Rígido

E.2 O Limite de Sistemas Discretos para Sistemas Contínuos (Sólidos)

E.2.1 Conceito Físico

E.2.2 Formulação Matemática: Limite de Somatórias para Integrais

a) Massa

b) Distribuições Lineares, Superficiais e Volumétricas - Simetrias

c) Centro de Massa
d) Prescrição Geral

E.3 Leis de Conservação

E.4 Problemas Elementares Típicos e Exemplos
E.4.1 Determinação do Centro de Massa de Corpos Rígidos
E.4.2 Movimento de um Corpo Rígido

E.5 Sistemas com Massa Variável
E.5.1 Discussão Geral
a) Conceito
b) Leis Físicas Básicas
E.5.2 Movimentos de Foguetes
a) Fenômeno Básico
b) Notação para Velocidades e Massas
c) Equação de Movimento de um Foguete
d) Propriedades e Interpretações Físicas
E.5.3 Outros Exemplos

**Referências**

- Básica: Marion-Thornton, Cap. 9.
- Complementares: Symon, Cap. 4 e Goldstein, Seção 1.2.

• **QUESTÕES PROPOSTAS**

## B. Conceitos Básicos e Notação

**Questão 1**

Considere um sistema de $n$ partículas com massas $m_\alpha$ e vetores posição $\vec{r}_\alpha$, em relação à uma origem fixa $O$, $\alpha = 1, 2, 3, ...., n$.

a) Escreva a expressão do vetor posição do centro de massa do sistema, em relação a $O$.

b) Seja $\vec{F}_\alpha^{(e)}$ a força <u>externa</u> sobre a $\alpha$-ézima partícula do sistema e $\vec{f}_{\alpha\beta}$ a força <u>interna</u> exercida na partícula $\alpha$ pela partícula $\beta$ do sistema. Escreva as equações de movimento do sistema (Segunda Lei de Newton).

**Questão 2**

a) O que significam (estabelecem) as formas fraca e forte da Terceira Lei de Newton?

b) Dê exemplos de forças que obedecem ou não a essas formas.

## C. Teoremas e Leis de Conservação

**Questão 3**

Reveja as deduções e os teoremas de conservação associados ao movimento de uma única partícula: momento linear, momento angular e energia (consulte, por exemplo, Thornton-Marion Sec. 2.5).

**Questão 4**

Da questão 1, para um sistema de $n$ partículas, a força <u>interna</u> <u>total</u> (resultante sobre todas as partículas) pode ser expressa por

$$\vec{f}^{(i)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta}.$$

a) Mostre que pode-se expressar

$$\vec{f}^{(i)} = \sum_{\alpha<\beta} [\vec{f}_{\alpha\beta} + \vec{f}_{\beta\alpha}],$$

onde o símbolo de somatória significa soma sobre $\alpha$ e $\beta$, indo de $1$ a $n$, com $\alpha$ menor que $\beta$.

b) Mostre que se as forças internas $\vec{f}_{\alpha\beta}$ obedecem a <u>forma</u> <u>fraca</u> da Terceira Lei de Newton, então

$$\vec{f}^{(i)} = 0.$$

**Questão 5**

Supondo que as forças internas obedecem a <u>forma</u> <u>fraca</u> da Terceira Lei de Newton, demonstre o seguinte Teorema e Corolário:

a) *Teorema do Momento Linear para um Sistema de Partículas*: "A taxa de variação do momento linear total do sistema com o tempo é igual à força externa total".

b) *Corolário - Lei de Conservação do Momento Linear de um Sistema de Partículas*: "Se não há forças externas agindo no sistema, o momento linear total é constante".

**Questão 6**

Considerando a definição do centro de massa de um sistema de partículas, demonstre os seguintes *Teoremas*:
a) "O momento linear total do sistema é igual ao produto da massa total do sistema pela velocidade do centro de massa".
b) "O centro de massa de um sistema de partículas move-se como uma única partícula, cuja massa é a massa total do sistema, submetida a uma força igual à força externa total que age sobre o sistema".
c) "O momento linear total do sistema em relação ao centro de massa é nulo".

**Questão 7**

Mostre que, se as forças internas $\vec{f}_{\alpha\beta}$ obedecem a <u>forma</u> <u>forte</u> da Terceira Lei de Newton, então o torque total devido às <u>forças</u> <u>internas</u>, em relação à origem fixa $O$, é nulo:

$$\vec{N}^{(i)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left[ \vec{r}_\alpha \times \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta} \right] = 0.$$

**Questão 8**

Supondo que as forças internas de um sistema de $n$ partículas obedecem à <u>forma</u> <u>forte</u> da Terceira Lei de Newton, demonstre o seguinte teorema e corolário:
a) *Teorema do Momento Angular para um Sistema de Partículas*: "A taxa de variação do momento angular total do sistema com o tempo é igual ao torque externo aplicado".
b) *Corolário - Lei de Conservação do Momento Angular de um Sistema de Partículas*: "Se o torque aplicado externo é nulo, o momento angular total do sistema é constante no tempo."

**Questão 9**

Para um sistema de $n$ partículas, considere a posição do centro de massa (CM) $\vec{R}$, em relação à origem $O$ e os vetores posição das partículas em relação ao CM: $\vec{r}_\alpha^{\,\prime}$, $\alpha = 1, 2, ..., n$.

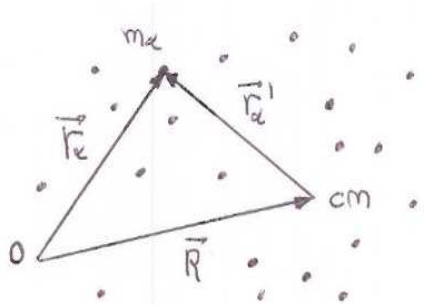


Figura 1: Questão 9.

a) Mostre que:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{R} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}' = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{r}_\alpha{}' \times m_\alpha \dot{\vec{R}} = 0.$$

b) Introduzindo as coordenadas $\dot{\vec{R}}$ e $\vec{r}_\alpha{}'$ na expressão geral do momento angular total do sistema, em relação à origem $O$, demonstre o seguinte resultado: "O momento angular total em relação à origem é a soma do momento angular do centro de massa em relação à origem e do momento angular do sistema em relação ao centro de massa":

$$\vec{L} = \vec{L}^{CM} + \vec{L}\,' = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{r}_\alpha{}' \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}'.$$

c) Mostre que a mesma decomposição do ítem anterior pode ser feita no caso do torque (externo) que atua no sistema:

$$\vec{N}^{(e)} = \vec{N}^{CM} + \vec{N}\,' = \vec{R} \times \vec{F}^{(e)} + \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{r}_\alpha{}' \times \vec{F}_\alpha^{(e)}.$$

d) Derivando $\vec{L}$ do ítem (b) em relação ao tempo, mostre que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)}.$$

**Questão 10**

O trabalho realizado pela força resultante sobre *cada partícula* de um sistema, entre duas posições, é dado por

$$W_\alpha = \int_{\vec{r}_{\alpha_1}}^{\vec{r}_{\alpha_2}} \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{r}_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, ..., n.$$

a) Considerando duas configurações do sistema, 1 e 2, e utilizando a segunda lei de Newton, mostre que o <u>trabalho</u> <u>total</u> pode ser expresso por

$$W_{12} = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_1^2 d\left[\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}\right] = T_2 - T_1,$$

onde $v_\alpha = \dot{r}_\alpha$ e que, para uma configuração genérica, tem-se

$$T = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2.$$

b) Considerando as coordenadas em relação ao centro de massa, questão 9, demonstre o seguinte resultado: "A energia cinética total do sistema é a soma da energia cinética de uma partícula com massa total do sistema, movendo-se com a velocidade do centro de massa e a energia cinética das partículas individuais, em relação ao centro de massa".

c) Os resultados dos dois ítens anteriores dependem de alguma das formas da terceira lei de Newton?

**Questão 11**

a) Mostre que, em termos das forças internas e externas, o trabalho total entre duas configurações de um sistema de partículas (1 e 2), pode ser expresso por

$$W_{12} = W_{12}^{(e)} + W_{12}^{(i)},$$

onde

$$W_{12}^{(e)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_1^2 \vec{F}_\alpha^{(e)} \cdot d\vec{r}_\alpha \qquad \text{e} \qquad W_{12}^{(i)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta\neq\alpha} \int_1^2 \vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_\alpha.$$

b) Mostre que se as forças internas $\vec{f}_{\alpha\beta}$ obedecem a forma fraca da terceira lei de Newton, pode-se expressar:

$$W_{12}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta\neq\alpha} \int_1^2 \vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_{\alpha\beta}. \qquad \text{ou} \qquad W_{12}^{(i)} = \sum_{\alpha<\beta} \int_1^2 \vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_{\alpha\beta}.$$

onde $d\vec{r}_{\alpha\beta} = d\vec{r}_\alpha - d\vec{r}_\beta$.

**Questão 12**

Com relação à questão anterior:

a) Suponha que as *forças externas são conservativas* e portanto deriváveis de energias potenciais que dependem somente das posições das partículas. Denotando $U_\alpha(\vec{r}_\alpha) = U_\alpha$ tem-se

$$\vec{F}_\alpha^{(e)} = -\vec{\nabla}_\alpha U_\alpha, \qquad \text{onde} \qquad \vec{\nabla}_\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_{\alpha,1}}, \frac{\partial}{\partial x_{\alpha,2}}, \frac{\partial}{\partial x_{\alpha,3}}).$$

Mostre que

$$W_{12}^{(e)} = -\sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha|_1^2.$$

b) Suponha que as *forças internas são conservativas*, de modo que as energias potenciais associadas dependem apenas das posições relativas das partículas interagentes e que as forças obedecem à forma <u>fraca</u> da terceira lei de Newton , $\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta = \vec{r}_{\alpha\beta}$. Denotando ("barra" para energia interna),

$$\bar{U}_{\alpha\beta}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) = \bar{U}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \bar{U}_{\alpha\beta},$$

tem-se

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{\nabla}_\alpha \bar{U}_{\alpha\beta} \qquad \text{e} \qquad \vec{f}_{\beta\alpha} = -\vec{\nabla}_\beta \bar{U}_{\alpha\beta}.$$

Mostre que

$$\vec{\nabla}_\alpha \bar{U}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_{\alpha\beta} = d\bar{U}_{\alpha\beta} \qquad (\text{diferencial total de } \bar{U}_{\alpha\beta})$$

e

$$W_{12}^{(i)} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta\neq\alpha} \bar{U}_{\alpha\beta}\,|_1^2 = -\sum_{\alpha<\beta}^{n} \bar{U}_{\alpha\beta}\,|_1^2.$$

**Questão 13**

Com base nos resultados das duas questões anteriores, mostre que pode-se expressar

$$W_{12} = -(U_2 - U_1) = -\Delta U,$$

onde $U_1$ e $U_2$ são as energias potenciais totais (externa e interna) do sistema nas duas configurações. Para uma configuração genérica:

$$U = U^{(e)} + U^{(i)} = \sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta \neq \alpha} \bar{U}_{\alpha\beta}.$$

**Questão 14**

Com base nos resultados das questões 10 e 13, a energia mecânica total do sistema de partículas se conserva? Justifique analiticamente a resposta.

**Questão 15**

Faça um resumo das fórmulas que representam os principais resultados demonstrados sobre a mecânica de um sistema de partículas (seções C.1 a C.3). Em cada caso, indique as condições (hipóteses) assumidas.

## D. Colisões de Duas Partículas

**Questão 16**

a) Quais hipóteses são assumidas em nosso estudo sobre colisões de duas partículas? Explique, em particular, o que significam *forças impulsivas*.
b) Essas hipóteses implicam em quais leis de conservação? Justifique a resposta.

**Questão 17**

a) Explique o conceito de <u>fator $Q$</u> (ou valor $Q$) associado a uma colisão de duas partículas
b) Discuta as energias envolvidas nos estados inicial e final (antes e depois) de uma colisão e dê as expressões correspondentes.
c) O que são *processos endoérgicos* e *exoérgicos*?
d) O que determina a classificação das colisões em elásticas e inelásticas?

**Questão 18**

Considere uma <u>colisão</u> <u>elástica</u> de um projétil de massa $m_1$ com um alvo de massa $m_2$ em repouso na origem do SL.
a) Com base nas notações das tabelas 1 e 2, escreva as leis de conservação do momento linear no SL e no SCM.
b) Sendo $\psi$ e $\xi$ os ângulos de espalhamento do projétil e alvo, respectivamente, no SL e $\theta$ o do projétil no SCM, construa os diagramas de momentos lineares para os estados inicial e final, no SL e SCM.
c) Explique o que é *plano de colisão*.

| estado | partícula | posições | velocidades | momentos lineares |
|---|---|---|---|---|
| inicial | projétil | $\vec{r}_1$ | $\vec{u}_1 = \dot{\vec{r}}_1$ | $\vec{p}_1 = m_1\vec{u}_1$ |
| | alvo | $\vec{r}_2$ (= 0) | $\vec{u}_2 = \dot{\vec{r}}_2$ (= 0) | $\vec{p}_2 = m_2\vec{u}_2$ (= 0) |
| final | projétil | $\vec{s}_1$ | $\vec{v}_1 = \dot{\vec{s}}_1$ | $\vec{q}_1 = m_1\vec{v}_1$ |
| | alvo | $\vec{s}_2$ | $\vec{v}_2 = \dot{\vec{s}}_2$ | $\vec{q}_2 = m_2\vec{v}_2$ |

Tabela 1: Notação para as grandezas no Sistema de Laboratório (SL).

| estado | partícula | posições | velocidades | momentos lineares |
|---|---|---|---|---|
| inicial | projétil | $\vec{r}_1{}'$ | $\vec{u}_1{}' = \dot{\vec{r}}_1{}'$ | $\vec{p}_1{}' = m_1\vec{u}_1{}'$ |
| | alvo | $\vec{r}_2{}'$ | $\vec{u}_2{}' = \dot{\vec{r}}_2{}'$ | $\vec{p}_2{}' = m_2\vec{u}_2{}'$ |
| final | projétil | $\vec{s}_1{}'$ | $\vec{v}_1{}' = \dot{\vec{s}}_1{}'$ | $\vec{q}_1{}' = m_1\vec{v}_1{}'$ |
| | alvo | $\vec{s}_2{}'$ | $\vec{v}_2{}' = \dot{\vec{s}}_2{}'$ | $\vec{q}_2{}' = m_2\vec{v}_2{}'$ |

Tabela 2: Notação para as grandezas no Sistema de Centro de Massa (SCM).

**Questão 19**

a) Mostre que com base nas hipóteses assumidas, a velocidade $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ do centro de massa das partículas colidentes no SL é constante na colisão.
b) Determine a expressão de $\vec{V}$ em termos das velocidades que caracterizam os estados inicial e final.
c) *Justificando a resposta*, construa o diagrama de velocidades do projétil, do alvo e do CM no SL após a colisão, incluindo os ângulos de espalhamento $\psi$, $\xi$ e $\theta$ (Thornton-Marion, Fig. 9.10.c).

**Questão 20**

Considere os movimentos do alvo e projétil após a colisão. Sendo $\vec{V}$ a velocidade do CM no SL e com base na notação das tabelas 1 e 2, mostre que

$$\vec{V} + \vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 \quad \text{(projétil)} \qquad \text{e} \qquad \vec{V} + \vec{v}_2{}' = \vec{v}_2 \quad (\text{alvo})$$

**Questão 21**

a) Considere o movimento do *projétil* após a colisão. *Justificando a resposta*, construa o diagrama das velocidades ($\vec{V}$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_1{}'$), incluindo os ângulos de espalhamento, $\psi$ e $\theta$ (Thornton-Marion, Fig. 9-11-a).
b) Explique em detalhe o que significa espalhamento "para frente"e "para tras"no SCM.

**Questão 22**

*Justificando a resposta*, construa o diagrama das velocidades do $alvo$ após a colisão, velocidades $\vec{V}$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_2{}'$ e ângulos de espalhamento $\xi$ e $\theta$ (Thornton-Marion, Fig. 9-12).

**Questão 23**

Com base nos diagramas de velocidades e leis de conservação, demonstre as seguintes relações algébricas entre as velocidades envolvidas numa colisão elástica (os números referem-se aos números das equações do capítulo 9 do Thornton-Marion e a notação é a indicada nas tabelas 1 e 2):

a) Velocidade inicial do alvo no SCM:

$$\vec{u}_2^{\,\prime} = -\vec{V}, \qquad u_2^{\,\prime} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 \qquad (9.63)$$

b) Velocidades no SCM (projétil e alvo, inicial e final):

$$u_1^{\,\prime} = v_1^{\,\prime} \qquad \text{e} \quad u_2^{\,\prime} = v_2^{\,\prime} \qquad (9.64)$$

c) Velocidade relativa inicial projétil-alvo (SL e SCM):

$$u_1 = u_1^{\,\prime} + u_2^{\,\prime}$$

d) Velocidades finais no SCM e velocidade relativa inicial no SL:

$$v_2^{\,\prime} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 \qquad (9.65.a) \qquad \text{e} \qquad v_1^{\,\prime} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1 \qquad (9.65.b)$$

e) Velocidades do CM no SL e final do projétil no SCM em termos das massas:

$$\frac{V}{v_1^{\,\prime}} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (9.68)$$

f) Com base no resultado do ítem anterior, qual a relação entre as massas no caso de espalhamento “para frente” e “para tras” no SCM?

**Questão 24**

Considerando $m_2 > m_1$, demonstre as seguintes relações envolvendo os ângulos de espalhamento do projétil no SL ($\psi$) e no SCM ($\theta$):

a) Em termos das velocidades:

$$\tan\psi = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta + \frac{V}{v_1^{\,\prime}}} \qquad (9.67)$$

b) Em termos das massas:

$$\tan\psi = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}} \qquad (9.69)$$

c) Quais as relações entre $\psi$ e $\theta$ nos casos em que $m_2 >> m_1$ e $m_2 = m_1$? Explique.

**Questão 25**

Demonstre as seguintes relações envolvendo os ângulos de espalhamento do alvo no SL ($\xi$) e no SCM ($\pi + \theta$):

a) Em termos das velocidades:

$$\tan\xi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{V}{v_2'} - \cos\theta}$$

b) Relação angular:

$$\xi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \qquad (9.74)$$

c) No caso em que $m_1 = m_2$, os ângulos de espalhamento no SL do alvo ($\xi$) e do projétil ($\psi$) obedecem:

$$\xi + \psi = \frac{\pi}{2} \qquad (9.75)$$

**Questão 26**

Thornton - Marion, exemplo 9.6.

**Questão 27**

Considere uma colisão unidimensional (frontal) de um projétil com um alvo em repouso (SL).
a) Dê a definição de *coeficiente de restituição*.
b) Qual o valor desse coeficiente para colisões perfeitamente elásticas e perfeitamente inelásticas? Explique.

**Questão 28**

Considere uma colisão unidimensional perfeitamente inelástica de um projétil com um alvo em repouso. Essa colisão é *endoérgica* ou *exoérgica*? Justifique a resposta.

**Questão 29**

Thornton - Marion, exemplo 9.9.

## E. Limite para o Contínuo - Corpos Rígidos

**Questão 30**

a) Dê a definição clássica de corpo rígido e discuta uma representação pictórica desse sistema.
b) De acordo com a definição clássica, quais leis de conservação aplicam-se a um corpo rígido? Explique.

**Questão 31**

Discuta os aspectos físicos e matemáticos envolvidos quando se considera o limite de um sistema discreto de partículas para um sistema contínuo (distribuição contínua de massa).

**Questão 32**

a) Utilizando coordenadas esféricas e sem considerações de simetria, determine a posição do centro de massa de um hemisfério sólido e homogêneo (densidade volumétrica constante), de raio $a$.

b) Resolva o mesmo problema através do método apresentado no exemplo 9.1 do Thornton-Marion.

c) Estude as resoluções apresentadas no Symon, Sec. 5.5 (figura 5.9).

**Questão 33**

Thornton - Marion, problema 9.8. Resposta: $\vec{R} = (X, Y) = (0, \frac{a}{3\sqrt{2}})$.

**Questão 34**

Determine o centro de massa de uma semi-coroa de raio interno $a$, raio externo $b$ e densidade superficial de massa $\sigma = \sigma(r) = Ar + B$, onde $A$ e $B$ são constantes e $r$ é a distância ao centro, $a \leq r \leq b$.

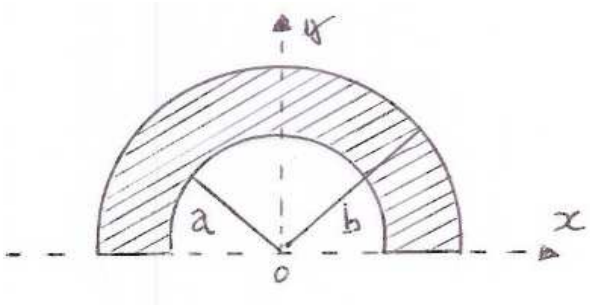


Figura 2: Questão 34.

$$\text{Resposta}: \quad \vec{R} = (X, Y), \qquad X = 0, \quad Y = \frac{1}{\pi}\,\frac{3A(b^4 - a^4) + 4B(b^3 - a^3)}{2A(b^3 - a^3) + 3B(b^2 - a^2)}.$$

**Questão 35**

Considere o movimento de um pião homogêneo e simétrico de massa $M$ e momento angular intrínseco $S$ (spin). Seja $R$ a distância do CM do pião ao ponto $O$ de contato com o solo (figura) e $g$ a aceleração da gravidade.

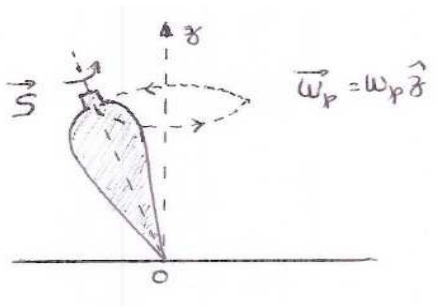


Figura 3: Questão 35.

a) Explique fisicamente a razão do movimento de precessão do pião (rotação de $\vec{S}$ em torno do eixo $z$). Mostre, em particular, que o efeito do torque resultante é variar a direção e sentido de $\vec{S}$, mas não seu módulo.
b) Determine a velocidade angular de precessão $\omega_p$. Por que essa velocidade aumenta antes de o pião tombar?
c) Mostre que o torque sobre o pião, em relação ao ponto $O$, pode ser expresso por

$$\vec{N}_O = \vec{\omega}_p \times \vec{S}.$$

**Questão 36**

Estude os exemplos 9.2 a 9.5 e 9.10 do Thornton - Marion.

**Questão 37**

Um foquete de massa $m$ (veículo mais combustível), submetido a uma força externa resultante $\vec{F}$, move-se com velocidade $\vec{v}$ em relação a um referencial fixo.
a) Se $\vec{u}$ é a velocidade de exaustão (material expelido pelo motor) em relação ao foguete, mostre que a equação de movimento tem a forma

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\,\frac{dm}{dt} + \vec{F}.$$

b) Discuta o significado físico dessa equação. O que é impulso do motor?

**Questão 38**

No caso da questão anterior, considere que a força externa é nula, $F = 0$. Seja $\vec{v}_0$ a velocidade do foguete num dado instante $t_0$, quando sua massa é $m_0$.
a) Se $\vec{v}(t)$ é a velocidade num instante posterior $t$ quando sua massa é $m(t)$, mostre que

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \vec{u}\,\ln\left[\frac{m_0}{m(t)}\right].$$

b) Discuta o significado físico dessa equação.

**Questão 39**

No caso da questão anterior, seja $m_0 = m_V + m_C$ (massa do veículo mais massa do combustível).
a) Mostre que após a queima total do combustível, a velocidade do foguete é dada por (Fórmula de Tsiolkovsky):

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \vec{u}\,\ln\left[1 + \frac{m_C}{m_V}\right].$$

b) Discuta o significado físico desse resultado, em particular, a utilização de múltiplos estágios (tanques de combustível) em vôos espaciais.

**Questão 40**

Sobre uma esteira em movimento deixa-se cair areia a uma taxa contínua $dm/dt$. Desprezando o atrito da esteira com o meio, determine a força $F$ que deve ser aplicada na esteira, de modo que ela se movimente com velocidade constante $V$

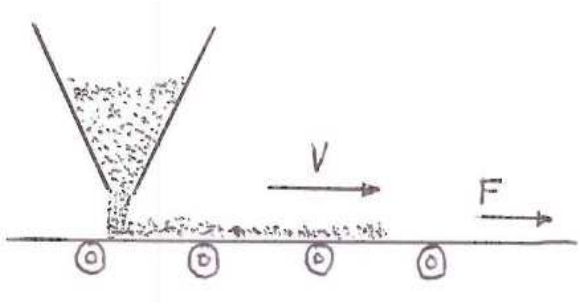


Figura 4: Questão 40.

**Questão 41**

Thornton-Marion, problema 9-15. Resposta: $v(x) = \sqrt{\frac{2gx}{3}}, \quad a = \frac{g}{3}$.