F502 Eletromagnetismo I

Turma A 1º Semestre - 2010 Márcio José Menon

Capítulo 2 ELETROSTÁTICA

• ÍNDICE

2.1 Campo Elétrico
2.2 Divergência e Rotacional de Campos Eletrostáticos
2.3 Potencial Elétrico
2.4 Trabalho e Energia em Eletrostática
2.5 Condutores

2.1. Campo Elétrico
a. Lei de Coulomb
a.1 Duas Cargas Puntuais em Repouso
a.1.1 Sistema e Notação
a.1.2 Expressão Analítica
a.1.3 Constante k e Permissividade do Vácuo
a.1.4 Ação e Reação
a.2 Distribuição Discreta de Cargas Puntuais em Repouso - Princípio da Superposição
a.2.1 Sistema e Notação
a.2.2 Princípio da Superposição
b. Campo Elétrico: Conceito e Definição
b.1 Distribuição Discreta de Cargas
b.1.1 Expressão Geral
b.1.2 Comentários
b.1.3 Exemplos
b.2 Distribuições Contínuas de Cargas
b.2.1 Limite da Distribuição Discreta para Contínua
b.2.2 Distribuições: Densidades de Carga Lineares, Superficiais e Volumétricas
b.2.3 Exemplos
b.3 Expressão Geral do Campo Eletrostático

2.2 Divergência e Rotacional de Campos Eletrostáticos
a. Lei de Gauss (Coulomb) - Divergência
a.1 Linhas de Campo e Fluxo
a.1.1 Linhas de Campo: Definição e Propriedades
• Origens
• “Visualização" de um Campo Eletrostático
• Definição de Linhas de Campo
• Intensidade do Campo e Densidade de Linhas
• Exemplos
• Campos Uniformes e Campos Estacionários
a.1.2 Fluxo de um Campo Vetorial
• Conceito Geométrico
• Expressão Analítica
• Propriedades

a.2 Forma Integral
a.2.1 Carga Puntual
a.2.2 Distribuição Discreta de Cargas
a.2.3 Distribuição Contínua de Cargas
a.2.4 Propriedades Notáveis
a.2.5 Aplicações no Cálculo do Campo Elétrico
• Comentários sobre Simetrias
• Exemplos
a.3 Forma Diferencial - Divergente do Campo Eletrostático
a.3.1 Dedução
a.3.2 Comentários
b. Rotacional
b.1 Forma Diferencial
b.1.1 Campo Eletrostático de Distribuições Discreta e Contínua de Cargas
b.1.2 Cálculo do Rotacional
b.2 Forma Integral
b.2.1 Teorema de Gauss
b.2.1 Comentários
c. Equações de Maxwell da Eletrostática no Vácuo

2.3 Potencial Elétrico
a. Conceito e Definição
a.1 Campo Escalar Potencial e Diferença de Potencial
a.2 Potencial em um Ponto do Espaço
b. Cálculo do Potencial
b.1 Determinação do Potencial a Partir do Campo Elétrico
b.2 Potencial de Distribuições de Cargas Localizadas
b.2.1 Princípio da Superposição
b.2.2 Distribuições Discretas de Cargas Puntuais
b.2.3 Distribuições Contínuas
b.2.4 Exemplos
c. Comentários sobre o Campo Potencial
c.1 Vantagem da Formulação Via Potencial
c.2 Ponto de Referência
d. Equações de Poisson e de Laplace para o Potencial Elétrico
d.1 Equações Diferenciais
d.2 Soluções Formais e Condições de Contorno
e. Condições de Contorno em Superfícies Carregadas no Vácuo
e.1 Formulação do Problema
e.2 Campo Elétrico
e.2.1 Componente Normal
e.2.2 Componente Tangencial
e.2.3 Expressão Geral
e.3 Potencial Elétrico
e.3.1 Continuidade Através da Superfície
e.3.2 Derivada Normal do Potencial
f. Campos Eletrostáticos Vetorial e Escalar: Resumo

2.4 Trabalho e Energia em Eletrostática

a. Energia Potencial e Trabalho
b. Energia Potencial de uma Distribuição Discreta de Cargas Puntiformes
    b.1 Expressão Geral
    b.2 Auto-Energia de uma Carga Puntiforme
c. Energia Potencial de uma Distribuição Contínua de Cargas
d. Energia Potencial em Termos do Campo Elétrico
e. Propriedades Notáveis da Energia Potencial
    e.1 Energia de Configuração e Auto-Energia
    e.2 Energia Armazenada e Densidade de Energia
    e.3 Auto-Energia e Raio Clássico de uma Partícula
    e.4 Princípio da Superposição

2.5 Condutores

a. Condutores e Isolantes (ou Dielétricos)
b. Propriedades Eletrostáticas Básicas dos Condutores
    b.1 Condutor Volumétrico sem Cavidade Interna
    b.2 Condutores Volumétricos com Cavidades Internas
c. Força e Pressão sobre um Condutor Carregado
    c.1 Campos Envolvidos
    c.2 Força sobre o Condutor
    c.3 Pressão Eletrostática
d. Determinação da Carga Superficial num Condutor Volumétrico
e. Capacitores
    e.1 Coeficientes de Potencial e Coeficientes de Capacitância
    e.2 Capacitância e Capacitores
    e.3 Energia Armazenada num Capacitor

• QUESTÕES PROPOSTAS

Os exemplos e problemas indicados, referem-se ao livro texto principal (Griffiths, 3a. edição).

2.1 Campo Elétrico

Questão 1.
a) Explique a origem do conceito e da definição do Campo Elétrico na Eletrostática. Para tanto, mostre que, a partir da Lei de Coulomb, o campo numa posição $\vec{r}$ devido a uma *distribuição discreta* de cargas puntiformes q_1, q_2,... q_n, no vácuo, localizadas nas posições $\vec{r}_1{}'$, $\vec{r}_2{}'$,... $\vec{r}_n{}'$, respectivamente, é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\mathscr{r}_i^2} \hat{\mathscr{r}}_i,$$

onde $\vec{\mathscr{r}}_i = \vec{r} - \vec{r}_i{}'$, $i = 1, 2, ..., n$.
b) Quais condições devem ser assumidas para que a expressão acima seja válida?

Questão 2. Problema 2.2. (resolvam também sem considerar simetrias).

Questão 3. Discuta o conceito de *distribuição contínua* de cargas (limite para o contínuo), mostrando que nesse caso, o campo eletrostático num ponto $\vec{r}$ é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \frac{dq}{\mathscr{r}^2} \hat{\mathscr{r}},$$

onde $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ e $\vec{r}\,'$ é o vetor posição do elemento de carga dq.

Questão 4. Exemplo 2.1 (resolvam também sem considerar simetrias).

Questão 5. Problema 2.7 (resolvam também sem considerar simetrias).

2.2 Divergência e Rotacional de Campos Eletrostáticos

Questão 6. O que são *linhas de campo*? Quais informações podem ser obtidas a respeito de um campo $\vec{E}$ a partir de suas linhas de campo. Dê exemplos.

Questão 7. Discuta as linhas de campo de campos uniformes e de campos estacionários. As linhas de campos estacionários podem se cruzar? Justifique a resposta.

Questão 8. Explique o conceito de fluxo de um campo vetorial $\vec{F}(\vec{r})$ através de uma superfície S, discutindo as características que levam à definição

$$\Phi \equiv \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a}, \qquad d\vec{a} = da\, \hat{n}.$$

Questão 9. A partir da lei de Coulomb e do princípio da superposição, deduza a forma integral da lei de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, da = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}.$$

Questão 10.
a) Leiam o artigo (Pasta F502 - BIF): “Um Pouco de Luz na Lei de Gauss", C. Goldman, E. Lopes, M.R. Robilotta, *Revista de Ensino de Física*, Vol. 3, N. 3, setembro de 1981, pags. 3 a 15.
b) Explique fisicamente e demonstre a seguinte afirmação que aparece na página 9 desse artigo: “...o espaço vazio não seria eletricamente neutro num universo onde o campo elétrico criado por uma carga puntiforme variasse com o inverso do cubo da distância."

Questão 11.
a) Quais são os critérios de escolha de uma superfície gaussiana?
b) O campo elétrico que aparece na forma integral da lei de Gauss é devido às cargas internas ou externas à superfície, ou a ambas? Explique.
c) A lei de Gauss depende do fato de a potência da distância que aparece na lei de Coulomb ser 2? Explique.
Sugestão: consulte também o artigo da questão 10.

Questão 12. Exemplo 2.3.

Questão 13. Exemplo 2.4

Questão 14. Exemplo 2.5.

Questão 15. Problema 2.11.

Questão 16. Problema 2.12.

Questão 17. Problema 2.43.

Questão 18. Problema 2.13

Questão 19. Problema 2.14.

Questão 20. Problema 2.15.

Questão 21. Problema 2.16.

Questão 22. Problema 2.18.

Questão 23.
a) A partir da forma integral da lei de Gauss, deduza a forma diferencial (utilize o teorema do divergente).
b) Partindo da forma diferencial e considerando uma superfície gaussiana com cargas internas e externas, obtenha a forma integral.
c) Partindo da expressão geral do campo elétrico,

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\, \rho(\vec{r}\,')\, d\tau',$$

onde $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$, deduza a forma integral da lei de Gauss, através dos seguintes passos: (1) aplique o divergente a $\vec{E}$ no ponto $\vec{r}$; (2) utilize a definição prática da distribuição delta $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')$.

Questão 24. Seja $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ o vetor posição de um ponto e $\vec{R} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$ o vetor posição de um outro ponto, distinto e independente de $\vec{r}$. No que segue, considere o nabla atuando na posição do vetor $\vec{r}$, isto é, com coordenadas x, y e z:

$$\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Demonstre os seguintes resultados

$$\text{a)} \quad \vec{\nabla}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|^n}\right] = -n\,\frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^{n+2}} \qquad\qquad \text{b)} \quad \vec{\nabla} \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^n}\right] = 0$$

Sugestão para o ítem (b): identifique os termos

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|^n} \equiv f(\vec{r}) \qquad \text{(campo escalar)}, \qquad \vec{r} - \vec{R} \equiv \vec{A}(\vec{r}) \qquad \text{(campo vetorial)}$$

e utilize a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times [f\vec{A}] = f[\vec{\nabla} \times \vec{A}] - \vec{A} \times [\vec{\nabla} f]$.

Questão 25.
a) Mostre que o campo eletrostático definido a partir da lei de Coulomb, devido a distribuições discretas e/ou contínuas de cargas, obedece

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0.$$

b) Esse resultado depende do fato de a potência da distância que aparece na lei de Coulomb ser 2? Explique.

Questão 26. Escreva as duas equações de Maxwell da eletrostática (vácuo), formas diferencial e integral, e explique as origens físicas (experimentais) dessas leis.

2.3 Potencial Elétrico

Questão 27. Quais as consequências físicas e matemáticas do resultado $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$? Em particular, mostre que associado a $\vec{E}(\vec{r})$ existe um campo escalar $V(\vec{r})$ que pode ser expresso por

$$V(\vec{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\,\vec{l} \qquad \text{(potencial elétrico)}$$

onde $\mathcal{O}$ é o ponto de referência no qual $V \equiv 0$.

Questão 28. Da questão 24, ítem a, para $n = 1$ e $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$:

$$\vec{\nabla}\left[\frac{1}{\mathscr{r}}\right] = -\frac{\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3} = -\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2},$$

onde $\vec{\nabla}$ atua em $\vec{r}$. Utilizando esse resultado na expressão geral do campo elétrico de uma distribuição volumétrica de cargas (questão 23, ítem c),

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} dq = \vec{E}(\vec{r}) = k\int \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\,\rho(\vec{r}\,')\,d\tau',$$

mostre que $\vec{E}$ pode ser expresso por

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}),$$

onde

$$V(\vec{r}) = k\int \frac{dq}{\mathscr{r}} = k\int_{\nu} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau'$$

é o potencial em $\vec{r}$ em relação a um ponto no infinito e ν é o volume da distribuição de cargas.

Notem que uma vez verificado acima que $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$, decorre que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

Questão 29. Exemplo 2.6.

Questão 30. Exemplo 2.7.

Questão 31. Problema 2.21.

Questão 32. Problema 2.22.

Questão 33. Problema 2.25.

Questão 34. Problema 2.28.

Questão 35. A partir da forma diferencial da lei de Gauss e da expressão do campo elétrico em termos do potencial, deduza as equações diferenciais obedecidas pelo campo potencial $V(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla}^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{(Poisson)} \qquad\qquad \vec{\nabla}^2 V(\vec{r}) = 0 \quad \text{(Laplace)}$$

Em quais regiões físicas a equação de Poisson se reduz à equação de Laplace?

Questão 36. Mostre que para uma superfície carregada com densidade σ no vácuo, as condições de contorno para o campo elétrico e para o potencial são dadas por (ver figura)

$$\vec{E} - \vec{E}\,' = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V'}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

onde

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \vec{\nabla} V \cdot \hat{n}$$

é a derivada normal de V (Cap. 1, seção 1.2.h).

Questão 37. Problema 2.30.

2.4 Trabalho e Energia em Eletrostática

Questão 38.
a) A partir da definição de trabalho realizado por uma força, mostre que o trabalho mínimo necessário para deslocar uma carga puntiforme q do infinito (potencial nulo) até um ponto $\vec{r}$, onde existe um potencial $V(\vec{r})$, é dado por

$$W = qV(\vec{r}).$$

b) Demonstre, em detalhe, que a *energia potencial eletrostática de configuração* de uma distribuição de cargas puntiformes q_1, q_1,..., q_n, é dada por

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i),$$

onde $V(\vec{r}_i)$ é o potencial na posição $\vec{r}_i$ da carga q_i, devido às demais $n-1$ cargas da distribuição. Liste todas as hipóteses utilizadas na dedução.

Questão 39. Problema 2.31.

Questão 40. Com base no resultado da questão 38, considere o limite para uma distribuição contínua, volumétrica de cargas $\rho(\vec{r}\,')$, num volume ν e mostre que a energia potencial eletrostática é dada por

$$W = \frac{1}{2}\int_{\nu} \rho(\vec{r}\,')V(\vec{r}\,')d\tau'.$$

Questão 41. Das questões 38 e 40, a energia eletrostática de distribuições de cargas são dadas por

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i) \quad \text{(discreta)} \qquad\qquad W = \frac{1}{2}\int dq V(\vec{r}\,') \quad \text{(contínua)}$$

Nos dois casos são levadas em conta a energia de configuração e as auto-energias? Explique em detalhe.

Questão 42. Exemplo 2.8 - Solução 1.

Questão 43. Problema 2.32.

Questão 44. Com base no resultado da questão 40, mostre que em termos de $\vec{E}$, a energia potencial é dada por

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\text{todo espaço}} E^2\, d\tau.$$

Qual interpretação física pode-se obter desse resultado?

Sugestão: utilize $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ e a identidade vetorial $\vec{\nabla}[f\vec{A}] = f\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$

Questão 45. Exemplo 2.8 - Solução 2.

Questão 46. Problema 2.34.

Questão 47.

a) Estime a ordem de grandeza da razão das forças gravitacional e elétrica entre dois elétrons. Dados:

$m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ Kg,
$q_e = -1,9 \times 10^{-19}$ C,
$K = 9 \times 10^9$ Nm^2/C^2,
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ m^3/s^2 Kg (constante gravitacional).

b) O valor dessa razão permite assumir qual hipótese a respeito da massa de repouso de uma partícula?

c) Com base na idéia de auto-energia de uma carga, discuta o conceito de raio clássico de uma partícula, mostrando que para uma partícula de massa m, carga q esse o raio clássico é dado por

$$R_{\text{clas.}} = \left[\frac{q^2}{m}\right] \times 10^7\, \frac{\text{Ns}^2}{\text{C}^2}.$$

d) Determine os raios clássicos do elétron e do próton ($m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ Kg). Esses resultados são consistentes com as experiências? Se não são, qual a explicação dessas discrepâncias?

Questão 48. A energia eletrostática de um sistema de cargas composto obedece o Princípio da Superposição? Justifique a resposta.

2.5 Condutores

Questão 49.
a) O que significa um condutor em *equilíbrio eletrostático*?
b) Mostre que para um condutor volumétrico maciço, carregado e em equilíbrio eletrostático:
b1) o campo elétrico no interior é nulo;
b2) a densidade volumétrica de carga líquida no interior é nula;
b3) o condutor é uma equipotencial (potencial do condutor);
b4) o campo elétrico é normal à superfície;
b5) as cargas (líquidas ou induzidas) situam-se na superfície do condutor.

Questão 50. Discuta as características de um condutor volumétrico com cavidade interna, no caso de existência ou não de carga na cavidade.

Questão 51. Problema 2.52.

Questão 52. Problema 2.35.

Questão 53. Considere um condutor com densidade superficial de carga σ submetido a um campo elétrico externo. Mostre que a força por unidade de área (pressão eletrostática) na superfície do condutor é dada por

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2.$$

Questão 54. Problema 2.38.

Questão 55.
a) Explique o que são *coeficientes de potencial* e *coeficientes de capacitância*.
b) Discuta o conceito de capacitor, explicando a definição de *capacitância* C através da expressão

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Questão 56. Mostre que a energia armazenada num capacitor pode ser expressa por

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad \text{ou} \qquad W = \frac{1}{2}CV^2.$$

Questão 57. Problema 2.39.