F415 - MECÂNICA GERAL II

Turma C 1º Semestre - 2014 Marcio José Menon

3. MOVIMENTO NUM REFERENCIAL NÃO INERCIAL

• ÍNDICE

A. Conceitos Básicos
B. Equação de Movimento num Referencial Acelerado
C. Aplicações Físicas

A. Conceitos Básicos
A.1 Referenciais Inercias e Não Inerciais
A.1.1 Sistemas de Referência ou Referenciais
a) Referencial
b) Sistema de Coordenadas
A.1.2 Referencial Inercial
a) Conceito e Definição
b) Referenciais Considerados Inerciais
A.1.3 Objetivos do Capítulo e Notação Básica
a) Objetivos
b) Notação
A.2 Velocidade Angular e Eixo Instantâneo de Rotação
A.2.1 Vetor Velocidade Angular
A.2.2 Eixo Instantâneo de Rotação

B. Equação de Movimento num Referencial Acelerado
B.1 Relação entre as Acelerações nos Referenciais Inercial e Acelerado
B.1.1 Aceleração Associada à Rotação Pura
a) Referenciais e Vetor Posição
b) Relação entre as Velocidades: Derivada Temporal
c) Relação entre as Acelerações
B.1.2 Aceleração Associada à Translação Pura
a) Referenciais e Vetores Posição
b) Relação entre as Velocidades e entre as Acelerações
B.1.3 Caso Geral: Rotação e Translação
a) Referenciais e Vetores Posição
b) Relação entre as Acelerações
B.2 Equação de Movimento
B.2.1 Teorema de Coriolis: Força Efetiva e Forças de Inércia
B.2.2 Forças de Inércia
a) Força Translacional
b) Força Azimutal (ou de Aceleração Angular)

c) Força Centrífuga
d) Força de Coriolis
B.2.3 Comentários
a) Força Centrífuga e Aceleração Centrípeta
b) Covariância da Equação de Movimento em Referenciais Inerciais

C. Aplicações Físicas
C.0 Resumo e Comentários
C.1 O Balde Girante
C.1.1 Experimento
C.1.2 Equação de Movimento
C.1.3 Equação da Superfície
C.2 Movimentos na Superfície da Terra
C.2.1 Equação de Movimento de uma Partícula Próxima da Superfície da Terra
a) Sistema Físico
b) Referenciais
c) Equação de Movimento
C.2.2 Efeitos da Força Centrífuga
a) Aceleração da Gravidade Efetiva (Local)
b) Forma Geométrica da Terra ("Achatamento" dos Polos)
C.2.3 Efeitos da Força de Coriolis
a) Desvio para Leste na Queda Livre
b) Desvios em Movimentos Paralelos à Superfície da Terra
c) Movimento de Massas de Ar
- Ventos Alísios
- Ciclones e Furacões
- Comentários sobre Tornados e Vórtices
d) Pêndulo de Foucault
- Pêndulo Plano num Referencial Inercial
- O Experimento de Foucault
- Equação de Movimento
- Descrição Qualitativa da Precessão
- Velocidade Angular e Período de Precessão

Referências
- Marion-Thornton, Cap. 10.
- Symon, Cap. 7.
- Nussenzveig, Vol. 1, Cap. 13.
- Kittel e outros, Curso de Física de Berkeley, Vol. 1, Cap. 3.

• **QUESTÕES PROPOSTAS**

A. Conceitos Básicos

Questão 1

Efetue as seguintes estimativas:

a) Aceleração de um ponto em repouso na superfície da Terra, devida ao movimento diário de rotação da Terra em torno de seu eixo.

b) Aceleração da Terra em sua órbita em torno do Sol.

c) Aceleração do Sol em relação ao centro galáctico.

Consulte "Curso de Física de Berkeley - Volume 1 Mecânica", Cap. 3 Invariância Galileana, Seção "Sistemas de Referência Inerciais".

Questão 2

a) Explique o conceito e dê a definição de *referencial inercial*.

b) Um referencial fixo na superfície da Terra é inercial? Discuta as condições associadas.

Questão 3

a) Reveja o conceito e definição de *Velocidade Angular* $\vec{\omega}$ (Thornton-Marion, Cap. 1, Sec. 1.15).

b) Mostre em detalhe que nos dois casos indicados abaixo tem-se a seguinte relação entre os vetores:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}.$$

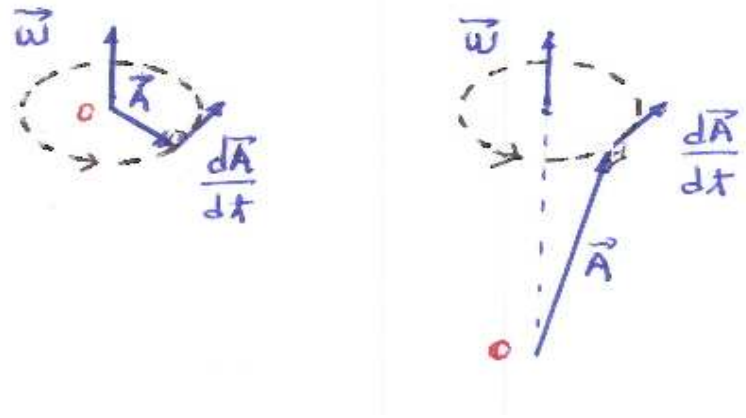


Figura 1: Questão 3.

Questão 4

a) Explique o que significa *Eixo Instantâneo de Rotação*.

b) A relação vetorial da questão anterior é válida em relação a um tal eixo? Explique.

B. Equação de Movimento num Referencial Acelerado

Questão 5

Considere um referencial inercial S_i, origem O_i e um referencial S_r, origem O_r, em rotação com velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a S_i e que as origens O_i e O_r coincidem.
a) Expresse o vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula em termos de suas componentes retangulares (cartesianas) nas bases ortonormais de S_i e S_r (utilize os indices i e r onde forem necessários). Qual a diferença essencial entre as duas bases?
b) Mostre, *em detalhe*, que de **forma operacional** as taxas temporais de variação de um vetor em S_i e S_r podem ser expressas por

$$\left[\frac{d}{dt}\right]_i = \left[\frac{d}{dt}\right]_r + \vec{\omega} \times$$

Questão 6

Thornton-Marion, exemplo 10.1.

Questão 7

Considerando os referencias S_i e S_r da questão 5, sejam $\vec{v}_r$ e $\vec{a}_r$ a velocidade e a aceleração, respectivamente, de uma partícula em relação ao referencial S_r e $\vec{a}_i$ a aceleração no referencial S_i.
a) Mostre que

$$\vec{a}_i = \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_r.$$

b) Qual a relação entre a aceleração angular (derivada de $\vec{\omega}$) calculada em S_i e em S_r? Justifique a resposta.

Questão 8

Para os referencias S_i e S_r da questão 5, considere que a origem O_r do referencial S_r possui *translação retilínea acelerada* em relação ao referencial S_i e que $\vec{R}_i$ é o vetor posição da origem O_r em relação à origem O_i.
a) O que muda na fórmula deduzida na questão anterior? Justifique a resposta.
b) Escreva a expressão geral entre as acelerações de uma partícula num referencial inercial e num referencial acelarado (caso geral de translação acelerada retilínea e rotação). e explique o significado físico de cada grandeza que aparece nessa equação (posições, velocidades, etc...).

Questão 9

Num referencial inercial S_i, seja $\vec{F}$ a resultante das forças **mecânicas** que atuam sobre uma partícula de massa m e $\vec{a}_i$ a aceleração da partícula nesse referencial. Seja S_r um referencial acelerado em relação a S_i (translação da origem e rotação, conforme questão 8).
a) Obtenha a equação de movimento (segunda lei de Newton) da partícula no referencial acelerado S_r.
b) A segunda lei de Newton possui a mesma forma nos referenciais S_i e S_r? Explique.

c) Discuta os conceitos e definições de *Força Efetiva* e de *Forças de Inércia*.
d) As forças de inércia são reais? Dinâmicas? O que são?
e) Qual a denominação de cada força de inércia que aparece na resposta do ítem (a)? Quais as grandezas responsáveis por cada uma delas?

Questão 10
a) Explique as origens e conceitos de *Força Centrífuga* e de *Força Centrípeta*.
b) Essas forças obedecem à terceira lei de Newton? Explique.

Questão 11
a) O que significa dizer que uma equação é *covariante*?
b) Enuncie o Princípio da Relatividade na Mecânica Newtoniana.
c) Qual a diferença entre esse princípio e o Princípio da Relatividade de Einstein (Relatividade Especial)?

C. Aplicações Físicas

Questão 12

Considere um balde com líquido girando com velocidade constante ω, em torno de seu eixo de simetria (vertical) e em relação ao solo. A velocidade angular é grande o suficiente para a superfície do líquido tomar uma forma parabólica.
a) Se $\vec{f}$ é a força devida à diferença de pressão do fluído sobre um elemento de massa δm da superfície do líquido, determine a equação de movimento para o elemento δm num referencial fixo no balde girante.
b) Demonstre analiticamente que a superfície do líquido em rotação atinge o equilíbrio na forma de um parabolóide de revolução.

Questão 13

Considere a Terra como uma esfera homogênea de raio R, despreze todas as irregularidades do relevo da superfície (montanhas, prédios, etc...) e seja $\vec{\omega}$ a velocidade de rotação da Terra em torno de seu eixo (direção N-S e sentido S $\rightarrow$ N). Considere como inercial um referencial S_i com origem O_i no centro da Terra e um outro referencial S_r com origem O_r fixa na superfície da Terra, sendo seu eixo z_r normal à superfície, apontando para fora da Terra.

Uma partícula de massa m, com vetor posição $\vec{r}$ em relação ao sistema S_r, é submetida a uma *força resultante mecânica* $\vec{f}$ (dinâmica), além da força devida a seu peso $m\vec{g}$.
a) Faça um esquema (esboço) indicando a Terra, a partícula e os sistemas de referência.
b) Com base nos resultados da questão 9, obtenha a equação de movimento da partícula no sistema não inercial S_r. Explique a razão de cada termo presente na equação.
c) Na equação do ítem anterior, quais termos correspondem a forças de inércia que atuam na partícula?
d) Qual termo na equação é identificado com a *aceleração da gravidade efetiva* $\vec{g}_{ef}$? Qual a razão dessa denominação?

Questão 14

Considere a partícula da questão anterior próxima da superfície da Terra, de modo que $\vec{R} + \vec{r} \approx \vec{R}$ e em repouso.

a) Determine o módulo da aceleração centrífuga $\vec{a}_{cf}$ da partícula num ponto de latitude λ.

b) Considerando o raio médio da Terra $R \sim 6,371 \times 10^6$ m, faça estimativas numéricas da acelaração centrífuga em diferentes latitudes e compare com a aceleração da gravidade g (~ 10 m/s^2).

c) Faça um esboço qualitativo das acelerações $\vec{g}$, $\vec{g}_{ef}$ e $\vec{a}_{cf}$ para um ponto no hemisfério norte e outro no hemisfério sul.

d) Quais as direções de $\vec{g}_{ef}$ nos dois casos acima?

Questão 15

Com base nos resultados da questão anterior:

a) Discuta as implicações físicas da $\vec{g}_{ef}$ com relação à direção e sentido de um fio de prumo e na posição de estabilidade (equilíbrio) de fluídos.

b) Explique porque a Terra tem uma forma ovalada, como se os polos fossem achatados.

Questão 16

a) Um corpo em queda livre próximo da superfície da Terra cai na direção e sentido de $\vec{g}_{ef}$ ou sofre algum tipo de desvio? Explique, considerando queda livre nos hemisférios norte e sul.

b) Estime o modulo da força de Coriolis para um corpo de massa m em queda livre num local de latitude λ, quando possui velocidade v_r. O que é desprezado nesse cálculo?

Resposta: $F_{cor} \approx 2\,\omega\, v_r\, \cos\lambda$.

Questão 17

Thornton-Marion, exemplos 10.3 e 10.4.

Questão 18

Considere movimentos de uma partícula em pequenas superfícies planas paralelas à superfície da Terra. Quais tipos de desvios (direções/sentidos) a partícula pode sofrer devidos à força de Coriolis no hemisfério norte e no hemisfério sul? Responda através de esquemas (esboços) e dê alguns exemplos, tratando os seguintes casos:

a) Movimento arbitrário numa dada direção e sentido.

b) Movimento ao longo de meridianos, tanto no sentido N $\rightarrow$ S como S $\rightarrow$ N.

Resposta ítem (b): Sentido N $\rightarrow$ S no hemisfério norte, desvio L $\rightarrow$ O e no hemisfério sul, desvio O $\rightarrow$ L; sentido S $\rightarrow$ N no hemisfério norte, desvio O $\rightarrow$ L e no hemisfério sul, desvio L $\rightarrow$ O.

Questão 19

a) Os *ventos alísios* (*trade winds*) são ventos regulares, que sopram durante o ano todo nas regiões tropicais, vindos do nordeste no hemisfério norte e do sudeste no hemisfério sul. Explique fisicamente porque ocorre toda essa "ventania".

b) Os ciclones e furacões têm algo a ver com o movimento de rotação da terra? Explique.

c) Os vórtices, que ocorrem em movimentos de àgua em ralos, pias, etc..., têm algo a ver com o movimento de rotação da Terra?

Questão 20

A expressão matemática da força de Coriolis tem uma estrutura análoga à da força magnética sobre uma carga em movimento num campo magnético:

$$\vec{F}_{cor} = 2m\vec{v}_r \times \vec{\omega} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{F}_{mag} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Também, para uma partícula em movimento, do mesmo modo como $\vec{B}$ é o responsável por $\vec{F}_{mag}$, ω é responsável por $\vec{F}_{cor}$. Consulte Symon, Sec. 7.5 e veja uma discussão interessante sobre essas analogias e o Teorema de Larmor do Eletromagnetismo.

Questão 21

Reveja a dedução da equação de movimento de um *pêndulo plano* num referencial inercial (Thornton-Marion, Sec. 4.4).

Questão 22

a) Quais as características físicas (dimensões, pesos, atritos) de um *pêndulo de Foucault*?
b) Explique, de modo qualitativo, porque o plano do pêndulo realiza movimento de precessão à medida que a Terra gira em torno de seu eixo.
c) Qual a importância física destacável do experimento de Foucault?

Questão 23

a) Se ω é a velocidade de rotação da Terra em torno de seu eixo, determine a velocidade angular de precessão do plano de um pêndulo num local de latitude λ.
b) Qual o período de precessão previsto de um pêndulo de Foucault na cidade de São Paulo (latitude 23º 33' S)?

Respostas: (a) $\omega_p = \omega \mathrm{sen}\lambda$; (b) $\tau_p^{SP} \approx$ 60 hs.

Questão 24

Determine novamente a velocidade de precessão do pêndulo, mas considerando agora o método indicado a seguir. Considere o circulo graduado em baixo do pêndulo (fixo no solo, paralelo à superfície da Terra) e estude as velocidades do centro e de dois pontos extremos (diametralmente opostos) desse círculo, devidas à rotação da Terra em torno de seu eixo. A velocidade de precessão está associada às diferenças das velocidades dos pontos extremos e do centro e pode ser calculada pela geometria. Consulte "Curso de Física de Berkeley - Volume 1 - Mecânica", cap. 3, Sec. "Exemplo. O Pêndulo de Foucault".

Questão 25

Thornton-Marion, exercício 10.5 (outro método para o cálculo da velocidade de precessão).

Questão 26

Umberto Eco, escritor e ensaista italiano, ficou famoso na década de 80 com a publicação de seus livros "O Nome da Rosa" (1980) e "O Pêndulo de Foucault" (1988). No final destas questões propostas é reproduzido um texto do início do capítulo 1 de "O Pêndulo de

Foucault” (editora Record, terceira edição, tradução de Ivo Barroso), com algumas frases grifadas. O local é Paris (latitude 48º 50’ N).

O personagem (autor) conhece Física? Todas as afirmações do personagem, que estão grifadas, são corretas? Justifique sua resposta em detalhe.

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO NUM REFERENCIAL NÃO INERCIAL

(partícula massa m)

- **Referencial Inercial S_i**

$\vec{F}$: força resultante mecânica (dinâmica) sobre a partícula, medida em S_i (peso, contacto, tensão, elástica...)

Equação de Movimento (2.LN)

$$\boxed{m\vec{a}_i = \vec{F}}$$

- **Referencial Não Inercial S**

(acelerado em relação a S_i)

Equação de Movimento (2.LN)

$$\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F}_{ef}} \quad , \quad \boxed{\vec{F}_{ef} = \vec{F} + \vec{F}_{in}}$$

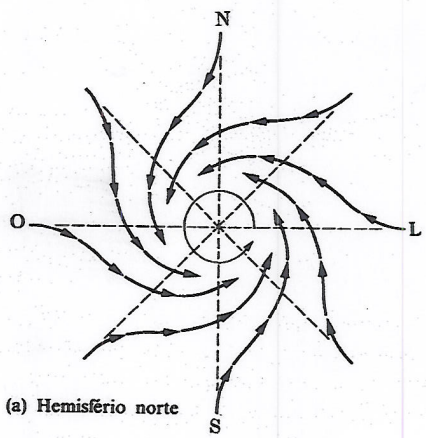
$\vec{F}_{in}$: forças de origem cinemática → produtos da massa m pelas acelerações de S em relação a S_i

$$\boxed{\vec{F}_{in} = \underbrace{-m\ddot{\vec{R}}_i}_{\substack{\text{translação} \\ (\ddot{\vec{R}}_i)}} \underbrace{-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}_{\substack{\text{azimutal} \\ (\dot{\vec{\omega}}=\vec{\alpha})}} \underbrace{-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\substack{\text{centrífuga} \\ (\vec{\omega})}} \underbrace{-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r}_{\substack{\text{Coriolis} \\ (\vec{v}_r)}}}$$

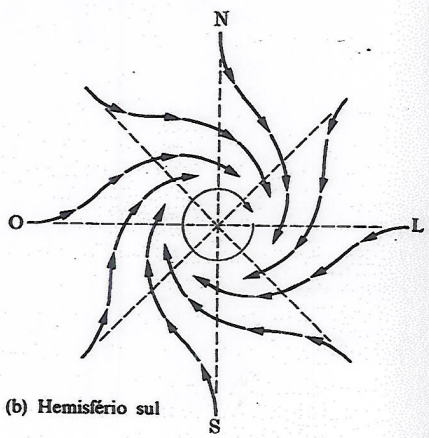
Gaspar Coriolis, "Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps", J. l'École Polytechnique, 1832

Local	Latitude λ (graus)	Gravidade g_{ef} medida (m/s^2)	acel. centrípeta $\approx 0{,}034 \cos\lambda$ (m/s^2)
Equador	0,0	9,7799	0,0340
Panamá	8,917	9,7822	0,0336
Washington	38,883	9,8011	0,0265
Paris	48,833	9,8094	0,0224
Greenwich	51,483	9,8119	0,0212
Pólo Norte	90,0	9,8321	0,0

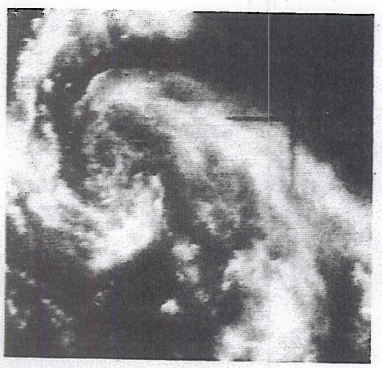
(Alonso & Finn, vol. 1, Mecânica)



(a) Hemisfério norte



(b) Hemisfério sul

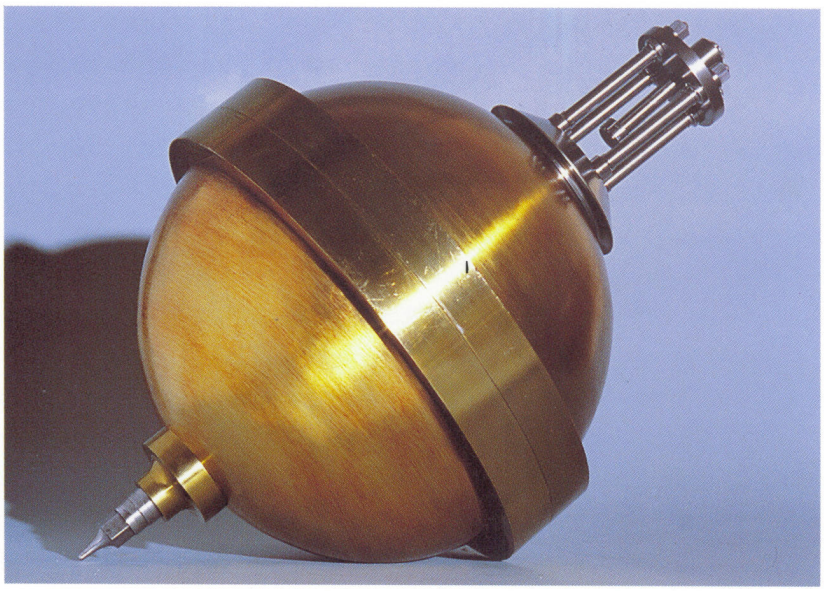


(c)

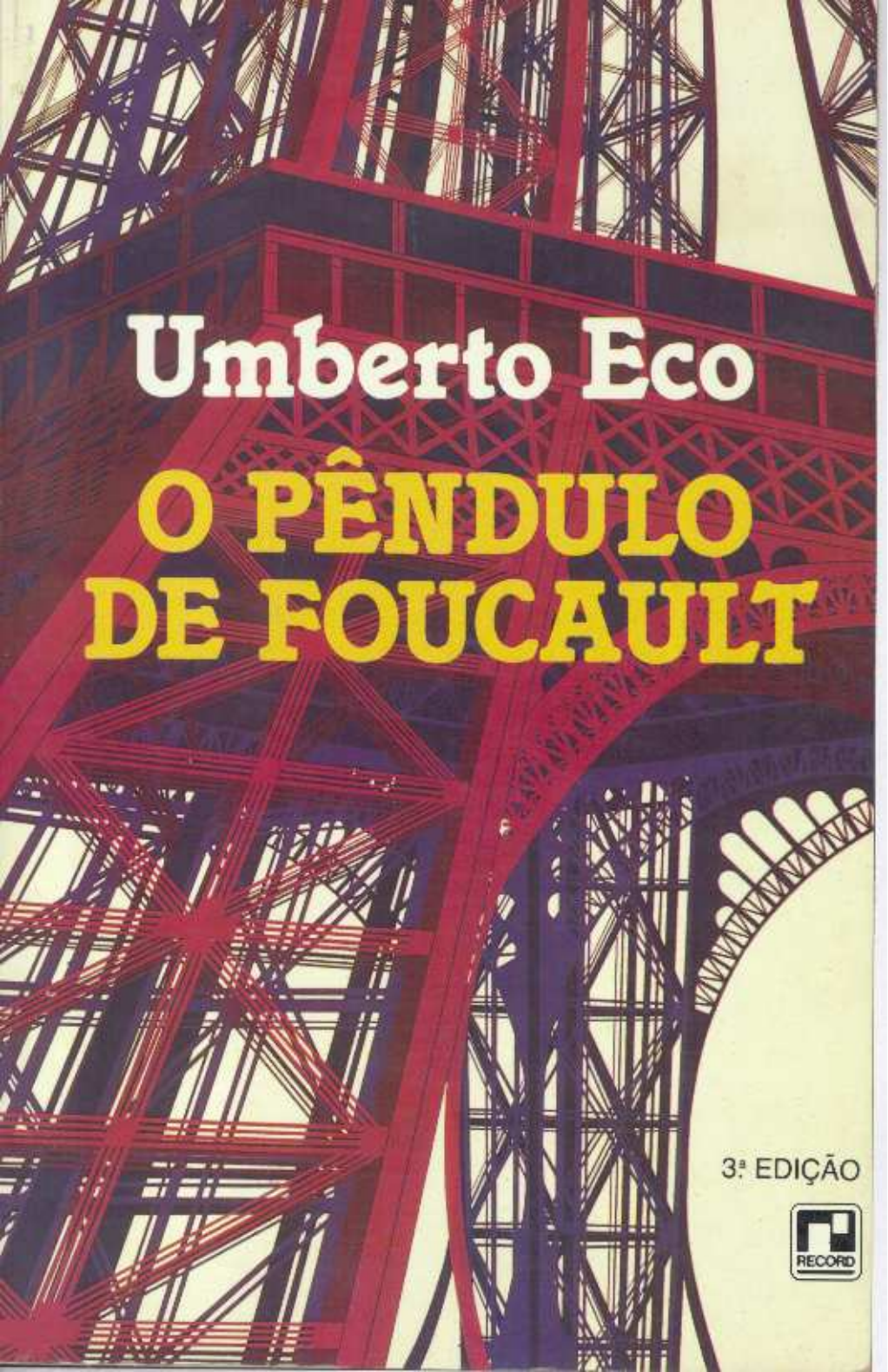
Figura 6-12. Remoinho anti-horário (horário) do vento no hemisfério norte (sul) resultante de um centro de baixa pressão, combinado com a aceleração devida ao têrmo de Coriolis. A parte (c) mostra uma perturbação de baixa pressão fotografada pelo satélite Tiros. (Cortesia da NASA/Goddard Space Center)

GELVM GALLIÆ CVSTODEM CHRISTVS PATRIÆ FATA DOCET
A CONVENTION NATIONALE
ÉCRIVAINS
POUR LA FRANCE
A LA GLOIRE
DES HÉROÏQUES
DE LA
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
24
23
22
21
20
19
18
17
16

rience, sur l'énoncé des résultats probables qu'elle fournirait à la science et qu'elle mettrait sous les yeux de tout le monde, le Président de la République résolut que la chose serait faite, et avec la rapidité de l'éclair sa haute protection réagissant jusqu'aux derniers degrés de l'échelle administrative, on vit, en moins de quinze jours, se dresser les appareils qu'il nous reste à décrire.» C'est au sommet de la coupole ornée par les peintures de Gros que l'on trouve un tampon, une sorte de couvercle où va être placée l'attache du fil d'acier qui supporte le pendule. Dans l'espace circulaire occupé sur le sol par la mosaïque, on circonscrit un grand cercle par une rampe d'acajou. À hauteur de cette dernière, précise Foucault, « on élève un cercle en bois de 6 mètres de diamètre, divisé en degrés et quarts de degrés, et centré sur la verticale passant par le point de suspension ».
C'est cet espace que le public parisien va devoir observer. La longueur du fil d'acier était de 67 mètres, le globe, très dense, était d'un diamètre de 38 centimètres, son poids de 28 kilogrammes. Le 31 mars, le pendule a été mis en branle avec un luxe de précautions. « Après une oscillation double de seize secondes de durée, écrit Foucault, on l'a vu revenir à 2 millimètres et demi environ à gauche du point de départ. Le même effet continuant à se produire à chaque



La boule du pendule que l'on voit ici lors de sa réinstallation actuelle au Panthéon est celle-là même qui provient de l'expérience de 1851. Déposée au Musée des arts et métiers, elle est constituée par une enveloppe de laiton renfermant une masse de plomb. Elle pèse 28 kilogrammes. Elle porte à sa partie inférieure une pointe disposée dans le prolongement du fil de suspension. (Inv. 12658.)



Umberto Eco

O PÊNDULO DE FOUCAULT

3ª EDIÇÃO

RECORD

1

ב) והנה בהיות אור הא״ס נמשך,
בבחינת (ה) קו ישר תוך החלל
הנ״ל, לא נמשך ונתפשט (ו) תיכף
עד למטה, אמנם היה מתפשט לאט
לאט, רצוני לומר, כי בתחילה הת־
חיל קו האור להתפשט, ושם תיכף
(ז) בתחילת התפשטותו בסוד קו,
נתפשט ונמשך ונעשה, כעין (ח)
גלגל אחד עגול מסביב.

Foi então que vi o Pêndulo.

A esfera, móvel na extremidade de um longo fio fixado à abóbada do coro, descrevia suas amplas oscilações em isócrona majestade.

Eu sabia — mas quem quer que o tivesse advertido no encanto daquele plácido respirar — que o período era regulado pela correlação entre a raiz quadrada do comprimento do fio e a do número π, o qual, embora irracional para as mentes sublunares, relaciona, por alguma razão divina, a circunferência ao diâmetro de todos os círculos possíveis — de modo que o oscilar de uma esfera de um pólo a outro decorre de uma arcana conspiração entre a mais intemporal das medidas, a unidade do ponto de suspensão, a dualidade de uma dimensão abstrata, a natureza terciária do π, o tetrágono secreto da raiz e a perfeição do círculo.

Sabia também que na vertical do ponto de suspensão, na base, um dispositivo magnético, transmitindo sua atração a um cilindro oculto no cerne da esfera, garantia a permanência do movimento, artifício disposto para contrabalançar as resistências da matéria, mas que não se opunha às leis do Pêndulo, antes lhes permitia manifestarem-se, porque no vácuo qualquer ponto material pesado, suspenso da extremidade de um fio inextensível e sem peso, que não sofresse a resistência do ar nem o atrito com seu ponto de apoio, teria oscilado de modo regular por toda a eternidade.

A esfera de cobre emitia pálidos reflexos cambiantes sob a incidência dos últimos raios de sol que penetravam pelos vitrais. Se, como outrora, sua ponta estivesse roçando uma camada de areia úmida espalhada sobre o pavimento do coro, teria desenhado a cada oscilação um leve sulco no solo, e o sulco, mudando infinitesimalmente de dire-

ção a cada instante, ter-se-ia alargado sempre em forma de brecha, de vala, deixando adivinhar uma simetria radiada — como um esqueleto de mandala, a estrutura invisível de um pentáculo, de uma estela, de uma rosa mística. Não melhor talvez a peripécia, registrada na extensão do deserto, dos traços que deixaram caravanas infinitas e erráticas. Uma história de lentas e milenárias migrações, talvez da mesma forma como se deslocaram os atlântidas do continente Mu, numa peregrinação obstinada e possessiva, da Tasmânia à Groenlândia, do Capricórnio ao Câncer, da Ilha do Príncipe Eduardo ao Svalbard. A ponta repetia, narrava novamente num tempo bastante compacto, o que eles haviam feito entre uma e outra glaciação, ou que talvez ainda fizessem, agora mensageiros dos Senhores — quem sabe no percurso entre Samoa e Zemlia, a ponta, na sua posição de equilíbrio, aflorasse Agarttha, o Centro do Mundo. E intuí que um plano único unia Avalon, a hiperbórea, ao deserto austral que abriga o enigma de Ayers Rock.

Naquele momento, às quatro da tarde de 23 de junho, o Pêndulo amortecia a própria velocidade numa extremidade do plano de oscilação, para recair indolente em direção ao centro, readquirir velocidade a meio do percurso e desferir seus golpes de sabre confidentes no quadrado oculto das forças que o destino lhe apontava.

Se eu permanecesse muito tempo, resistente ao passar das horas, a fixar aquela cabeça de pássaro, aquele ápice de lança, aquele elmo emborcado, enquanto desenhava no vazio as suas diagonais, aflorando os pontos opostos de sua astigmática circunferência, teria sido vítima de uma ilusão fabulatória, pois o Pêndulo me levaria a crer que o plano de oscilação teria realizado uma rotação completa, tornando ao ponto de partida, em trinta e duas horas, descrevendo uma elipse achatada — elipse que girasse em torno de seu próprio centro com uma velocidade angular uniforme, proporcional ao seno da latitude. Como teria girado se o ponto fosse fixado ao alto da cúpula do Templo de Salomão? Talvez os Cavaleiros tivessem experimentado também lá. Talvez o cálculo, o significado final, não houvesse modificado. Talvez a igreja abacial de Saint-Martin-des-Champs fosse o verdadeiro Templo. Contudo, a experiência só teria sido perfeita no Pólo, único lugar em que o ponto de suspensão incide sobre o prolongamento do eixo de rotação da Terra, no qual o Pêndulo realizaria seu círculo aparente em vinte e quatro horas.

Mas não era este desvio da Lei, que de resto a própria Lei previa, não era esta violação da medida áurea que tornava menos admirável o prodígio. Eu sabia que a Terra estava rodando, e eu com ela, e Saint-