

# Einstein e a teoria de caos quântico

(Einstein and the quantum chaos theory)

M.A.M. de Aguiar<sup>1</sup>

*Instituto de Física 'Gleb Wataghin', Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil*

O trabalho de Einstein intitulado *Sobre o teorema quântico de Sommerfeld e de Epstein* [1, 2], publicado em 1917, propõe uma generalização da regra de quantização de Bohr, Sommerfeld e Epstein para sistemas multidimensionais integráveis. Ao mesmo tempo, Einstein nota que sistemas não-integráveis não podem ser quantizados dessa maneira. Essa observação indica pela primeira vez a não trivialidade do limite semiclássico de sistemas caóticos, e pode ser considerado como pioneiro da teoria de caos quântico.

**Palavras-chave:** Einstein, regras de quantização, caos quântico.

Einstein's paper *On the quantum theorem of Sommerfeld and Epstein* [1, 2], published in 1917, proposes a generalization of the quantization rule of Bohr, Sommerfeld and Epstein for multi-dimensional integrable systems. Einstein also points out that non-integrable systems could not be quantized with such rules. This observation indicates for the first time the non-triviality of the semiclassical limit of chaotic systems and can be considered a pioneer in the theory of quantum chaos.

**Keywords:** Einstein, quantization rules, quantum chaos.

## 1. Introdução

Einstein é conhecido por ter dado contribuições fundamentais em várias áreas da Física. Dessas contribuições, sua participação na teoria de caos quântico, que praticamente nasce com esse trabalho de 1917 [1, 2], permanece ainda razoavelmente desconhecida.

A percepção de Einstein sobre os problemas conceituais envolvidos na transição clássico-quântica de sistemas caóticos acontece antes da própria teoria quântica estar completa e muito antes da teoria clássica de sistemas caóticos ser reconhecida dentro da Física. A teoria moderna de caos quântico de fato só se consolidaria cerca de 50 anos após a publicação deste trabalho de Einstein, com a derivação da famosa fórmula do traço de Gutzwiller no início da década de 70 [3, 4].

Para podermos apreciar a importância deste trabalho, temos que nos lembrar do contexto em que foi publicado. Antes da formulação da teoria quântica, buscavam-se maneiras de conciliar a mecânica clássica com a observação experimental da quantização dos níveis de energia dos átomos. As propostas de Bohr e Sommerfeld indicavam que os movimentos permitidos no mundo microscópico eram apenas aqueles onde a integral  $\int p dq$  sobre um período completo do movimento fosse um múltiplo inteiro da constante de Planck. Essas 'regras de quantização' funcionavam bastante bem para

o átomo de hidrogênio e para o oscilador harmônico, mas tinham uma restrição crítica: para aplicá-las, o movimento clássico deveria ser unidimensional ou multidimensional, mas separável em algum sistema de coordenadas.

Neste trabalho, Einstein dá duas contribuições importantes para a compreensão das regras de quantização. A primeira consiste em estendê-las para sistemas não separáveis, desde que esses tivessem tantas constantes de movimento independentes quantos fossem seus graus de liberdade. Atualmente esses sistemas são ditos *integráveis*. Nesse caso, Einstein mostrou que a integral a ser calculada é  $\int \vec{p} \cdot d\vec{q}$ , pois o integrando é um invariante canônico. A integral deveria ser feita sobre diferentes circuitos fechados e irredutíveis  $\gamma_k$  no espaço de fases, devendo seu valor ser um múltiplo inteiro da constante de Planck,  $n_k h$ . A cada circuito deveria corresponder um número quântico  $n_k$  distinto.

A segunda contribuição de Einstein é simplesmente observar que quando o sistema clássico não possui o número necessário de constantes de movimento (como Poincaré já havia apontado para o problema de três corpos), nem mesmo a sua regra de quantização se aplicaria e não se sabia como proceder para 'quantizar' o sistema.

Com o aparecimento da equação de Schrödinger e da interpretação de Copenhagen da mecânica quântica,

<sup>1</sup>E-mail: aguiar@ifi.unicamp.br.

a questão da quantização estava resolvida. A cada sistema associava-se um operador Hamiltoniano cujos autovalores eram as energias procuradas. A regra de Einstein, conhecida hoje como EBK – de Einstein, Brillouin e Keller [1, 5, 6, 7] – poderia ser obtida formalmente da equação de Schrödinger no *limite semiclássico*, quando valores típicos da integral de ação,  $\int \vec{p} \cdot d\vec{q}$ , são muito maiores do que  $\hbar$ . Mostra-se que a regra EBK é exata para movimentos harmônicos e uma boa aproximação para os movimentos radiais e angulares do átomo de hidrogênio.

No entanto, nem tudo estava resolvido: se o limite semiclássico de um sistema integrável fornece as regras EBK, como ficaria o limite semiclássico de um sistema caótico? Se a resposta a essa pergunta fosse simples, com certeza Einstein a teria encontrado imediatamente! No entanto, com tantos outros problemas fascinantes movimentando a Física do início do século, essa questão ficou esquecida. Sua retomada aconteceu apenas com a percepção de que sistemas não-integráveis eram a maioria dentro da Física. Sistemas tão simples quanto um pêndulo duplo ou uma partícula movendo-se livremente dentro de fronteira com a forma de um estádio apresentavam movimentos caóticos [8].

O passo fundamental para a solução do problema vislumbrado por Einstein veio com Gutzwiller [3], que mostrou que, no limite semiclássico, a densidade quântica de níveis de energia está relacionada com o conjunto das órbitas periódicas do sistema clássico.

Embora a conexão clássico-quântica de sistema caóticos não esteja ainda totalmente compreendida, muitos progressos e aplicações deste estudo, batizado de caos quântico, têm sido feitos desde então. E mais uma vez admiramos a intuição e a sabedoria de Albert Einstein, que soube enxergar a complexidade desta questão cinco décadas antes da comunidade dos físicos estar preparada para tratá-la.

## Referências

- [1] A. Einstein, Deutsche Physikalische Gesellschaft Verhandlungen **19**, 82 (1917).
- [2] A. Einstein, Rev. Bras. Ens. de Fís. **27**, 103 (2005).
- [3] M.C. Gutzwiller, J. Math Phys. **10**, 1004 (1969); **11**, 1791 (1970); **12**, 343 (1971).
- [4] M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Physics* (Springer, New York, 1990).
- [5] L. Brillouin, J. Phys. Radium **7**, 353 (1926).
- [6] J.B. Keller, Ann. Phys. **4**, 180 (1958).
- [7] A.M. Ozorio de Almeida, *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização* (Editora da Unicamp, 1990), traduzido de *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization* (Cambridge University Press, 1989).
- [8] M.V. Berry, in *Chaotic Behavior of Deterministic Systems*, editado por G. Ioss, R.G.H. Helleman e R. Stora, Les Houches, Session XXXVI, p. 171 (1983).