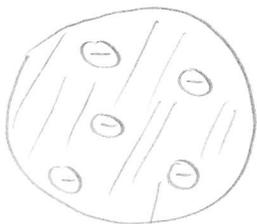


# O ÁTOMO DE BOHR

## Modelo de Thomson

(pudim de ameixas)

J. J. Thomson, pai de  
G. P. Thomson - difração de  
elétrons e cristal



massa positiva com carga  $+Ze$

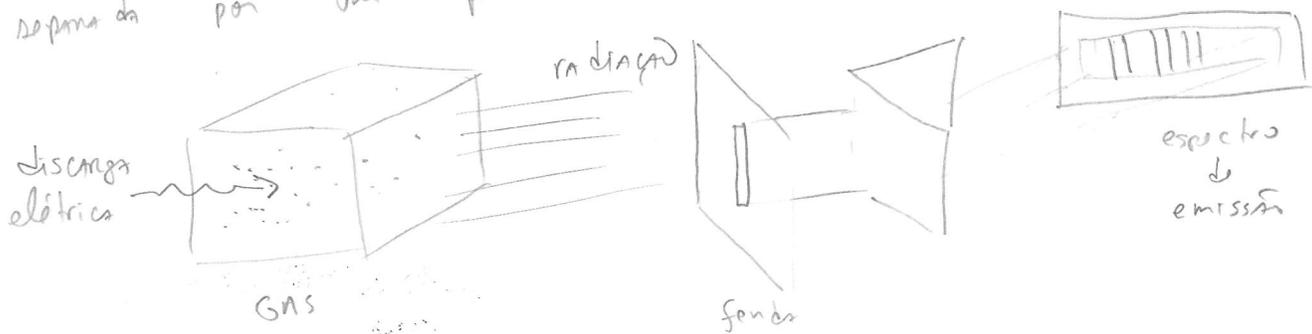
$Z$  elétrons  $\rightarrow$  carga  $-Ze$

RAIO =  $r_+ \approx 1 \text{ \AA}$

## Problemas

- 1- Modelo eletricamente instável
- 2- NÃO consegue explicar linhas espectrais
- 3- NÃO consegue explicar todo o espalhamento

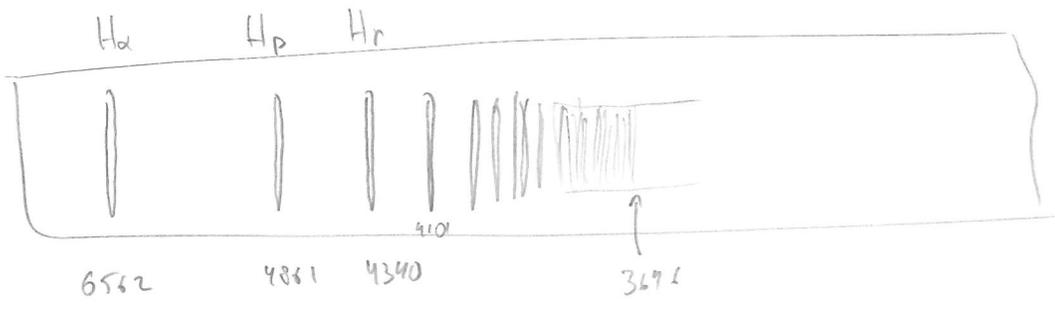
Em 1802 Fraunhofer observou linhas espectrais quando a luz  
solta era separada por um prisma. O experimento típico é



As colisões dos elétrons com átomos fazem com que eles absorvam  
energia. Ao voltarem ao seu "estado natural" eles emitem energia.  
Essa radiação emitida está concentrada em alguns comprimentos  
de onda apenas.

Balmer, em 1885, achou uma fórmula empírica para a série principal de linhas no caso do Hidrogênio:

$$\lambda = 3646 \frac{n^2}{n^2 - 4} \text{ \AA} ; n = 3, 4, \dots$$



A radiação emitida pelos átomos tinha que ser devido ao movimento acelerado do elétron dentro do átomo. Para o Hidrogênio, o potencial sentido pelo elétron é obtido pela lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

FORA DO ÁTOMO

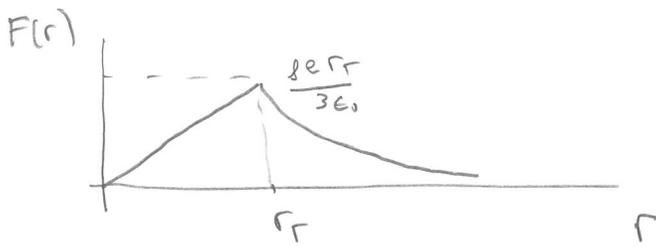
$$\int_{V_e} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_e} \rho dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3} \quad V_e = \text{Vol. externo}$$

$$\mathbf{E} = + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^3}{r^2} \hat{r} ; \quad \mathbf{F} = - \frac{\rho e r^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

DENTRO DO ÁTOMO

$$\int_{V_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_i} \rho dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \hat{r} ; \quad \mathbf{F} = - \frac{\rho e r}{3\epsilon_0} \hat{r}$$



$$m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$$

O movimento radial é harmônico,  $F = -kr$ , com

$$k = \frac{pe}{3\epsilon_0}$$

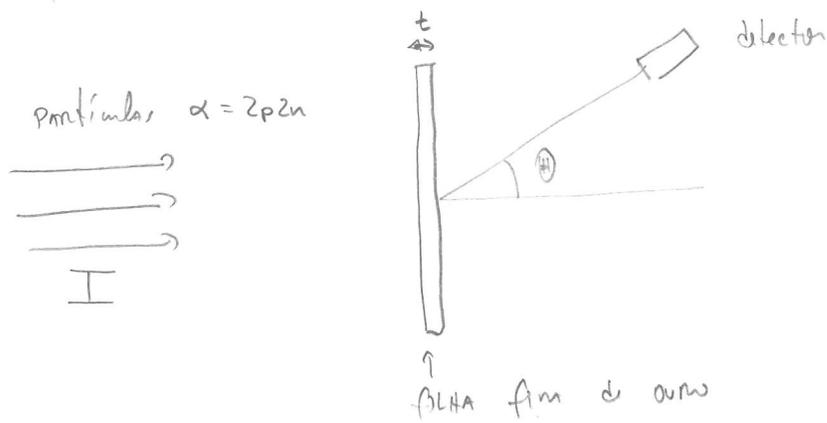
$$p = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi r_T^3}$$

A frequência da oscilação é

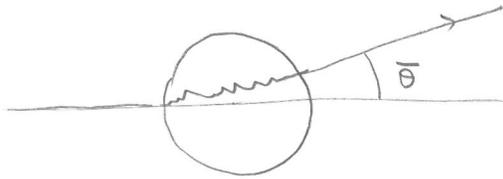
$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{4\pi r_T^3 \epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} \approx 2,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 1200 \text{ \AA} \rightarrow \text{uma única linha de emissão.}$$

Os dados de espalhamento foram obtidos por Rutherford em 1911 também refutaram o modelo de Thomson.



Como o ouro tem  $Z = 79$ , o átomo deveria parecer quase neutro e o desvio seria pequeno:



Se, em média, cada átomo produz um desvio médio  $\bar{\theta}$  ( $\theta$  é a coordenada da polar, indo de 0 a  $\pi$ ), depois de  $N$  átomos o desvio médio será

$$\overline{(\theta)} = \sqrt{N} \bar{\theta}$$

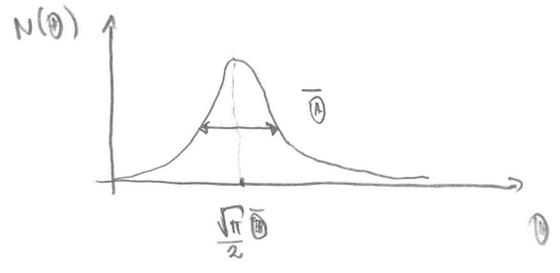
pois os desvios podem ser no sentido de abrir ou estreitar o feixe, como em um processo aleatório (vibra, Ref por exemplo). O número de partículas espalhadas entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  é dado por

$$dN(\theta) = N(\theta) d\theta = \frac{2I\theta}{\bar{\theta}^2} e^{-\theta^2/\bar{\theta}^2}$$

Veja que  $\int_0^{180} N(\theta) d\theta = \int_0^{180} \frac{2I\theta}{\bar{\theta}^2} e^{-\theta^2/\bar{\theta}^2} d\theta = I \int_0^{(180/\bar{\theta})^2} e^{-u} du = I$

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{I} \int_0^{180} \theta N(\theta) d\theta = \int_0^{180} \frac{2\theta^2}{\bar{\theta}^2} e^{-\theta^2/\bar{\theta}^2} d\theta = 2\bar{\theta} \int_0^{(180/\bar{\theta})^2} u^2 e^{-u} du \approx \bar{\theta} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{I} \int_0^{180} \theta^2 N(\theta) d\theta = \int_0^{180} \frac{2\theta^3}{\bar{\theta}^2} e^{-\theta^2/\bar{\theta}^2} d\theta = \bar{\theta}^2 \int_0^{(180/\bar{\theta})^2} u e^{-u} du = \bar{\theta}^2$$



# Resultados Experimentais e a Teoria de Thomson

4a

- Experimento:
- folha de ouro com espessura  $t = 10^{-6}$  m
  - $\overline{\theta} = 2 \times 10^{-2}$  rad  $\approx 1^\circ$
  - 99% das partículas  $\alpha$  espalhadas em  $3^\circ$ .
  - fração espalhada a mais de  $90^\circ$  é  $\approx 10^{-4}$

no de átomos na colisão  $N \approx \frac{t}{r_T} = \frac{10^{-6}}{10^{-10}} = 10^4$

$\bar{\theta} = \frac{\overline{\theta}}{\sqrt{N}} \approx 2 \times 10^{-4}$  rad.

- Teoria:
- $\bar{\theta} \approx 10^{-4}$  nos cálculos de Thomson ✓
  - $\frac{n_{3^\circ}}{I} = \int_0^{3^\circ} \frac{N(\theta)}{I} d\theta = e^{-\theta^2/\overline{\theta}^2} \Big|_0^{3^\circ} = 1 - e^{-9} \approx 0.99987$  ✓
  -

A fração das partículas espalhadas a  $\theta > 90^\circ$  foi de  $10^{-4}$ .

Para Thomson obtemos:

$$\frac{N_{90}}{I} = \int_{90^\circ}^{180^\circ} \frac{N(\theta)}{I} d\theta = e^{-\frac{\theta}{\theta_0}} \Big|_{90^\circ}^{180^\circ} \approx e^{-1} = 10^{-3.5}$$

OBS. 1) No cálculo de Thomson o espalhamento das partículas  $\alpha$  em cálculos levando em conta apenas o núcleo positivo: fora do núcleo a deflexão era quase nula (imp total zero); dentro do núcleo os desvios provocados pelos elétrons eram desprezíveis, pois sua massa é muito menor que a massa das  $\alpha$ .

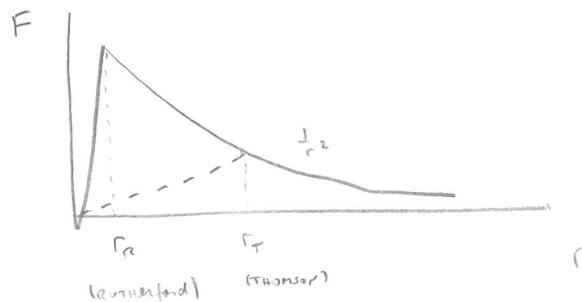
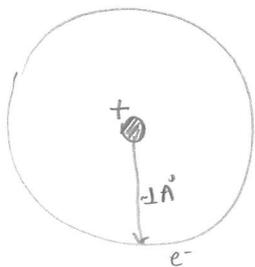
2) Partículas  $\alpha$  eram obtidas por decaimento de núcleos radioativos.

3) O espalhamento ASSUME pequenos ângulos e vários espalhamentos.

# O modelo de Rutherford

6

Para espalhar as partículas  $\alpha$  a grandes ângulos mantendo fixa a carga  $Ze$  dos espalhadores, Rutherford assumiu que as cargas positivas estavam concentradas:



Estimativa de Thomson do desvio médio por cada átomo:

$$(\overline{\theta^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{(\overline{\theta^2})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}}$$

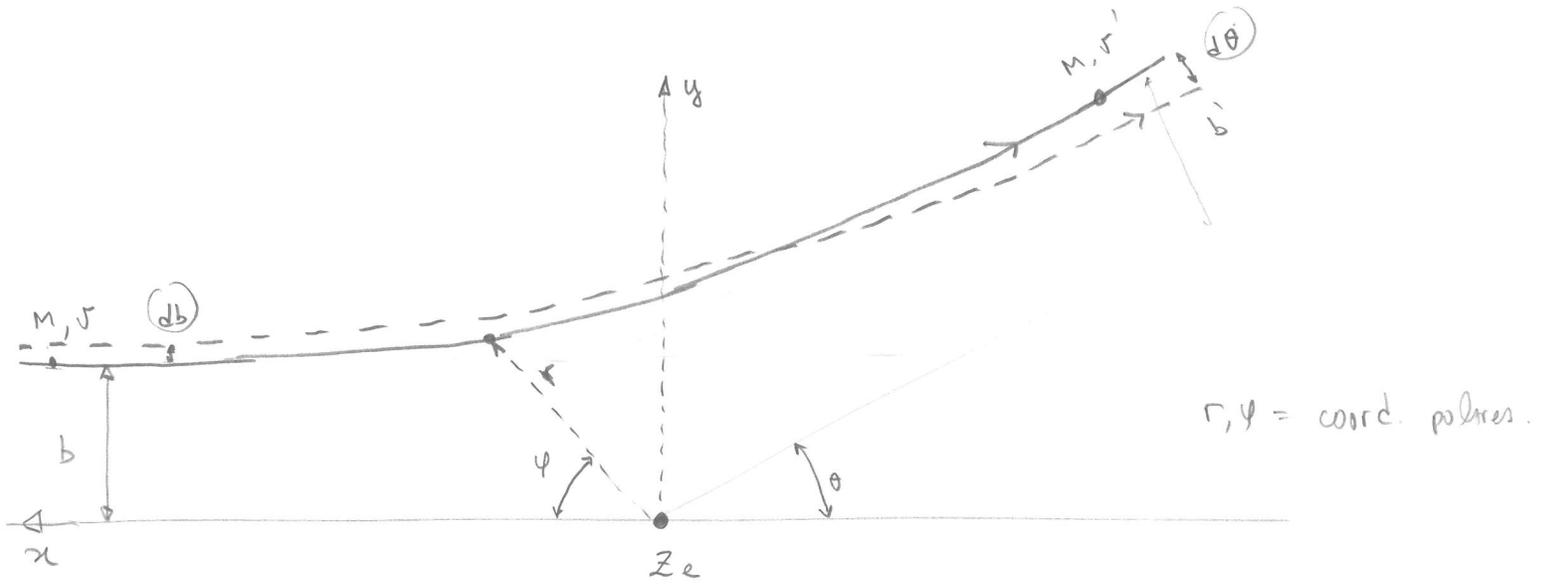
$(\overline{\theta^2})^{\frac{1}{2}}$  foi medido em  $2 \times 10^{-2}$  rad. p/  $N = 10^4$

$$\Rightarrow (\overline{\theta^2})^{\frac{1}{2}} \sim 10^{-4} \text{ rad.}$$

Para que o espalhamento ocorresse também a grandes ângulos, Rutherford

assumiu que  $(\overline{\theta^2})^{\frac{1}{2}} \sim 1 \text{ rad} \Rightarrow r \approx 10^{-14} \text{ m}$

# A fórmula de Rutherford



Núcleo espalhado fica parado (núcleo pesado)

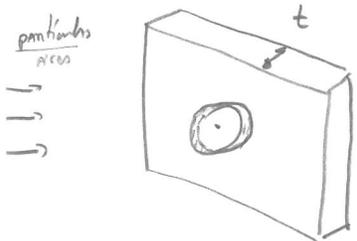
colisão elástica  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 \Rightarrow \boxed{v' = v}$

força é radial  $\vec{F} = \frac{ZZe^2}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \Rightarrow \text{torque} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$  e  $L$  é conservado:

$mvb = mv'b' \Rightarrow \boxed{b' = b}$

$\theta$  é o ângulo de espalhamento.

QUANTAS partículas espalham entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ ?



$\rho = \text{no de átomos p/ volume}$

$t = \text{espessura}$

$\rho t = \text{no de átomos p/ unidade de área} \equiv \eta$

quem passar entre  $b$  e  $b+db$  espalham entre  $\theta$  e  $\theta+d\theta$

Área do anel =  $2\pi b db$   
em torno do  
átomo

$N(\theta) d\theta = \text{no de part. entre } b \text{ e } b+db$

$= -\rho \cdot t \cdot (2\pi b db) \cdot I$

(sinal de - vem de  $db > 0 \Rightarrow d\theta < 0$ )

Precisamos agora resolver a equação de movimento e obter  $b=b(\theta)$ .

O resultado é

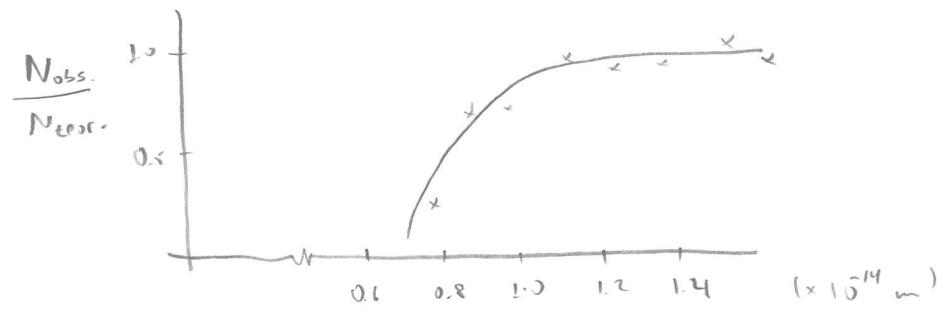
$$b = \frac{D}{2} \cot^2(\theta/2) \quad ; \quad D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 (\frac{mv^2}{2})}$$

$$db = -\frac{D}{2} \frac{d\theta/2}{\sin^2(\theta/2)} \quad \left( \cot^2(\theta/2) = \frac{1}{2} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \right)$$

$$\frac{N(\theta) d\theta}{I} = \frac{2\pi g t D^2}{16} \cdot \frac{\sin(\theta) d\theta}{\sin^4(\theta/2)}$$

Análise

- 1) Expressão em com  $\theta$  muito mais lembrando que Thomson, que é exponencial.
- 2) Todos experimentos de  $5^\circ$  a  $150^\circ$  coincidem com a teoria, embora haja variações de  $10^5$  nos intervalos.
- 3) Todos mostram que  $N(\theta) d\theta \sim t$
- 4)  $N(\theta) d\theta \sim \frac{1}{(\frac{mv^2}{2})^2}$  t.b. foi feita
- 5)  $N(\theta) d\theta \sim (Ze)^2$ , a carga nuclear. Foi possível determinar Z experimentalmente p/ vários átomos e verificou que  $Z = n^\circ$  Atômico químico.
- 6) Determinação do raio nuclear



$$r = 10^{-14} \text{ m} = 10 \text{ F}$$

$$\ll 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

# SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL

$$d\eta = N(\theta) d\Omega = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) I n d\Omega$$

$$\eta = \frac{\text{no de átomos}}{\text{area}} = \rho t$$

Ao invés de  $N = \rho I n$   
para a seção de choque total, fazemos  
 $dN = d\sigma I n = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) I n d\Omega$

$d\Omega = 2\pi \sin(\theta) d\theta$  = fração da superfície de uma esfera de raio 1 ocupada pelo detector.

$$d\eta = \frac{I n D^2 d\Omega}{16 \sin^4(\theta/2)}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{zZe^2}{2Mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Escrevendo  $d\eta = -I n 2\pi b db = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) I n d\Omega$  vem

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta} \right|}$$

## Problems

- 1) elétrons não poderiam estar parados
- 2) mesmo orbitando eles emitiriam radiação (pois estariam acelerados) e decelerariam

## CÁLCULO DE $b = b(\theta)$

Como  $l$  é constante, o movimento é plano. Em coordenadas polares

$$L = \frac{M}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r) ;$$

$$F = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = - \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r}$$

$$M \ddot{r} = M r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\boxed{V = \frac{zZe^2}{(4\pi\epsilon_0) r}}$$

$$\frac{d}{dt} (M r^2 \dot{\phi}) = 0 \Rightarrow \boxed{M r^2 \dot{\phi} = L = \text{const.}}$$

$$\boxed{L = M v b}$$

Equação da órbita é  $r = r(\varphi)$ . Definimos  $r(t) = r(\varphi(t))$ . Depois

definimos  $u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} \rightarrow r(t) = r(u(\varphi(t)))$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{1}{u^2} \dot{\varphi} \frac{du}{d\varphi} = -r^2 \dot{\varphi} \frac{du}{d\varphi} \\
 &= -\frac{L}{M} \frac{du}{d\varphi}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L}{M} \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\varphi} \right) = -\frac{L}{M} \frac{d^2u}{d\varphi^2} \dot{\varphi} = -\frac{L^2}{M^2 r^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{L^2 u^2}{M^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

$$M \left( -\frac{L^2 u^2}{M^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right) = M \left( \frac{1}{u} \right) \left( \frac{L^2}{M^2} u^4 \right) + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} u^2$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u - \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} + \frac{M}{L^2} \equiv -u - \frac{D}{2b^2}$$

$$D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Mv^2}{L} \right)$$

solução:  $u(\varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi - D/2b^2$

$$\text{I) } u(0) = 0 \quad (\varphi=0 \Rightarrow r = \infty, u=0) \Rightarrow A = D/2b^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{II) } \frac{dr}{dt} &= -v & \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{du} \dot{u} = -\frac{1}{u^2} \left[ -A\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi} B \cos \varphi \right] \\
 & & &= -\frac{L}{M\dot{\varphi}} \left[ -A\dot{\varphi} \sin \varphi + B\dot{\varphi} \cos \varphi \right] = \frac{L}{M} (A \sin \varphi - B \cos \varphi)
 \end{aligned}$$

$$-v = -\frac{LB}{M} \quad B = \frac{Mv}{L} = \frac{1}{b}$$

$$u(\varphi) = \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1) + \frac{1}{b} \sin \varphi$$

e)  $\rho \rightarrow \infty$   $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$   $t = a$   $\bar{\varphi} + \theta = \pi$   $\theta = \pi - \bar{\varphi}$  (11)

$$u=0 = \frac{D}{2b^2} \left( \underbrace{\omega \bar{\varphi} - 1}_{-2 \sin^2 \bar{\varphi}/2} \right) + \frac{1}{b} \underbrace{\sin \bar{\varphi}}_{2 \sin \bar{\varphi}/2 \cos \bar{\varphi}/2} \quad (\varphi=0 \text{ é a solução inicial})$$

$$\frac{D}{b^2} \sin^2 \bar{\varphi}/2 = \frac{2}{b} \sin \bar{\varphi}/2 \cos \bar{\varphi}/2 \quad \text{tg}(\bar{\varphi}/2) = \frac{2b}{D}$$

$$\text{tg}\left(\frac{\bar{\varphi}}{2}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \text{ctg}(\theta/2)$$

$b = \frac{D}{2} \text{ctg}(\theta/2)$

f) A distância máxima aproximada é, por simetria,  $\bar{\varphi}/2$ ,

ou  $\varphi = \frac{\pi - \theta}{2}$  :

$$R = r\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \frac{1}{\frac{D}{2b^2} \left[ \omega(\pi/2 - \theta/2) - 1 \right] + \frac{1}{b} \sin(\pi/2 - \theta/2)} = \left[ \frac{D}{2b^2} \left[ \sin \frac{\theta}{2} - 1 \right] + \frac{1}{b} \cos \frac{\theta}{2} \right]^{-1}$$

$$= \left[ \frac{2}{D} \frac{1}{\cos^2 \theta/2} \left[ \sin \frac{\theta}{2} - 1 \right] + \frac{2}{D} \sin \frac{\theta}{2} \right]^{-1} = \frac{D}{2} \left[ \sin \frac{\theta}{2} \left( 1 + \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) - \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right]^{-1}$$

$$= \frac{D}{2} \frac{\cos^2 \theta/2}{\sin \theta/2 - \sin^3 \theta/2} = \frac{D}{2} \left( \frac{1 - \sin^2 \theta/2}{\sin \theta/2 (1 - \sin^2 \theta/2)} \right) = \frac{D}{2} \left[ \frac{(1 - \sin^2 \theta/2) \cdot \sin \theta/2 (1 - \sin^2 \theta/2)}{\sin \theta/2 (1 - \sin^2 \theta/2)} \right]^{-1}$$

$R = \frac{D}{2} \left[ \frac{1}{\sin \theta/2} + 1 \right]$

Apesar da conclusão de Rutherford de que o núcleo atômico era pequeno, ainda não se podia explicar as linhas espectrais. Para o Hidrogênio várias dessas linhas eram conhecidas. Para a série de Balmer, por exemplo,

$$\lambda = 3646 \frac{n^2}{n^2 - 4} \text{ \AA} = \frac{3646}{4} \frac{n^2}{(\frac{n}{2})^2 - 1}$$

ou

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \left( \frac{4}{3646 \text{ \AA}} \right) \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \equiv 2\pi R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$R_H = 10967757.6 \pm 1.2 \text{ m}^{-1} = \text{const. Rydberg p/ o Hidrogênio}$$

Outras séries foram observadas:

Lyman	Ultravioleta	$K = 2\pi R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 2, 3, \dots$
Balmer	Visível	$K = 2\pi R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 3, 4, \dots$
Paschen	Infravermelho	$K = 2\pi R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 4, 5, \dots$

Em geral, para todos os elementos alcalinos (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr)

$$K = 2\pi R \left( \frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{(n-b)^2} \right)$$

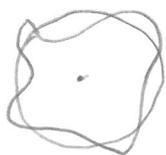
com  $R \sim R_H$  e  $a$  e  $b$  dependem da série e do elemento.

Além disso: para toda linha de absorção existe uma linha de emissão, mas o contrário não é verdadeiro. Para o espectro de absorção só era observado Lyman, se o gás estivesse muito aquecido aparecia Balmer.

# Os Postulados de Bohr

(10)

- 1) Os elétrons se movem em órbita circulares em torno do núcleo segundo a mecânica clássica.
- 2) Apesar da aceleração o elétron NÃO irradia e a energia total  $E$  é conservada.
- 3) As órbitas possíveis SÃO APENAS aquelas em que  $L = n\hbar$   
A motivação é que a onda associada ao elétron se "encaixe" NA circunferência da órbita:



$$2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{p} \rightarrow rp = \frac{n\hbar}{2\pi}$$

- 4) Emissão ou absorção de radiação ocorre quando o elétron muda de órbita:  
$$\nu = \frac{E_f - E_i}{h}$$

## Conseqüências dos Postulados

Órbita circular: 
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

quantização do momento angular:  $L = mvr = n\hbar \rightarrow v = \frac{n\hbar}{mr}$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = m \left( \frac{n\hbar}{mr} \right)^2$$

$$\boxed{r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{mZe^2}} \rightarrow \text{RAIOS SÃO QUANTIZADOS}$$

$$e \quad \boxed{V_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{n\hbar}}$$

(11)

Para o Hidrogênio,  $Z=1$ , o raio do estado fundamental,  $n=1$  é:

$$r_0 = \hbar^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2} \approx 0.5 \text{ \AA} \equiv \text{RAIO DE BOHR}$$

$$v_0 \approx 2.2 \times 10^6 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v_0/c < 0.01 \Rightarrow \text{Mec. Clássica está OK}$$

PARA  $Z$  muito grande  $v \sim c$  e deve-se usar expressão relat.

$$r_n = 0,5 n^2 \text{ \AA} \quad ; \quad v_n = \frac{2,2 \times 10^6}{n} \text{ m/s}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$$

### Energia dos Estados

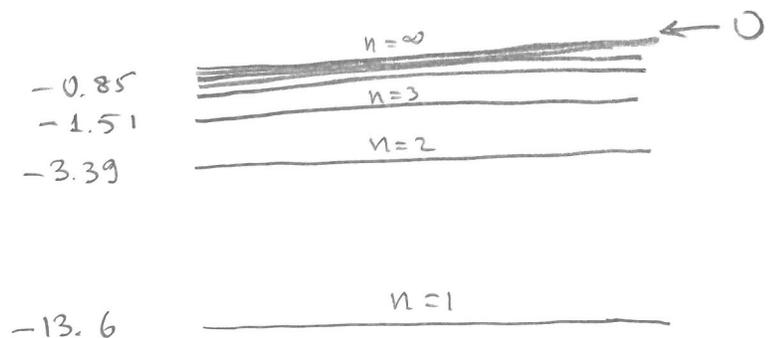
$$V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) = -\frac{V}{2} \Rightarrow E = K+V = \frac{V}{2}$$

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{-m Z^2 e^4}{2 (4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad ; \quad n=1,2,\dots$$

$$= -13.6 \frac{Z^2}{n^2} \text{ eV}$$

Para o Hidrogênio:



# RADIAÇÃO

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{m Z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

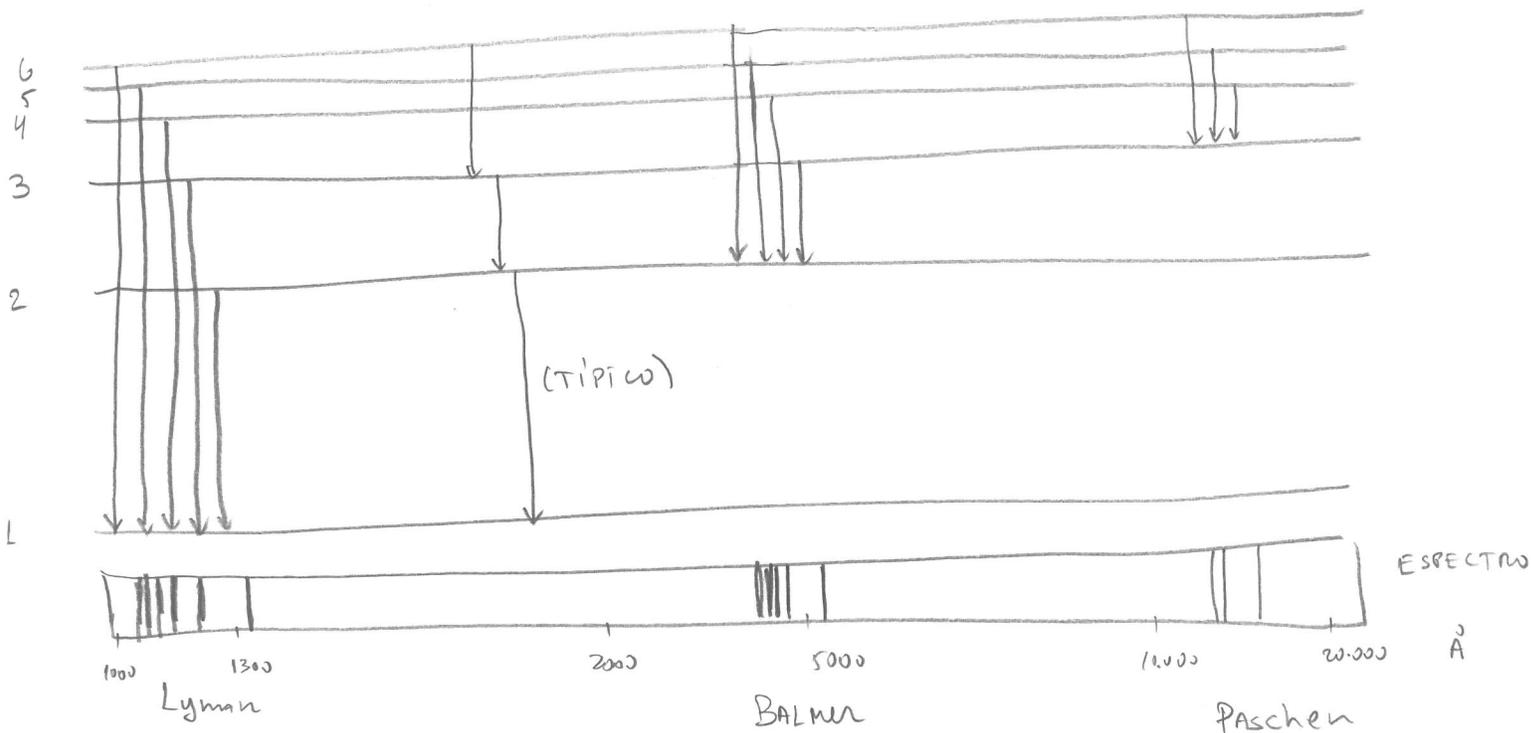
Definindo  $R_\infty = \frac{m Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 c}$  ;  $K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$

$$K = 2\pi R_\infty \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

## PREVISÕES DO MODELO

- 1) Estado fundamental corresponde a  $n=1$ .
- 2) Decaimento de um estado excitado para o fundamental é feito através de uma cascata quantizada.

## EMISSÃO



Estatisticamente todas as linhas acabam aparecendo.

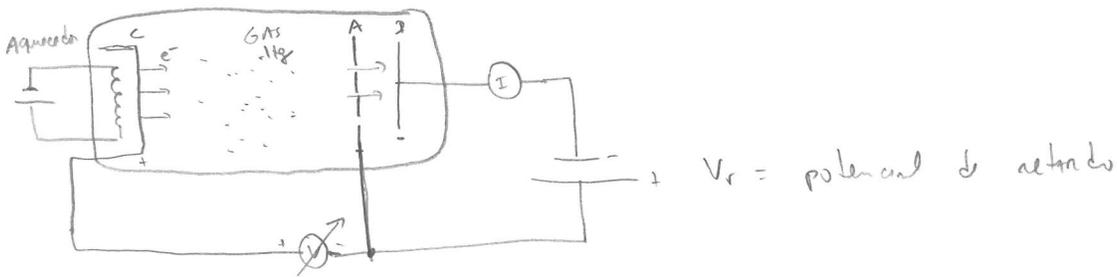
3) ABSORÇÃO - existem menos linhas porque geralmente a excitação ocorre de  $1 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 3$ ,  $1 \rightarrow 4$ , etc., pois os átomos estão em  $n_i = 1$ . Só se observa  $2 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 4$ , etc se o gás for aquecido e alguns átomos já estiverem excitados.

OBS Em vez de tomar a massa do núcleo como infinita podemos resolver o problema exatamente no referencial do centro de massa. Isso equivale a trocar  $m$  por  $\mu = \frac{mM}{m+M}$ .

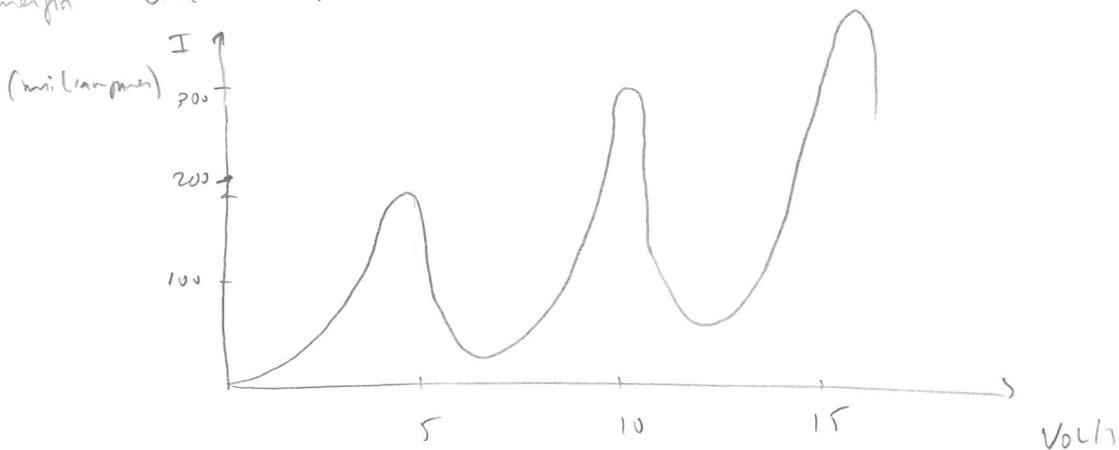
Em vez de  $R_\infty$  usamos

$$R_n = \frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2h^2 c} = \frac{M}{m+M} \cdot R_\infty$$

# A Experiência de Frank-Hertz - 1914

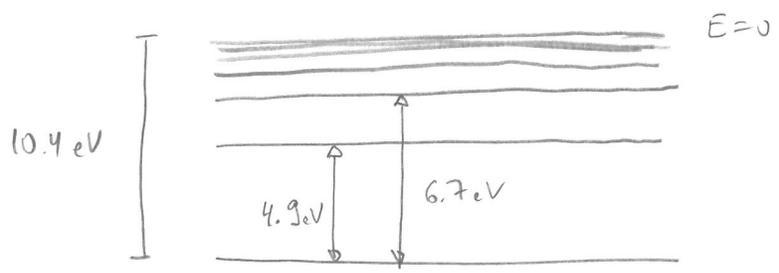


- Os  $e^-$  são <sup>acelerados</sup> por uma diferença de potencial  $V$ .
- Aqueles que passam pelo furo se atingem a placa se tiverem energia cinética para superar  $V_r$  ( $K > eV_r$ )



- Corrente cai abruptamente por  $V \approx 4.9$  eV  $\rightarrow$  esses elétrons interagem com o gás. Se  $V > 4.9$  a interação ocorre na frente do ânodo e os elétrons não conseguem chegar à P.
- Isso mostra que o 1º estado excitado do Hg está a 4.9 eV acima do fundamental.
- Para  $V < 4.9$  não aparece nenhuma linha de emissão  
Para  $V > 4.9$  aparece uma linha a 2536 Å que corresponde a 
$$V = \frac{4.9 \text{ eV}}{h}$$

• O segundo pico ocorre perto de 10 eV. Esses elétrons podem perder excitação dos átomos para o 1º nível, perdendo ~ 9.8 eV, ou excitar dos átomos para o 1º e 2º nível respectivamente, perdendo 11.6 eV;



# Interpretação das Regras de Quantização

(16)

## Momento Generalizado

As equações de Newton em coord. cartesianas

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial r}$$

podem ser re-escritas como

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= x \\ q_2 &= y \\ q_3 &= z \end{aligned}$$

com  $L = T - V = \frac{m \dot{q}^2}{2} - V =$  função Lagrangiana. De

fato,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = m \ddot{q}_i,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

A quantidade  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i = p_i =$  momento conjugado à

coordenada  $q_i$ . As equações no quadro acima são as

Equações de Lagrange, e elas descrevem as equações de Newton

em qualquer sistema de coordenadas. A quantidade

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{momento generalizado}$$

Em coordenadas polares planas,  $(r, \varphi)$  temos:

(17)

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$V = V(r, \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} \rightarrow m \ddot{r} = m r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) = - \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$P_r = \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = m r v_\varphi = \text{momento angular.}$$

# Generalização das Regras de Quantização

Como unir a quantização de Planck,  $E = nh\nu$ , para o movimento harmônico com  $L = m\omega r = nh$  para as órbitas circulares?

## WILSON-SOMMERFELD \* (1916)

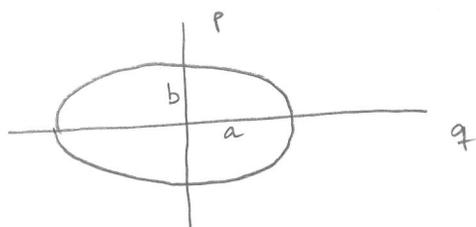
Para sistemas com movimento periódico

$$\oint P_q dq = n_q h$$

Exemplos: 1) O oscilador Harmônico

$$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$I = \frac{P^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\omega^2} \equiv \text{ELIPSE}$$



$$a = \sqrt{2E/m\omega^2}$$

$$b = \sqrt{2mE}$$

$$\oint P dq = \text{Área da elipse} = \pi ab$$

$$\pi \frac{2E}{\omega} = nh \rightarrow E = nh\nu = nh\nu$$

\* Essa regra foi criticada por Einstein em 1917, que propôs que para sistemas multi-dimensionais o "correto" seria fazer

$$\oint_{\mathcal{C}_i} \vec{P} \cdot d\vec{q} = n_i h$$

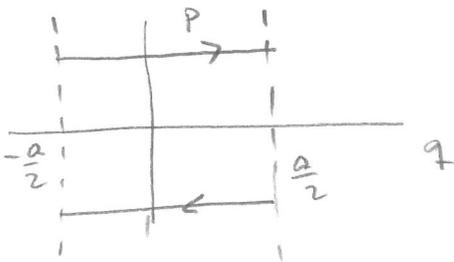
onde  $\mathcal{C}_i$  seriam caminhos especiais independentes. Veja o artigo em português na Revista Bras. de Ensino de Física (2005).

2) Movimento Circular

$L = \text{const.}$ , coordenada  $\theta$  é periódica

$$\oint P_{\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} L d\theta = 2\pi L = nh \rightarrow L = nh$$

3) Partícula presa em poço infinito de tamanho  $a$ :

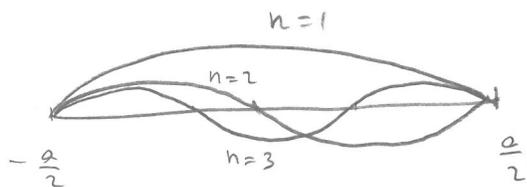


$$\oint p dq = 2pa = nh$$

$$p = \frac{nh\pi}{a}$$

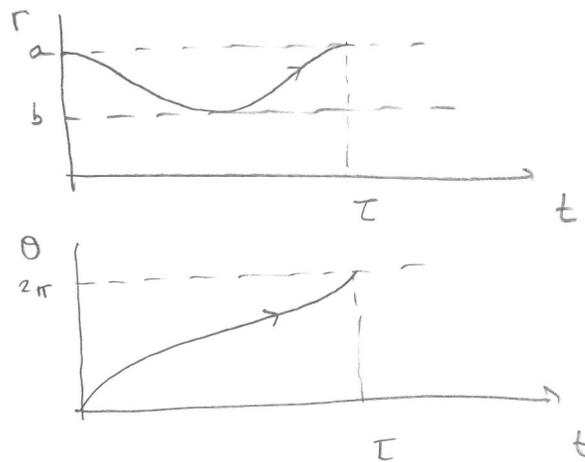
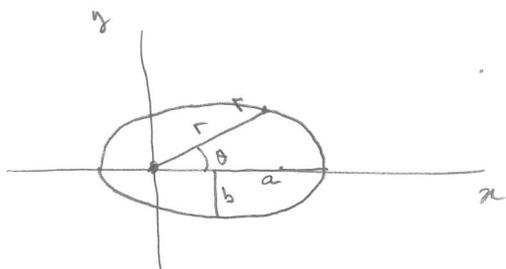
$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Veja que  $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2a} \Rightarrow \lambda_n = 2a/n$



← ONDAS ASSOCIADAS AOS diferentes valores de  $n$ .

O movimento genérico no caso de forças centrais coulombianas é elíptico, e não circular:



Existem então duas regras de quantização:

$$\int_0^{2\pi} L d\theta = n_\theta h \quad \rightarrow \quad L = n_\theta h$$

$$\oint P_r dr = n_r h \quad \text{onde} \quad E = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

com  $P_\theta = L = n_\theta h$

$$\text{e } P_r = \pm \sqrt{2mE - \frac{n_\theta^2 h^2}{r^2} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

A solução da integral é complicada\* e o resultado fornece  $E = E(n_\theta, n_r)$ . O resultado final é:

---

\* Veja MAX BORN, ATOMIC PHYSICS, APêndice XIV e Goldstein, Classical Mechanics

$$E = - \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mu Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2}$$

$$; \quad n = n_\theta + n_r$$

$$n_\theta = 1, 2, 3, \dots$$

$$n_r = 0, 1, 2, \dots$$

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{\mu Z e^2}$$

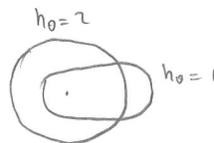
$$b = a \frac{n_\theta}{n}$$

Para cada  $n$  fixo temos  $n$  valores diferentes de  $(n_\theta, n_r) \Rightarrow$  existem degenerações. Veja que  $n_r = 0$  corresponde a órbita circular:

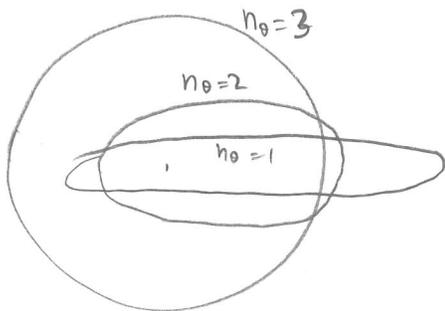
$$\underline{n=1} \quad (n_\theta=1, n_r=0)$$



$$\underline{n=2} \quad (n_\theta=2, n_r=0) \text{ or } (n_\theta=1, n_r=1)$$



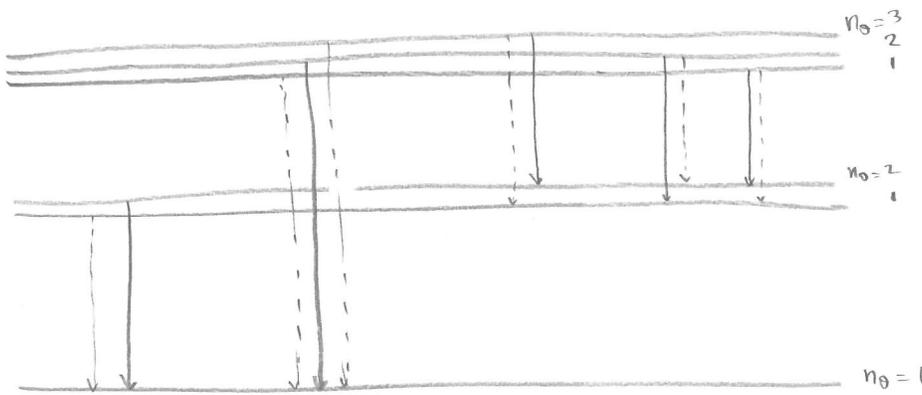
$$\underline{n=3} \quad (n_\theta=3, n_r=0) ; (n_\theta=2, n_r=1) ; (n_\theta=1, n_r=2)$$



A inclusão de correções relativísticas quebram as degenerescências:

$$E = - \frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left( \frac{1}{n_0} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} = \text{constante de estrutura fina.}$$



Somente as transições com  $n_{0i} - n_{0f} = \pm 1$  aparecem no espectro.

Essas "regras de seleção" são impostas mais adiante.

Exemplo: Calcular  $E_{22} - E_{21}$  p/ o Hidrogênio

$$E_{n n_0} = - \frac{13.6}{n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{n} \left( \frac{1}{n_0} - \frac{3}{4n} \right) \right] = - \frac{13.6}{n^2} \left( 1 - \frac{3\alpha^2}{4n^2} \right) - \frac{13.6 \alpha^2}{n^3 n_0}$$

$$\Delta E = - \frac{13.6 \alpha^2}{8} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) = \frac{13.6 \alpha^2}{16} \approx 4.5 \times 10^{-5} \text{ eV} \equiv \frac{\hbar c}{\lambda}$$

$$\lambda = 2,75 \times 10^{-2} \text{ m} = 2,75 \text{ cm}$$

## Problemas com a "velha mecânica quântica"

(23)

- As regras de quantização só se aplicam a sistemas periódicos. NÃO funcionam, por exemplo, para o átomo de Hélio.
- obtêm-se transições entre níveis atômicos mas NÃO é possível calcular as taxas de transição, ou seja, a intensidade das linhas espectrais.
- interpretação das regras de quantização como produzindo ondas estacionárias só funciona se o momento é constante. Se  $p$  varia (como no oscilador harmônico) então  $\lambda = h/p$  também muda ao longo da órbita.

# Correções relativísticas ao Movimento Circular

(A1)

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \hat{e}_r \equiv \frac{d}{dt} (m_0 \gamma \vec{v})$$

$$\vec{r} = r \hat{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

No movimento circular  $\dot{r} = 0$ ,  $|\vec{v}| = r\dot{\theta} = \text{const.}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \dot{\theta}^2 / c^2}} = \text{const.}, \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \hat{e}_r \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -r\dot{\theta}^2 \hat{e}_r$$

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m_0 \gamma r \dot{\theta}^2} \quad (1)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \boxed{L = m_0 \gamma r^2 \dot{\theta} = \text{const.}} \quad (2)$$

$$A \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Ze^2$$

$$\frac{A}{r^2} = \frac{m_0 \gamma v^2}{r} \quad \text{e} \quad \frac{A}{r} = m_0 \gamma v^2$$

$$\text{de (2) vem } L = m_0 \gamma v r \Rightarrow r = \frac{L}{m_0 \gamma v} \quad \text{e}$$

$$\frac{A}{L / m_0 \gamma v} = m_0 \gamma v^2 \quad \boxed{\frac{A}{L} = v} \quad (3)$$

Note que essa relação é idêntica à eq. NÃO-relativística.

Substituindo de volta em  $r$  obtemos

$$r = \frac{L}{m_0 \gamma A/L} \quad \text{ou} \quad \boxed{r = \frac{L^2}{m_0 \gamma A}} \quad (4)$$

Energia : no limite não-relativístico temos

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 + \underbrace{\frac{p^2}{2m_0} - \frac{p^4}{8m_0^3 c^2}}_K ; \quad p = m_0 \gamma v$$

$$K = \frac{m_0 \gamma^2 v^2}{2} - \frac{m_0 \gamma^4 v^4}{8c^2}$$

$$V = -\frac{A}{r} = -\frac{m_0 \gamma A^2}{L^2} = -m_0 \gamma v^2$$

$$\Rightarrow E = K + V = \frac{m_0 v^2 \gamma^2}{2} - \frac{m_0 v^4 \gamma^4}{8c^2} - m_0 \gamma v^2$$

$$\approx \frac{m_0 v^2}{2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{m_0 v^4}{8c^2} \left(1 + \mathcal{O}(v^2/c^2)\right) - m_0 v^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

$$= -\frac{m_0 v^2}{2} + \frac{m_0 v^4}{c^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{m_0 v^2}{2} \left(1 + \frac{v^2}{4c^2}\right)$$

$$\boxed{E = -\frac{m_0 A^2}{2L^2} \left(1 + \frac{A^2}{4L^2 c^2}\right)}$$

Quantizando  $L = n\hbar$  e definindo  $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

obtemos

$$E_n = - \frac{m_0 Z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{4n^2} \right)$$

SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DA ÓRBITA

Utilizamos três equações básicas:

- (1)  $E = m_0 \gamma c^2 + V$  ; cons. de energia
- (2)  $L = m_0 \gamma r^2 \dot{\theta}$  ; cons. de momento angular
- (3)  $c^2 dt^2 - (dr)^2 - (r d\theta)^2 = c^2 (d\tau)^2 = \frac{c^2}{\gamma^2} dt^2$  ; invariância do intervalo

De (3) vem que

$$c^2 - \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 = c^2/\gamma^2 \quad \text{ou} \quad \dot{r}^2 = c^2 - c^2/\gamma^2 - r^2 \dot{\theta}^2 = v^2 - r^2 \dot{\theta}^2$$

De (2) isolamos

$$\dot{\theta} = L / m_0 \gamma r^2$$

De (1) obtemos

$$\gamma = \frac{1}{m_0 c^2 (E - V)}$$

e substituímos

OBS: NÃO estamos assumindo movimento circular agora

$$\frac{d(r(\theta))}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}$$

$$\left( \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \right)^2 = c^2 - \frac{c^2}{\gamma^2} - r^2 \dot{\theta}^2 \rightarrow \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \frac{L^2}{m_0^2 \gamma^2 r^4} = c^2 - \frac{c^2}{\gamma^2} - \frac{r^2 L^2}{m_0^2 \gamma^2 r^4}$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{m_0^2 r^4 \gamma^2 c^2}{L^2} - \frac{m_0^2 c^2 r^4}{L^2} - r^2$$

Definindo  $u = \frac{1}{r}$   $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$

$$\frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{m_0^2 \gamma^2 c^2}{u^4 L^2} - \frac{m_0^2 c^2}{u^4 L^2} - \frac{1}{u^2}$$

Finalmente escrevendo  $\gamma = \frac{1}{m_0 c^2} (E + Au)$  com  $V(u) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{u} \equiv Au$

$$(4) \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{m_0^2 c^2}{L^2} \frac{1}{m_0^2 c^4} (E + Au)^2 - \frac{m_0^2 c^2}{L^2} - u^2$$

Derivando toda a equação em relação a  $\theta$  e cancelando o termo  $2\left(\frac{du}{d\theta}\right)$  comum a todos os fatores obtemos

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{A}{L^2 c^2} (E + Au) - u = -u \underbrace{\left(1 - \frac{A^2}{L^2 c^2}\right)}_{p^2} + \frac{AE}{L^2 c^2} \equiv -u p^2 + \frac{AE}{L^2 c^2}$$

A solução é

$$u(\theta) = B \cos(p\theta - \theta_0) + \frac{AE}{p^2 L^2 c^2}$$

A constante B pode ser encontrada impondo que a equação (4) seja satisfeita:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \left(-p B \sin(p\theta - \theta_0)\right)^2 = p^2 B^2 \sin^2(p\theta - \theta_0) =$$

$$\frac{1}{L^2 c^2} \left(E + AB \cos(p\theta - \theta_0) + \frac{AE}{p^2 L^2 c^2}\right)^2 - \frac{m_0^2 c^2}{L^2} - \left(B \cos(p\theta - \theta_0) + \frac{AE}{p^2 L^2 c^2}\right)^2 =$$

$$B^2 \cos^2(p\theta - \theta_0) \left[\frac{A^2}{L^2 c^2} - 1\right] + \frac{2AB \cos(p\theta - \theta_0)}{L^2 c^2} \left[E + \frac{AE}{p^2 L^2 c^2}\right] + \frac{1}{L^2 c^2} \left(E + \frac{AE}{p^2 L^2 c^2}\right)^2 - \frac{m_0^2 c^2}{L^2} - \frac{A^2 E^2}{p^2 L^4 c^4} - \frac{2BAE \cos(p\theta - \theta_0)}{p^2 L^2 c^2}$$

Escrevendo  $\omega^2 = 1 - \sin^2$  obtemos :

(A5)

termos em  $\sin^2(\theta)$  : 
$$\cancel{P^2} B^2 = B^2 \left( 1 - \frac{A^2}{L^2 c^2} \right) \quad \checkmark$$

termos em  $\omega(\theta)$  : 
$$\frac{2AB}{L^2 c^2} \left[ E + \frac{A^2 E}{P^2 L^2 c^2} - \frac{E}{P^2} \right] = \frac{2ABE}{P^2 L^2 c^2} \left[ P^2 + \frac{A^2}{L^2 c^2} - 1 \right] \equiv 0 \quad \checkmark$$

termos indep. de  $\theta$  :

$$B^2 \left( \frac{A^2}{L^2 c^2} - 1 \right) + \frac{E^2}{L^2 c^2} \underbrace{\left( 1 + \frac{A^2}{P^2 L^2 c^2} \right)^2}_{1/P^2} - \frac{m_0^2 c^2}{L^2} - \frac{A^2 E^2}{P^4 L^4 c^4} \equiv 0$$

$$B^2 P^2 = -\frac{m_0^2 c^2}{L^2} + \frac{E^2}{L^2 c^2} \left[ \frac{1}{P^4} - \frac{A^2}{L^2 P^4} \right] = -\frac{m_0^2 c^2}{L^2} + \frac{E^2}{L^2 P^4} \underbrace{\left( 1 + \frac{A^2}{L^2 c^2} \right)}_{P^2}$$

$$= -\frac{m_0^2 c^2}{L^2} + \frac{E^2}{L^2 c^2 P^2}$$

$$B^2 = \frac{E^2}{L^2 c^2 P^4} - \frac{m_0^2 c^2}{P^2 L^2}$$

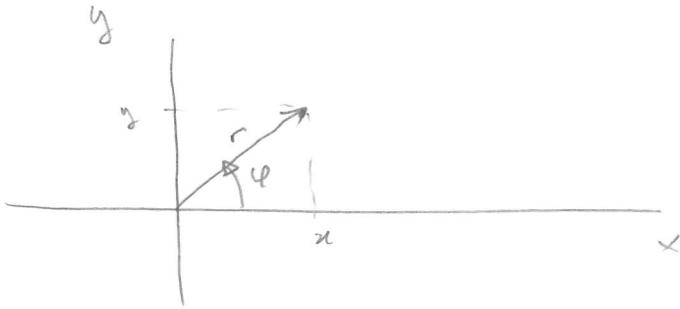
A solução  $u(\theta)$  representa uma elipse que precessiona, pois quando  $\theta = 2\pi$ ,  $\omega(2\pi P) \neq 1$  e  $P \neq 1$  e o movimento não se repete se  $P$  é irracional.

Para o caso de Mercúrio, a precessão que calculamos é bem menor do que a observada. É necessário incluir correções da Relatividade Geral para obter o resultado correto.

## APÊNDICE 2

(B1)

As equações de Newton em 2-D em coordenadas polares.



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi = y/x \end{cases}$$

$$\hat{r} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$\hat{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{d\varphi} \dot{\varphi} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi}$$

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\varphi = r \dot{\varphi}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{\varphi} + r \ddot{\varphi} \hat{\varphi} + r \dot{\varphi} \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} \dot{\varphi} + \dot{r} \frac{d\hat{r}}{d\varphi} \dot{\varphi}$$

$$= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \hat{\varphi}$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = 2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}$$

Para forças conservativas centradas,

(B2)

$$\mathbf{F}(r) = F(r) \hat{r} \equiv - \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = +F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0$$

A segunda equação pode ser re-escrita como

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$L = mr^2\dot{\varphi} = mrv_{\varphi} = \text{const.}$$

Escrevendo  $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$  a 1ª equação (radial) fica

$$m\ddot{r} = mr \left( \frac{L}{mr^2} \right)^2 + F(r) = \frac{L^2}{mr^3} + F(r)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial r} \left[ V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right]$$

○ movimento radial é análogo ao movimento unidimensional

sob a "força efetiva"

$$F_{ef} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}$$

ou o "potencial efetivo"

$$V_{ef} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Se o movimento é circular,  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ , a equação radial fica

$$-m r \dot{\varphi}^2 = F(r)$$

e 
$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi} = r \dot{\varphi} \hat{\varphi}, \text{ em } v = r \dot{\varphi}$$

$$-\frac{m v^2}{r} = F(r)$$

No caso da força atrativa Coulombiana entre  $e^-$  e núcleo,

$$F(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r^2},$$

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r^2}$$