Outros tópicos de Relatividade

14 - Transformações de Momento, Energia e Força

Definindo $\gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, podemos escrever

$$\begin{cases} P_{x1} = \gamma(v_1)\, m_0 v_{1x} \\ P_{y1} = \gamma(v_1)\, m_0 v_{1y} \\ P_{z1} = \gamma(v_1)\, m_0 v_{1z} \\ E_1 = \gamma(v_1)\, m_0 c^2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} P_{x2} = \gamma(v_2)\, m_0 v_{2x} \\ P_{y2} = \gamma(v_2)\, m_0 v_{2y} \\ P_{z2} = \gamma(v_2)\, m_0 v_{2z} \\ E_2 = \gamma(v_2)\, m_0 c^2 \end{cases}$$

As transformações das velocidades foram obtidas na página 25. Só precisamos transformar $\gamma(v_1)$. Mas isso também foi feito na página 29:

$$1 - v_1^2/c^2 = \frac{1 - v_2^2/c^2}{\gamma^2 (1 + v v_{2x}/c^2)^2}, \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\gamma(v_1) = \gamma(v_2) \cdot \gamma(v)\, (1 + v v_{2x}/c^2)}$$

Usando então a expressão acima junto com as equações à página 25 obtemos:

$$P_{x1} = \gamma(v_2)\, \gamma(v)\, m_0 (v + v_{2x}) = \gamma \cdot m_2 (v + v_{2x})$$

$$= \gamma \left(P_{x2} + v/c^2 E_2 \right) \quad e$$

$$E_1 = \gamma(v_2)\, \gamma(v)\, (1 + v v_{2x}/c^2) \cdot m_0 c^2 = \gamma \left(E_2 + v P_{2x} \right).$$

Podemos fazer o mesmo p/ P_{y1} e P_{z1} obtendo:

$$\begin{cases} P_{x1} = \gamma\left(P_{x2} + \frac{v}{c}\left(\frac{E_2}{c}\right)\right) \\ P_{y1} = P_{y2} \\ P_{z1} = P_{z2} \\ \frac{E_1}{c} = \gamma\left(\frac{E_2}{c} + \frac{v}{c} P_{2x}\right) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} P_{x2} = \gamma\left(P_{x1} - \frac{v}{c}\left(\frac{E_2}{c}\right)\right) \\ P_{y2} = P_{y1} \\ P_{z2} = P_{z1} \\ \frac{E_2}{c} = \gamma\left(\frac{E_1}{c} - \frac{v}{c} P_{1x}\right) \end{cases}$$

comparando com as transformações de Lorentz vemos que

almente $\vec{P} \equiv (E/c\ ,\ P_x\ ,\ P_y\ ,\ P_z)$ é um quadri-vetor.

Finalmente podemos obter as transformações p/ a força:

$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{P}_1}{dt_1} = \frac{\frac{d\vec{P}_1}{dt_2}}{\frac{dt_1}{dt_2}}\ , \quad \text{portanto,}$$

$$F_{1x} = \frac{\frac{dP_{1x}}{dt_2}}{\frac{dt_1}{dt_2}} = \frac{\gamma\left(\frac{dP_{x2}}{dt_2} + \frac{v}{c^2}\frac{dE_2}{dt_2}\right)}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} V_{2x}\right)} = \frac{F_{2x} + \frac{v}{c^2}\frac{dE_2}{dt_2}}{1 + vV_{2x}/c^2}$$

Para calcular $\frac{dE_2}{dt_2}$ lembramos que $E_2^2 = m_0^2 c^4 + P_2^2 c^2$.

então,

$$2E_2 \frac{dE_2}{dt_2} = 2c^2 \vec{P}_2 \cdot \frac{d\vec{P}_2}{dt_2}$$

$$\frac{dE_2}{dt_2} = \frac{c^2}{E_2} \vec{P}_2 \cdot \vec{F}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{V}_2 \quad , \text{ pois } E_2 = m_2 c^2$$

Obtemos então

$$F_{1x} = \frac{F_{2x} + \frac{v}{c^2}\vec{F_2}\cdot\vec{v_2}}{1 + v v_{2x}/c^2}$$

$$F_{1y} = \frac{F_{2y}}{\gamma(1 + v v_{2x}/c^2)}$$

$$F_{1z} = \frac{F_{2z}}{\gamma(1 + v v_{2x}/c^2)}$$

14 - O EFEITO DOPPLER

Vamos considerar dois pulsos luminosos sendo emitidos O_2 (a origem do S.I. ②) separados por um intervalo tempo Δt_2. Seja ΔP_1 o intervalo de mpo medido entre as chegadas dos pulsos na origem O_1. ~~/ O_1 / respectivamente~~. Claramente $\Delta P_1 \neq \Delta t_1$, ~~/ mas / ΔP_1~~ ~~/ Δt_1~~, pois, após ser emitido, o 2º pulso deve percorrer a distância $v\Delta t_1$ para alcançar O_1:

$$\Delta P_1 = \Delta t_1 + \frac{v\Delta t_1}{c}$$

$$= \Delta t_1 (1 + \beta)$$

Δt_1 = separação temporal vista por ① entre a emissão dos pulsos

ΔP_1 = separação temporal entre a chegada dos pulsos

Usando que

$$\Delta t_1 = \gamma \Delta t_2 ,$$

$$\Delta P_1 = \Delta t_2 \frac{(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, \Delta P_2$$

Se pensamos nos pulsos como as "frentes de onda" uma emissão contínua de luz (monocromática), vemos que $\Delta t_2 = \frac{1}{\nu_2}$, $\Delta P_1 = \frac{1}{\nu_1}$, onde ν_1 e ν_2 são as frequências da luz quando observadas de ② e ① respectivamente. Então,

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, \nu_2 < \nu_2 ,$$

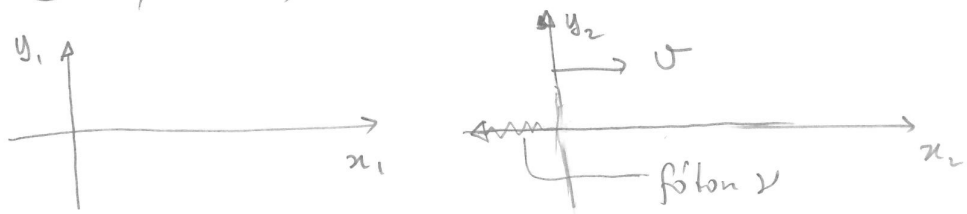
ou seja, a luz vista por ① aparece mais vermelha do que quando vista por ②. Se invertemos o sinal da velocidade de ②, fazendo este se aproximar de ① (em vez de se afastar), obtemos $\nu_1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, \nu_2 > \nu_2$. Nesse caso a luz aparece mais azulada que em ②.

Esses efeitos, chamados "desvio para o vermelho" e "desvio para o azul" são muito úteis para medir a velocidade de galáxias distantes simplesmente olhando para o seu espectro.

O intervalo ΔP_1 também pode ser interpretado como o tempo entre os eventos (emissão dos dois pulsos) que um observador em ① mede quando "olha" para o relógio de ②: um do relógio atrasar, demora um tempo extra para que a luz do relógio chegue em O_L.

É interessante nesse ponto voltar às equações de transformação, energia e momento e aplicá-las para um fóton, que tem $m_0 = 0$ e $E = pc$.

Considere um fóton emitido de ② com frequência ν_2 na direção de ①, i.e., com $\vec{p} = -p_2 \hat{x}$



Então,

$$\frac{E_1}{c} = \gamma\left(\frac{E_2}{c} - \frac{v}{c} p_2\right) \quad \text{ou}$$

$$E_1 = \gamma\left(E_2 - v p_2\right) = \gamma\left(E_2 - \frac{v}{c} E_2\right)$$

$$= \frac{E_2\,(1 - v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = E_2 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

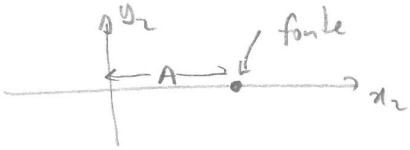
Comparando com $\nu_1 = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\,\nu_2$ vemos que energia dos fótons muda da mesma forma que sua frequência, que sugere que E e ν sejam proporcionais:

$$E = h\nu$$

Veremos que essa foi exatamente a sugestão de PLANCK para quantizar a radiação eletromagnética!

CÁLCULO DA POSIÇÃO e TEMPO DOS EVENTOS DE EMISSÃO e CHEGADA DOS SINAIS DE LUZ:

NO SISTEMA 2, onde está a fonte



EMISSÃO DO primeiro pulso: $x_2 = A$, $t_2 = a$

EMISSÃO DO segundo pulso: $x_2 = A$, $t_2 = a + \Delta t_2$

NO SISTEMA 1

EMISSÃO DO primeiro pulso
$$\begin{cases} x_{1_{E1}} = \gamma(A + va) \\ t_{1_{E1}} = \gamma\left(a + \frac{v}{c^2}A\right) \end{cases}$$

CHEGADA DO 1º PULSO em O_1
$$t_{1_{C1}} = t_{1_{E1}} + x_{1E}/c = \gamma\left(a + \frac{v}{c^2}A\right) + \frac{\gamma}{c}(A + va)$$

EMISSÃO DO segundo pulso
$$\begin{cases} x_{1_{E2}} = \gamma[A + v(a + \Delta t_2)] \\ t_{1_{E2}} = \gamma\left[a + \Delta t_2 + \frac{v}{c^2}A\right] \end{cases}$$

CHEGADA DO 2º PULSO em O_1
$$t_{1_{C2}} = t_{1E2} + \frac{x_{1E2}}{c} = \gamma\left[a + \Delta t_2 + \frac{v}{c^2}A\right] + \frac{\gamma}{c}[A + va + v\Delta$$

INTERVALO entre emissão dos pulsos $= t_{1E2} - t_{1E1} = \gamma \Delta t_2$

INTERVALO entre chegada dos pulsos $= t_{1C2} - t_{1C1} = \gamma \Delta t_2 (1 + v/c)$

15 - Relatividade e Eletromagnetismo

Como discutimos no início do curso, o eletromagnetismo foi responsável pelo aparecimento da Teoria da Relatividade. Vocês deviam verificar agora que as equações de Maxwell são invariantes às transformações de Lorentz. Existem duas maneiras de fazer isso

Tomamos a força de Lorentz $\mathbb{F} = q\left(\mathbb{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \mathbb{B}\right)$ como a lei de força entre cargas e campos. Como conhecemos a transformação de forças podemos deduzir a transformação dos campos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$. Com isso podemos então verificar a invariância das equações de Maxwell.

Podemos exigir que as Equações de Maxwell sejam invariantes e daí deduzir as transformações de campos. Isso nos levaria consistentemente às equações de transformação de força

Adotaremos aqui a primeira alternativa.

Seja o sistema (2) onde uma carga q está (instantaneamente) repouso e sujeita a campos $\mathbb{E}_2$ e $\mathbb{B}_2$.

No sistema (1) os campos medidos são $\mathbb{E}_1$ e $\mathbb{B}_1$. Como está em repouso em (2) as equações de transformação de força ficam (veja pág. 31)

$$F_{1x} = F_{2x}$$

$$F_{1y} = F_{2y} / \gamma$$

$$F_{1z} = F_{2z} / \gamma$$

Vejamos então as forças de acordo com Lorentz:

$$F_{1x} = q \left[E_{1x} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times B_1)_x \right]$$

embora que q está em repouso em $\boxed{2}$ e, portanto, é vista por como tendo velocidade $\vec{v} = (v, 0, 0)$). Como

$$(\vec{v} \times B_1)_x = v_y B_{1z} - v_z B_{1y} = 0$$

vê

$$F_{1x} = q E_{1x} .$$

Também $F_{2x} = q E_{2x}$, e, da primeira equação acima, que

$$E_{1x} = E_{2x} .$$

Vejamos agora a componente y:

$$F_{1y} = q \left[E_{1y} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times B_1)_y \right] = q \left[E_{1y} + \frac{v_z}{c} B_{1x} - \frac{v_x}{c} B_{1z} \right] = q \left[E_{1y} - \frac{v}{c} B_{1z} \right]$$

$$F_{2y} = q E_{2y} = \gamma F_{1y}$$

$$E_{2y} = \gamma \left(E_{1y} - \frac{v}{c} B_{1z} \right)$$ e, analogamente,

$$E_{2z} = \gamma \left(E_{1z} + \frac{v}{c} B_{1y} \right)$$

Para investigar a transformação dos campos magnéticos escolhemos também uma situação simples: consideremos agora que a carga q nova-se em (2) na direção y_2 com velocidade u_2. A força fica então:

$$F_{2x} = q\left[E_{2x} + \frac{1}{c}(\vec{u}_2 \times B_2)_x\right] = q\left[E_{2x} + \frac{u_2}{c}B_{2z}\right]$$

$$F_{2y} = q\,E_{2y}$$

$$F_{2z} = q\left[E_{2z} - \frac{u_2}{c}B_{2x}\right]$$

A velocidade da q vista por (1) é (veja página 22)

$$\vec{u}_1 = (v,\ u_2/\gamma,\ 0) \quad e$$

$$F_{1x} = q\left[E_{1x} + \frac{1}{c}(\vec{u}_1 \times \mathbb{B}_1)_x\right] = q\left[E_{1x} + \frac{u_2}{c\gamma}B_{1z}\right]$$

$$F_{1y} = q\left[E_{1y} + \frac{1}{c}(\vec{u}_1 \times \mathbb{B}_1)_y\right] = q\left[E_{1y} - \frac{v}{c}B_{1z}\right]$$

$$F_{1z} = q\left[E_{1z} + \frac{1}{c}(\vec{u} \times \mathbb{B}_1)_z\right] = q\left[E_{1z} + \frac{v}{c}B_{1y} - \frac{u_2}{c\gamma}B_{1x}\right]$$

Usando agora a transformações dos campos elétricos e das forças obtemos (lembre que agora precisamos da transformação completa, pag. 31):

$$F_{1x} = F_{2x} + v/c^2\, F_{2y}\, u_2$$

$$F_{1y} = F_{2y}/\gamma$$

$$F_{1z} = F_{2z}/\gamma$$

$$E_{1x} + \frac{u_2}{c\gamma}B_{1z} = E_{2x} + \frac{u_2}{c}B_{2z} + v/c^2\, E_{2y}\, u_2$$

$$E_{1y} - \frac{v}{c}B_{1z} = E_{2y}/\gamma$$

$$E_{1z} + \frac{v}{c}B_{1y} - \frac{u_2}{c\gamma}B_{1x} = \left(E_{2z} - \frac{u_2}{c}B_{2x}\right)/\gamma = E_{1z} + \frac{v}{c}B_{1y} - \frac{u_2}{c}B_{2x}/\gamma$$

$$B_{1z} = \gamma \left(B_{2z} + v/c \; E_{2y} \right)$$

$$B_{1x} = B_{2x}$$

Se a carga se movesse na direção z obteríamos a transformação B_{1y}:

$$B_{1y} = \gamma \left(B_{2y} - v/c \; E_{2z} \right)$$

Resumindo,

$$E_{2x} = E_{1x} \qquad B_{2x} = B_{1x}$$

$$E_{2y} = \gamma \left(E_{1y} - \frac{v}{c} B_{1z} \right) \qquad B_{2y} = \gamma \left(B_{1y} + v/c \; E_{1z} \right)$$

$$E_{2z} = \gamma \left(E_{1z} + \frac{v}{c} B_{1y} \right) \qquad B_{2z} = \gamma \left(B_{1z} - v/c \; E_{1y} \right)$$

Uma forma mais geral de escrever essas equações é

$$E_{2\parallel} = E_{1\parallel}$$

$$E_{2\perp} = \gamma \left[E_{1\perp} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \mathbb{B})_{\perp} \right]$$

$$B_{2\parallel} = B_{1\parallel}$$

$$B_{2\perp} = \gamma \left[B_{1\perp} - \frac{1}{c} (\vec{v} \times \mathbb{E})_{\perp} \right]$$

de $\parallel$ e $\perp$ se referem à componentes paralela e perpendicular dos campos à velocidade $\vec{v}$ de ② em relação à ①

Note que $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ não são quantidades independentes, pois um pode se transformar em outro. O número de entidades independentes é e podem ser escolhidas como os potenciais ϕ e $\mathbb{A}$ definidos por

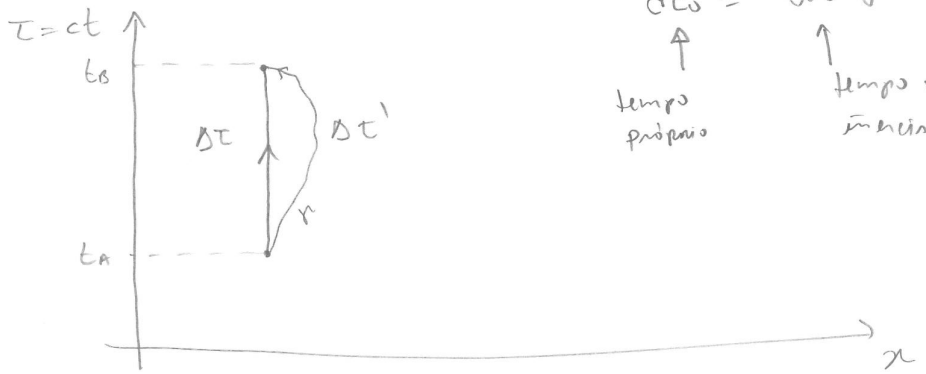
$$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$$

$$\mathbb{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

4 – O PARADOXO DOS GÊMEOS

A teoria da relatividade restrita nos diz como analisar fenômenos físicos a partir de S.I.R. Observações feitas a partir de sistemas não inerciais é assunto da teoria Geral da Relatividade.

O primeiro aspecto importante para entendermos o paradoxo dos gêmeos é notarmos que, se uma pessoa deixa um observador fixo em um S.I.R., faz uma viagem qualquer e volta a se encontrar com o observador fixo, o tempo próprio $\Delta t'$ medido por seu relógio será sempre menor que Δt, medido pelo observador fixo:



$$d\tau_0 = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$d\tau_0$: tempo próprio

dt: tempo medido no referencial inercial.

$$\Delta\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt = t_B - t_A = \text{tempo próprio medido pelo observador em repouso}$$

OBS O ref. adotado é inercial. Estamos observando um movimento acelerado, na curva γ, do pto. de vista do ref. inercial.

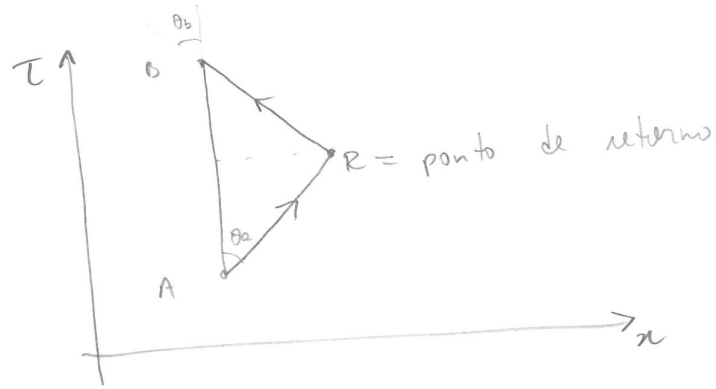
$$\Delta\tau' = \int_{A,\gamma}^{B} dt\sqrt{1-v^2/c^2} = \int_{\gamma}\sqrt{(dt)^2-\frac{(dx)^2}{c^2}} < \Delta\tau$$

Note que a inclinação da curva γ deve ficar dentro "cone de luz"

$$0 \leq \theta < \pi/2$$

pois a velocidade é $\frac{dx}{dt} = c\frac{dt}{d\tau} = c\,tg\,\theta$.

No caso dos gêmeos, um deles parte de A e retorna a B. Vamos simplificar o diagrama $\tau - x$ para



$$tg\,\theta_a = v/c$$

$$tg\,\theta_b = -v/c$$

$$\Delta\tau' = \int_A^B \sqrt{1-v^2/c^2}\,dt = \int_A^R \sqrt{1-v^2/c^2}\,dt + \int_R^B \sqrt{1-v^2/c^2}\,dt$$

$$\Delta\tau' = \frac{1}{\gamma}(t_R - t_A) + \frac{1}{\gamma}(t_B - t_R) = \frac{1}{\gamma}(t_B - t_A)$$

$$= \frac{1}{\gamma}\Delta\tau$$

Vamos fazer um exemplo (Resnick) concreto. Suponha que João fique parado e que Pedro viaje por 3 anos com $v = 0.8c$ e retorne para junto de João. No relógio de Pedro o tempo de viagem foi de 6 anos:

$$\boxed{\Delta t' = 6}$$

A cada ano, Pedro envia um sinal de luz p/ João. João também, a cada ano medido pelo seu relógio, envia um sinal de luz para Pedro.

O tempo passado p/ João é

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = \frac{\Delta t'}{0.6} = 10 \text{ anos.}$$

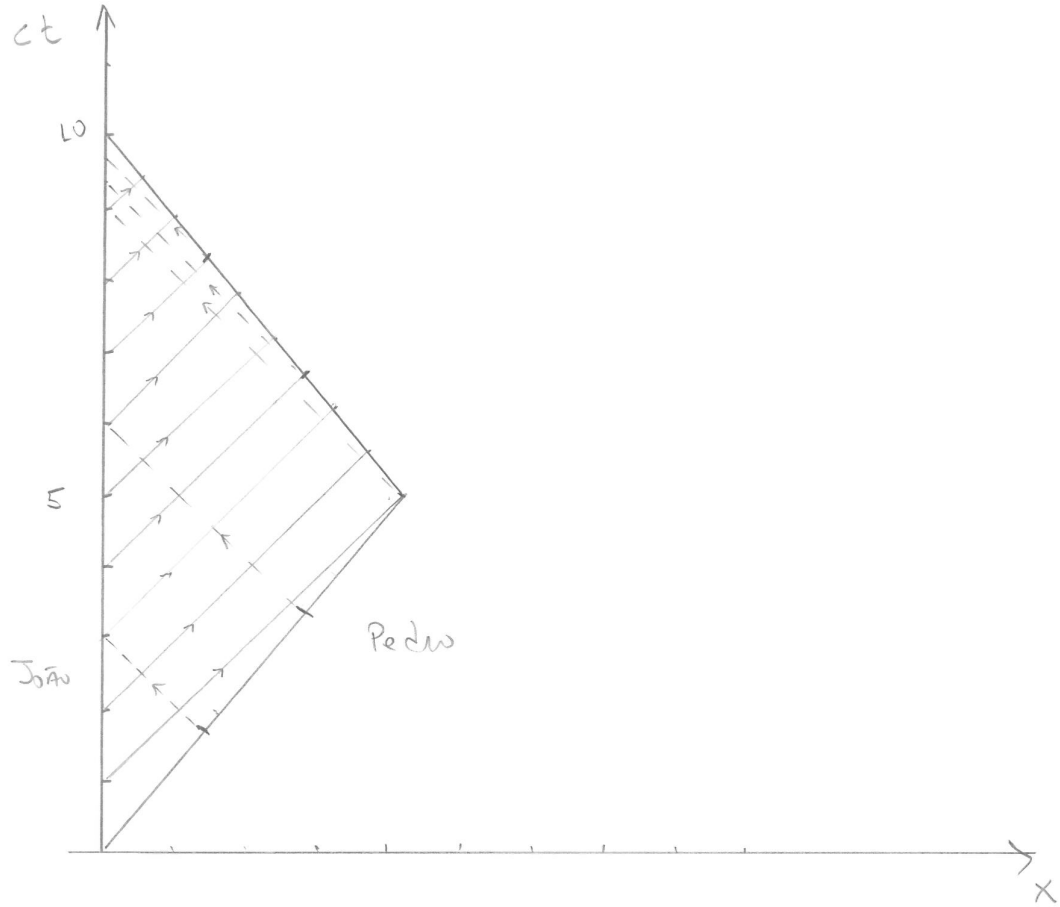
Enquanto os irmãos se afastam um do outro, o intervalo tempo entre as chegadas dos pulsos é

$$\Delta P' = \sqrt{\frac{1+0.8}{1-0.8}}\,(1 \text{ ano}) = \sqrt{\frac{1.8}{0.2}} = 3 \text{ anos}$$

Na volta, enquanto os irmãos se aproximam

$$\Delta P' = \sqrt{\frac{1-0.8}{1+0.8}}\,(1 \text{ ano}) = \frac{1}{3} \text{ ano} = 4 \text{ meses.}$$

O diagrama espaço-tempo fica:



Pedro envia 6 pulsos de luz
João envia 10 pulsos de luz

<u>Pedro</u> Na ida, recebe 1 sinal a cada três anos
Na volta, recebe 1 sinal a cada 4 meses

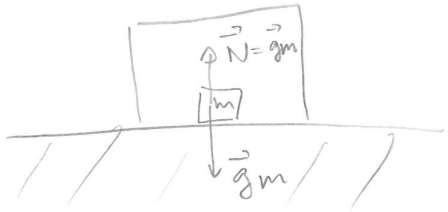
<u>João</u> Recebe 1 sinal a cada três anos até o 9º ano. Nesse instante percebe que Pedro começa a voltar e recebe 1 sinal a cada 4 meses.

O Princípio da Equivalência

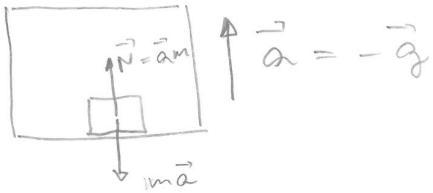
Einstein percebeu que a teoria da gravitação de Newton precisava ser modificada, pois supunha ação instantânea e não levava em conta que a luz poderia sofrer a ação da gravidade através de sua massa inercial $m = E/c^2 = p/c$.

O ponto de partida de Einstein foi o princípio da equivalência, que diz que os efeitos de um campo gravitacional são equivalentes aos produzidos por um sistema sem gravidade, mas acelerado. Assim, um experimento realizado na superfície da Terra, com a força da gravidade $\vec{g}$, seria equivalente ao mesmo experimento realizado no espaço, sem gravidade, dentro de uma nave com aceleração $\vec{a} = -\vec{g}$.

Terra



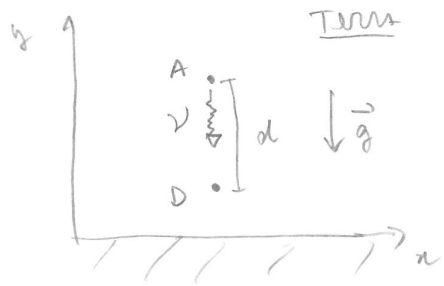
Nave Acelerada

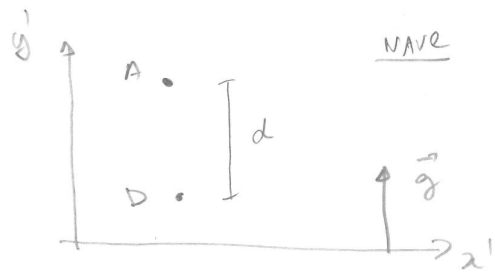


Outra indicação para esse princípio aparece quando estudamos as "forças fictícias" que aparecem na mecânica clássica quando observamos fenômenos mecânicos em referenciais com movimento de rotação. Nesse caso, as forças de Coriolis e centrífuga são sempre proporcionais à massa

da partícula observada. Essas forças desaparecem quando passamos para um referencial inercial. Como a força gravitacional também é proporcional à massa, ela deve "sumir" em um referencial adequado. (veja discussão no Livro do Symon).

Como ilustração do princípio da equivalência vamos considerar o fóton emitido pela fonte A e detectado por D na terra. O mesmo experimento será realizado agora com A e D montados dentro de uma nave acelerada "para cima" com $\vec{g}$





NA NAVE

- fóton é emitido quando A, D tem velocidade u
- quando o fóton chega em D, este tem velocidade $u + gt$

$$\approx u + gd/c$$

- A velocidade do detector em relativa à fonte A é gd/c

$\Rightarrow$ A frequência medida é desviada para o azul:

$$\nu_D = \nu\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = \nu\sqrt{\frac{1+gd/c^2}{1-gd/c^2}} \approx \nu\left(1+gd/c^2\right)$$

NA TERRA

- A e D estão em repouso e não há efeito Doppler
- No entanto, com $m = E/c^2$, o fóton cai no campo gravitacional e ganha $\Delta E = mgd = \frac{E}{c^2} gd$
- Como vimos $E = h\nu$ (que é também a relação quântica). Então, no detector

$$E + \Delta E = h\nu_D$$

$$h\nu + \frac{h\nu g d}{c^2} = h\nu_D \quad \text{e} \quad \nu_D = \nu(1 + gd/c^2)$$

Veja que o fóton sente o campo gravitacional, ganha energia, mas sua velocidade não pode aumentar, então o que muda é a "cor" do fóton.

APÊNDICE I - Notação Covariante e Contravariante

Em analogia com o produto escalar euclidiano (e também a sua aplicação na Teoria Geral da Relatividade), vamos escrever o módulo quadrado de um quadrivetor $\vec{A}$ na forma

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = g_{ij} A^i A^j \quad , \qquad (*)$$

de $A = (A^0, A^1, A^2, A^3)$. De acordo com a definição na página 21,

$$A^2 = A^{0\,2} - A^{1\,2} - A^{2\,2} - A^{3\,2} \quad . \qquad (**)$$

Essa definição faz com que A^2 seja um invariante quando damos de um referencial inercial a outro. Comparando (*) (**), vemos que a matriz 4x4 g_{ij} é dada por

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

As componentes A^i são denominadas componentes <u>contra-variantes</u> quadrivetor $\vec{A}$. As componentes <u>covariantes</u> são definidas por

$$A_j = g_{ji} A^i \quad .$$

É fácil ver que $A_0 = A^0$, $A_1 = -A^1$, $A_2 = -A^2$ e $A_3 = -A^3$.