2.5 Propagadores e Integrais de Caminho de Feynman

A função de onda correspondente à evolução temporal do ket $|\alpha\rangle$ é dada por

$$\psi(x'',t) = \langle x''| e^{\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}} |\alpha,t_0\rangle .$$

Inserindo uma identidade do tipo $\int |x'\rangle\langle x'| dx' = 1$ podemos escrever

$$\psi(x'',t) = \int \langle x''| e^{\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}} |x'\rangle \langle x'|\alpha,t_0\rangle \, dx'$$

$$\equiv \int K(x'',t;x',t_0)\, \psi_\alpha(x',t_0)\, dx'$$

onde $K(x'',t,x',t_0) \equiv \langle x''| e^{\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}} |x'\rangle$ é o propagador, ou o kernel, que é independente de $|\alpha\rangle$ e pode ser usado para propagar qualquer estado inicial.

Propriedades

1) Decomposição espectral. Se $|a'\rangle$ são auto-estados simultâneos de A e H, $[A,H]=0$ com $\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = 1$ então

$$K(x'',t'';x',t') = \sum_{a'} \langle x''|a'\rangle \langle a'|x'\rangle e^{\frac{-iE_{a'}(t''-t')}{\hbar}}$$

2) Traço. Tomando $x''=x'$ e integrando em x'

$$G(t''-t') \equiv \int K(x',t'';x't')\, dx' = \sum_{a'} \int |\langle x'|a'\rangle|^2 dx' \, e^{-iE_{a'}(t''-t')/\hbar}$$

$$= \sum_{a'} e^{-iE_{a'}(t''-t')/\hbar} = \text{soma sobre estados}$$

3) Função de Partição - Estendendo t para o plano complexo e tomando $\frac{it}{\hbar} \equiv \beta$

$$G(-i\hbar\beta) = \sum_{a'} e^{-E_{a'}\beta} = Z(\beta)$$

4) Representação de energia

$$\tilde{G}(E) \equiv -\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty G(t)\, e^{\frac{i}{\hbar}t(E+i\varepsilon)}\, dt \qquad \text{com} \quad \varepsilon \to 0$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\sum_{a'}\int_0^\infty e^{\frac{it}{\hbar}[E-E_{a'}+i\varepsilon]}\, dt = \sum_{a'} \frac{1}{E-E_{a'}+i\varepsilon}$$

5) $K(x'', t''; x' t')$ pode ser interpretado como a função de onda $\psi(x'', t'')$ do estado inicial $|x', t'\rangle$ evoluído por um tempo $t''-t'$. Assim vemos que K satisfaz a equação de Schrödinger com

$$\lim_{t''\to t'} K(x'', t'', x' t') = \langle x'' | x'\rangle = \delta^3(x''-x').$$

Outra maneira de ver esse resultado é a seguinte: definimos o operador de evolução temporal como

$$U(t) = \begin{cases} e^{-iHt/\hbar} & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

Para $t \geq 0$ U satisfaz $i\hbar\frac{\partial U}{\partial t} = HU$, mas há uma descontinuidade de intensidade 1 em $t=0$. Então

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} - HU = i\hbar\,\delta(t) .$$

Integrando a equação de $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$ vemos que

$$i\hbar \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial t} dt - \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} HU\, dt}_{\to 0} = i\hbar$$

$$i\hbar \big[\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{U(\varepsilon)} - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{U(-\varepsilon)} \big] = i\hbar \quad \checkmark .$$

Multiplicando por $\langle x''|$ à esquerda e $|x'\rangle$ à direita obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K(x'', t''; x', t') - H'' K(x'' t''; x' t') = i\hbar\,\delta(t''-t')\,\delta^3(x''-x') .$$

Exemplos

(1) A partícula livre. Usando a decomposição espectral com $A = p$,

$H = \frac{p^2}{2m}$ (1-D) temos $\quad p|p'\rangle = p'|p'\rangle$

$\quad H|p'\rangle = \frac{p'^2}{2m}|p'\rangle$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \langle x''|p'\rangle\langle p'|x'\rangle\, e^{-\frac{ip'^2}{2m\hbar}(t''-t')} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{ip'}{\hbar}(x''-x') - \frac{ip'^2}{2m\hbar}(t''-t')} dp'$$

completando o quadrado: $\Delta t \equiv t''-t' \quad \Delta x \equiv x''-x'$

$$-\frac{ip'^2}{2m\hbar}\Delta t + \frac{ip'\Delta x}{\hbar} = \frac{-i\Delta t}{2m\hbar}\left[p' - \frac{m}{\Delta t}\Delta x\right]^2 + \frac{im\Delta x^2}{2\hbar\Delta t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha \xi^2} d\xi^2 = \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}}$$

$$K(x'', t''; x' t') = \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m\pi\hbar}{i\Delta t}} \; e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x''-x'}{t''-t'}\right)^2\right](t''-t')}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t''-t')}} \; e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(x''-x')^2}{t''-t'}\right]}$$

(2) O oscilador harmônico 1-D. Usamos novamente a decomposição espectral com

$$u_n(x) = \left(\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right)$$

polinômio de Hermite

Os polinômios de Hermite satisfazem a seguinte relação:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\frac{(\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\zeta)}{(1-\zeta^2)}} = e^{-(\xi^2+\eta^2)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta^n}{2^n n!}\right) H_n(\xi)\, H_n(\eta)$$

Então

$$K = \sum_n \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x''^2+x'^2)} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x''\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x'\right) e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t}$$

usando a fórmula acima com $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x''$; $\eta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x'$; $\zeta = e^{-i\omega\Delta t}$

$$K = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x''^2+x'^2) - \frac{i\omega\Delta t}{2}} \underbrace{\sum_n \frac{\zeta^n}{2^n n!} H_n(\xi)\, H_n(\eta)}_{e^{\frac{m\omega}{\hbar}(x''^2+x'^2)} \frac{e^{-\frac{(\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\zeta)}{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Os termos simplificam da seguinte forma: 7.

- $$1-\xi^2 = 1-e^{-2i\omega\Delta t} = e^{-i\omega\Delta t}\left(e^{i\omega\Delta t}-e^{-i\omega\Delta t}\right) = 2ie^{-i\omega\Delta t}\sin\omega\Delta t$$

- $$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\frac{e^{-i\omega\Delta t/2}}{\sqrt{1-\xi^2}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega\Delta t}}$$

- $$-\frac{m\omega}{2\hbar}(x''^2+x'^2)+\frac{m\omega}{\hbar}(x''^2+x'^2)-\frac{(\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\xi)}{1-\xi^2}$$

$$= +\frac{m\omega}{2\hbar(1-\xi^2)}\left[(x''^2+x'^2)(1-\xi^2)-2\left[x''^2+x'^2-2x''x'\xi\right]\right]$$

$$= \frac{+m\omega}{4i\hbar e^{-i\omega\Delta t}\sin\omega\Delta t}\left[-(x''^2+x'^2)\underbrace{(1+\xi^2)}_{2e^{-i\omega\Delta t}\cos\omega\Delta t}+4x'x''\underbrace{\xi}_{e^{-i\omega\Delta t}}\right]$$

$$= \frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega\Delta t}\left[(x''^2+x'^2)\cos\omega\Delta t-2x'x''\right]$$

O resultado final é:

$$K(x''t''; x't') = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega(t''-t')}}\ \exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega(t''-t')}\left[(x''^2+x'^2)\cos\omega(t''-t')-2x'x''\right]\right\}$$

(3) O oscilador harmônico na representação de estados coerentes

$$K(z'', t''; z' t') \equiv \langle z''|\, e^{-\frac{iH(t''-t')}{\hbar}}\,|z'\rangle = e^{-\frac{i\omega\Delta t}{2}}\langle z''|\, z' e^{-i\omega\Delta t}\rangle$$

(veja na pg 51

Dado $|z_1\rangle$ e $|z_2\rangle$, seu overlap é

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = e^{-\frac{|z_1|^2}{2} - \frac{|z_2|^2}{2}} \sum_{n,m} \frac{z_1^{*n}}{n!} \frac{z_2^{m}}{m!} \langle 0 | a^n a^{+m} | 0 \rangle$$

$$= e^{-\frac{|z_1|^2}{2} - \frac{|z_2|^2}{2}} \underbrace{\left\{ \langle 0| + z_1^* \langle 1| + \frac{z_1^{*2}\sqrt{2}}{2!} \langle 2| \ldots \right\} \left\{ |0\rangle + z_2 |1\rangle + \frac{z_2^2\sqrt{2}}{2!} |2\rangle + \ldots \right\}}_{1 + z_1^* z_2 + \frac{1}{2}(z_1^* z_2)^2 + \frac{1}{3!}(z_1^* z_2)^3 + \ldots}$$

$$= e^{z_1^* z_2 - \frac{|z_1|^2}{2} - \frac{|z_2|^2}{2}}$$

Assim

$$K(z'' t''; z' t') = e^{-\frac{i\omega \Delta t}{2}} \exp\left\{ z''^* z' e^{-i\omega \Delta t} - \frac{|z'|^2}{2} - \frac{|z''|^2}{2} \right\}$$

Integrais de Trajetória — O propagador tem uma importante propriedade de composição: o intervalo $t' \to t'''$ pode ser dividido em $t' \to t'' \to t'''$ da seguinte forma

$$\langle x''' | e^{-\frac{iH(t'''-t')}{\hbar}} | x' \rangle = \langle x''' | e^{-\frac{iH(t'''-t'')}{\hbar}} e^{-\frac{iH(t''-t')}{\hbar}} | x' \rangle$$

$$= \int dx'' \langle x''' | e^{-\frac{iH(t'''-t'')}{\hbar}} | x'' \rangle \langle x'' | e^{-\frac{iH(t''-t')}{\hbar}} | x' \rangle$$

ou

$$K(x''' t''', x' t') = \int K(x''' t''', x'' t'') \, K(x'' t'', x' t') \, dx''$$

desde que $t' < t'' < t'''$

Veja que a composição envolve uma integral sobre todos os valores intermediários x''.

Uma representação interessante para o propagador é em termos da representação de Heisenberg. Lembre que o operador posição é dinâmico

$$x^H(t) = e^{iHt/\hbar}\, x\, e^{-iHt/\hbar}$$

e seus auto-estados são $|x't'\rangle = e^{iHt'/\hbar}|x'\rangle$. Então

$$K(x''t'', x't') = \langle x''|e^{\frac{-iHt''}{\hbar}} e^{\frac{iHt'}{\hbar}}|x'\rangle \equiv \langle x''t''|x't'\rangle$$

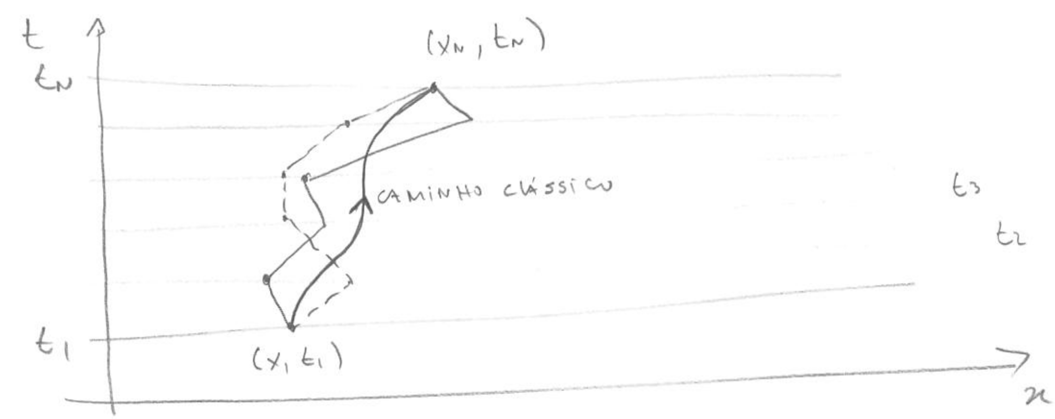
A idéia da integral de trajetória é reduzir a propagação à uma composição de muitas propagações infinitesimais. Essas, por sua vez, podem ser calculadas diretamente. Como teremos que considerar todos os ptos intermediários, e se interpretamos cada sequência deles como uma trajetória, teremos a soma sobre trajetórias compondo o propagador.

Seja $\quad x'' = x_N \;;\quad x' = x_1 \;;\quad \epsilon \equiv \frac{N-1}{t''-t'}$ = intervalo de tempo

$\quad\quad t'' = t_N \;;\quad t' = t_1$

Então

$$\langle x_N t_N|x_1 t_1\rangle = \int dx_{N-1} \cdots dx_2 \langle x_N t_N|x_{N-1}t_{N-1}\rangle \cdots \langle x_2 t_2|x_1 t_1\rangle$$



$$\langle x_n t_n|x_{n-1} t_{n-1}\rangle \equiv \langle x_n|e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}}|x_{n-1}\rangle$$

Quanticamente todos os caminhos devem ser incluídos. Classicamente, dados $(x_1 t_1)$ e $(x_N t_N)$, só há um (ou alguns) caminhos possíveis dados pelo Princípio Variacional de Hamilton:

$$\delta S = 0$$

$$S(x_N t_N, x_1 t_1) = \int_{x_1 t_1}^{x_N t_N} \mathcal{L}(x, \dot{x})\, dt$$

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$$

Cálculo do propagador infinitesimal

Para $\quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad$ temos

$$\langle x_n | e^{-\frac{iH\epsilon}{\hbar}} | x_{n-1}\rangle = \int \langle x_n | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}(p^2/2m + V(x))} | p'\rangle\langle p' | x_{n-1}\rangle\, dp'$$

$$\simeq \int \langle x_n | 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}(p^2/2m + V(x)) | p'\rangle\langle p' | x_{n-1}\rangle\, dp'$$

$$= \int \langle x_n | p'\rangle\langle p' | x_{n-1}\rangle \left[1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}\left(\frac{p'^2}{2m} + V(x_n)\right)\right] dp'$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}p'(x_n - x_{n-1}) - \frac{i\epsilon p'^2}{2m\hbar} - \frac{i\epsilon V(x_n)}{\hbar}}\, dp' \qquad \text{(veja B7}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}}\, \exp\left\{\frac{i}{4\frac{\epsilon}{2m\hbar}} \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\hbar^2} - \frac{i\epsilon V(x_n)}{\hbar}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\epsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon}\right)^2 - V(x_n)\right]\right\}$$

Vemos que o expoente é a ação clássica calculada ao longo do segmento reto $x_{n-1} - x_n$:

$$\langle x_n | e^{\frac{-iH\epsilon}{\hbar}} | x_{n-1}\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}\; e^{\frac{i}{\hbar}S(n,n-1)}$$

e

$$\langle x_N t_N | x_1 t_1\rangle = \underbrace{\lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{N-1}{2}} \int dx_2 \cdots dx_{N-1}}_{\Downarrow}\; e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=2}^{N} S(n,n-1)}$$

$$\equiv \int \mathcal{D}[x(t)]\; e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_N} \mathcal{L}(x,\dot{x})\,dt}$$

Exemplo : a partícula livre

$$\langle x_N t_N | x_1 t_1\rangle = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{N-1}{2}} \int dx_2 \ldots dx_{N-1}\; e^{\frac{i}{\hbar}\sum_2^N \frac{m}{2\epsilon}(x_n - x_{n-1})^2}$$

– integral sobre x_2 :

$$\int dx_2\; e^{\frac{im}{2\epsilon\hbar}\big[\underbrace{(x_2-x_1)^2 + (x_3-x_2)^2}_{2x_2^2 - 2x_2(x_3+x_1) + x_3^2 + x_1^2}\big]} \times e^{\frac{i}{\hbar}\sum_4^N \frac{m}{2\epsilon}(x_n - x_{n-1})^2}$$

$$= \left(\frac{i\pi\epsilon\hbar}{m}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{im(x_3+x_1)^2}{4\epsilon\hbar} + \frac{im}{2\epsilon\hbar}(x_1^2 + x_3^2) + \frac{i}{\hbar}\sum_4^N \frac{m}{2\epsilon}(x_n - x_{n-1})^2\right\}$$

$$= \left(\frac{i\pi\epsilon\hbar}{m}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{4\epsilon}(x_3 - x_1)^2 + \frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\epsilon}\sum_4^N (x_n - x_{n-1})^2\right\}$$

– integral sobre x_3:

$$\left(\frac{i\pi\epsilon\hbar}{m}\right)^{1/2}\int dx_3\, e^{\underbrace{\frac{im}{4\epsilon\hbar}(x_3-x_1)^2+\frac{im}{2\hbar\epsilon}(x_4-x_3)^2}_{\frac{3im}{4\epsilon\hbar}x_3^2-\frac{im}{\hbar\epsilon}x_3\left(x_4+\frac{x_1}{2}\right)+\frac{imx_1^2}{4\hbar\epsilon}+\frac{imx_4^2}{2\hbar\epsilon}}+\frac{im}{2\hbar\epsilon}\sum_5^N(x_n-x_{n-1})^2}$$

$$=\left(\frac{i\pi\epsilon\hbar}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{4i\pi\epsilon\hbar}{3m}\right)^{1/2}\exp\left\{\underbrace{\frac{-im}{12\hbar\epsilon}(2x_4+x_1)^2+\frac{imx_1^2}{4\hbar\epsilon}+\frac{imx_4^2}{2\hbar\epsilon}}_{\frac{im}{6\hbar\epsilon}(x_4-x_1)^2}+\sum_5^N\frac{im}{2\hbar\epsilon}(x_n-x_{n-1})^2\right.$$

O pré-fator da integral é $\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{N-1}{2}}$. Como temos $(N-2)$ integrais, a cada integral podemos usar um desses termos, e no fim sobrará um. Usando dois deles:

$$\left(\frac{i\pi\epsilon\hbar}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{4\pi i\epsilon\hbar}{3m}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

e

$$K=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{N-3}{2}}\int dx_4\cdots dx_{N-1}\exp\left\{\frac{im}{3.2\hbar\epsilon}(x_4-x_1)^2+\sum_{n=5}^N\frac{im}{2\hbar\epsilon}(x_n-x_{n-1})^2\right.$$

Repetindo o processo chegamos à

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(N-1)\epsilon}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{im(x_N-x_1)^2}{2(N-1)\epsilon\hbar}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\;e^{\frac{im(x_N-x_1)^2}{2t\hbar}}.$$

Limite Clássico

Da expressão formal

$$\langle x_N t_N | x_1 t_1 \rangle = \int \mathcal{D}[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}$$

vemos que, para $S \gg \hbar$, caminhos vizinhos, com ação muito próxima, acabam tendo contribuições muito diferentes. Se

caminho 1 $\longrightarrow$ S_1

caminho 2 $\longrightarrow$ $S_1 + \Delta S$

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_1} + e^{\frac{i}{\hbar} S_1 + \frac{i\Delta S}{\hbar}} = e^{\frac{i}{\hbar} S_1}\left[1 + e^{i\Delta S/\hbar}\right]$$

se $\frac{\Delta S}{\hbar} \gg 1$ essa fase fica essencialmente aleatória e sua soma tende a se anular. No entanto, se existir um caminho estacionário, onde $\delta S = 0$, trajetórias vizinhas vão ter a mesma ação em primeira ordem, e vão somar construtivamente suas contribuições. Mas esse é o caminho clássico. Então, no limite clássico, apenas um pequeno tubo de caminhos em torno do caminho clássico contribuem.

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

$$\langle x\, t+\epsilon | x'\, t_0\rangle = \int \langle x, t+\epsilon | \bar{x}\, t\rangle \langle \bar{x}\, t | x'\, t_0\rangle\, d\bar{x}$$

$$= \int \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}\; e^{\frac{im}{2\hbar}\frac{(x-\bar{x})^2}{\epsilon} - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(x)} \langle \bar{x}\, t | x'\, t_0\rangle\, d\bar{x}$$

Definindo $\xi = x - \bar{x}$, A integral será importante

p/ $\xi \simeq 0 \Rightarrow \langle \bar{x}\, t | x'\, t_0\rangle = \langle x-\xi, t | x'\, t_0\rangle \simeq$

$$\langle x t | x' t_0\rangle - \xi \frac{\partial}{\partial x}\langle x t | x' t_0\rangle + \frac{\xi^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle x t | x' t_0\rangle$$

Além disso $e^{-\frac{i\epsilon V(x)}{\hbar}} \simeq 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(x)$ e

$$\langle x, t+\epsilon | x'\, t_0\rangle \simeq \langle x t | x' t_0\rangle + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\langle x t | x' t_0\rangle$$

Então temos

$$\langle x t | x' t_0\rangle + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\langle x t | x' t_0\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}\int e^{\frac{im\xi^2}{2\hbar\epsilon}}\left(1 - \frac{i\epsilon V}{\hbar}\right)\left(\langle\,\rangle - \xi\frac{\partial}{\partial x}\langle\,\rangle + \frac{\xi^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle\,\rangle\right)$$

$$= \langle x t | x' t_0\rangle - \frac{i\epsilon V}{\hbar}\langle x t | x' t_0\rangle + \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}\,\frac{1}{2}\,i\sqrt{\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m}}\,\frac{2\hbar\epsilon}{2m} * \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle x t | x' t_0\rangle$$

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\langle x t | x' t_0\rangle = -\frac{i\epsilon V}{\hbar}\langle x t | x' t_0\rangle + \frac{i\hbar\epsilon}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle x t | x' t_0\rangle$$

ou

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle x t | x' t_0\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)\langle x t | x' t_0\rangle$$

$$\int \xi^2 e^{-\alpha\xi^2/i}\, d\xi = -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{\pi i}{\alpha}} = \frac{i}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi i}{\alpha}}$$

APÊNDICE-B: INTEGRAIS GAUSSIANAS e DE FRESNEL

(I) Seja $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x}\, dx$

Completando o quadrado temos $-\alpha x^2 + \beta x = -\alpha\left(x - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha}$

Fazendo $y = (x - \beta/2\alpha)\sqrt{\alpha}$

$$I = \frac{e^{\beta^2/4\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \equiv \frac{e^{\beta^2/4\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\, J$$

$$J^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, e^{-y^2 - z^2} \qquad \begin{matrix} y \equiv r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{matrix} \qquad dy\,dz = r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r\,dr\, e^{-r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{du}{2} e^{-u} = \pi \rightarrow J = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\beta^2/4\alpha}}$$

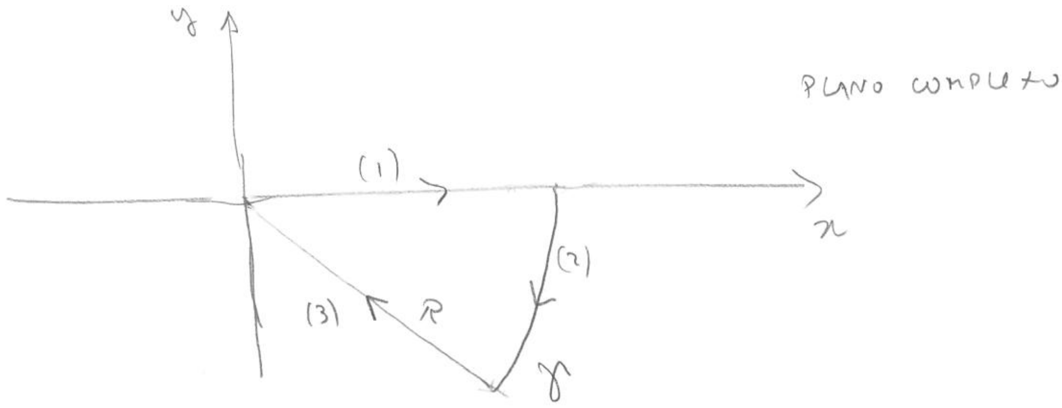
(II) Seja agora $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x^2 + i\beta x}\, dx = \frac{e^{\frac{i\beta^2}{4\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy^2}\, dy$

$$= \frac{2\, e^{i\beta^2/4\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-ix^2}\, dx}_{J}$$

B2

Para transformá-la em uma integral Gaussiana fazemos

$$x^2 = -iu^2 = e^{-i\pi/2}u^2 \longrightarrow x = e^{-i\pi/4}u$$



$$\lim_{R\to\infty} \oint_\gamma e^{-iz^2}dz = J + \int_{\gamma_2} e^{-iz^2}dz - \int_{\gamma_3} e^{-iz^2}dz = 0$$ (Não há polos)

Em γ_2 $z = Re^{i\theta}$ $-\frac{\pi}{4} < \theta < 0$ $\Rightarrow -iz^2 = -iR^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$
$= -iR^2\cos 2\theta + R^2\sin 2\theta$

Como $Re(-iz^2) < 0$, a integral sobre γ_2 vai a zero quando $R \to \infty$.

Em γ_3 $z = r\, e^{-i\pi/4}$, $-iz^2 = -ir^2 e^{-i\pi/2} = -r^2$ e

$$\int_{\gamma_3} e^{-iz^2}dz = \int_0^\infty e^{-r^2} e^{-\frac{i\pi}{4}}dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{i}} \Rightarrow J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{i}}$$ e

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x^2 + i\beta x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}}\; e^{i\beta^2/4\alpha}}$$

Outros resultados úteis são: (B3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\alpha x^2+\beta x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\beta}{2\alpha}\right) \frac{e^{-y^2}\, dy}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\beta}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2+\beta x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{y^2}{\alpha} + \frac{\beta y}{\alpha\sqrt{\alpha}} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right] \frac{e^{-y^2}\, dy}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Veja que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2}\, dy = -\frac{d}{d\alpha}\left[\int e^{-\alpha y^2}\, dy\right] = -\frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-i\alpha y^2}\, dy = i\frac{d}{d\alpha}\int e^{-i\alpha y^2}\, dy = i\frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}}\right) = \frac{i}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}} = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi i}{\alpha}}$$

APÊNDICE C - Cálculo de $\langle x|z\rangle$ C1

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x) = e^{-t^2+2tx}$$

$$\langle x|z\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{z^k}{\sqrt{k!}} \langle x|k\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k/2}\sqrt{k!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right) \frac{z^k}{\sqrt{k!}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^k \frac{1}{k!} H_k\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right) e^{-|z|^2/2}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$t = z/\sqrt{2} \qquad y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$$

$$= e^{-\frac{|z|^2}{2}-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \underbrace{\sum \frac{t^k}{k!} H_k(y)}_{e^{-t^2+2ty}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{-\frac{|z|^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2\hbar} - \frac{z^2}{2} + \frac{2z}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right\}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{q\sqrt{m\omega}}{\sqrt{\hbar}} + \frac{ip}{\sqrt{\hbar m\omega}}\right) \qquad |z|^2 = \frac{m\omega q^2}{2\hbar} + \frac{p^2}{2\hbar m\omega}$$

$$z^2 = \frac{m\omega q^2}{2\hbar} - \frac{p^2}{2\hbar m\omega} + \frac{2ipq}{\hbar}$$

$$\langle x|z\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{-\frac{m\omega q^2}{2\hbar} - \frac{ipq}{2\hbar} - \frac{m\omega^2 x^2}{2\hbar} + \underbrace{x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} + \frac{ip}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right)}_{\frac{2m\omega xq}{2\hbar} + \frac{ipx}{\hbar}}\right\}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-q)^2 + \frac{ip}{\hbar}(x-q/2)\right\}$$

//

APÊNDICE-D - Método Alternativo para Resolver a integral de DI trajetória para a partícula livre.

Vimos no Apêndice B que

$$I_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} .$$

Considere agora a integral dupla

$$I_2 = \int e^{-\alpha_1 x_1^2 - \alpha_2 x_2^2 - 2\beta x_1 x_2} dx_1 dx_2 .$$

O expoente pode ser escrito como

$$(x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta \\ \beta & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv x^T A x$$

Como A é simétrica, existe uma transformação ortogonal $x = Oy$ tal que $x^T A x = y^T O^T A O y = y^T A_d y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, i.e., O diagonaliza A. Como $OO^T = 1$ o Jacobiano da transformação é 1 e

$$I_2 = \int e^{-\lambda_1 y_1^2 - \lambda_2 y_2^2} dy_1 dy_2 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}$$

A integral converge se λ_1 e λ_2 forem positivos. Esse resultado pode ser generalizado p/ N dimensões:

$$I_N = \int e^{-x^T A x} dx = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det A}}$$

onde $x^T A x$ é uma forma quadrática dada por $\sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j$ e A é uma matriz simétrica.

A integral na página 76 é

$$I_N = \int dx_2 \ldots dx_{N-1} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=2}^{N} \frac{m}{2\epsilon} (x_n - x_{n-1})^2 \right\}$$

e

$$\sum_{n=2}^{N} (x_n - x_{n-1})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2^2) + (x_4 - x_3)^2 + \ldots (x_N - x_{N-1})^2$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_1) + (x_2^2 + x_3^2 - 2x_3x_2) + (x_4^2 + x_3^2 - 2x_3x_4) \ldots + (x_{N-1}^2 + x_N^2 - 2x_Nx_{N-1})$$

$$= \underbrace{x_1^2 + x_N^2}_{\alpha} + (x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \ldots x_{N-1}) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 \\ & \ldots & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$-2(x_2 \;\; x_3 \ldots x_{N-1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \leftarrow v$$

$$\equiv \alpha - 2x^T \cdot v + x^T A x$$

(NOTE que x_1 e x_N não são integrados). Podemos agora "completar o quadrado": buscamos o vetor μ e o escalar w tal que

$$(x - \mu)^T A (x - \mu) + w \equiv \alpha - 2x^T \cdot \vec{v} + x^T A x$$

$$= x^T A x - 2x^T A \mu + \mu^T A \mu + w \quad \Rightarrow \quad A\mu = v \rightarrow \boxed{\mu = A^{-1} v}$$

$$\text{e} \quad \mu^T A \mu + w = \alpha \quad \Rightarrow \quad w = \alpha - \mu^T A \mu = \alpha - v^T A^{-1} A A^{-1} v$$

$$\boxed{w = \alpha - v^T A^{-1} v}$$

A forma quadrática do expoente então pode ser escrita como

$$(x-A^{-1}v)^T A\,(x-A^{-1}v) + \alpha - v^T A^{-1} v$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x - A^{-1}v$ obtemos

$$I_N = \int dy_2 \cdots dy_{N-1}\, e^{\frac{-m}{2i\epsilon\hbar} y^T A y} \times e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left(x_1^2+x_N^2 - v^T A^{-1} v\right)}$$

$$= \left[\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m}\right]^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det A}}\, \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left(x_1^2+x_N^2 - v^T A^{-1} v\right)\right\}$$

É fácil ver por indução que $\det A = N-1$. Com o vetor v só tem as componentes externas

$$v^T A^{-1} v = (A^{-1})_{11}\, x_1^2 + (A^{-1})_{N-2,N-2}\, x_N^2 + 2x_1 x_N \left(A^{-1}_{1,N-2} + A^{-1}_{N-2,1}\right)$$

Esses elementos de matriz podem ser obtidos pelo método do cofator:

$$A^{-1}_{11} = A^{-1}_{N-2,N-2} = \frac{N-2}{N-1} \quad \text{e} \quad A^{-1}_{1,N-2} = A^{-1}_{N-2,1} = \frac{1}{N-1}$$

Assim

$$x_1^2 + x_N^2 - v^T A^{-1} v = x_1^2\left(1 - \frac{N-2}{N-1}\right) + x_N^2\left(1 - \frac{N-2}{N-1}\right) - \frac{2x_1 x_N}{N-1}$$

$$= \frac{1}{N-1}\left(x_1^2 + x_N^2 - 2x_1 x_N\right) = \frac{(x_N - x_1)^2}{N-1} \quad \text{e}$$

$$I_N = \left(\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m}\right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{N-1}}\, e^{-\frac{im}{2\hbar}\frac{(x_N-x_1)^2}{\epsilon(N-1)}}$$

Multiplicando por $\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{N-1}{2}}$ obtemos o propagador:

$$\langle x_N t_N | x_1 t_1\rangle = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-im(x_N-x_1)^2}{2\hbar T}} \quad \text{onde } \epsilon(N-1) = T$$

Lembre que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left[\text{matriz dos cofatores} \right]^T$$

O cofator ij é obtido calculando o determinante de A retirando a linha i e a coluna j.

2.6 Potenciais e Transformações de Gauge

O conceito de força da mecânica clássica é quase sempre substituído pelo conceito de energia potencial na teoria quântica. Para forças conservativas a relação entre eles é

$$\mathbb{F}(x) = -\nabla V(x) \longrightarrow \begin{cases} H = \mathbb{P}^2/2m + V(x) \\ L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \end{cases}$$

No caso do eletromagnetismo a força de Lorentz é

$$q\left(\mathbb{E} + \frac{1}{c}\mathbb{V}\times\mathbb{B}\right)$$

e introduzimos os potenciais ϕ e $\mathbb{A}$ tal que

$$\mathbb{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbb{A}}{\partial t} \qquad \mathbb{B} = \nabla\times\mathbb{A} \longrightarrow \begin{cases} H = \frac{1}{2m}\left(\mathbb{P}-\frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2 + e\phi \\ \mathcal{L} = \frac{m}{2}\mathbb{V}^2 + \frac{e}{c}\mathbb{V}\cdot\mathbb{A} - e\phi \end{cases}$$

Classicamente existem diferentes escolhas de $V(x)$, ou de ϕ e $\mathbb{A}$, que levam às mesmas forças, e portanto ao mesmo movimento. Em particular as mudanças

$$V(x) \longrightarrow \tilde{V}(x) = V(x) + V_0(t)$$

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \ ; \qquad A \rightarrow \tilde{A} = A + \nabla\Lambda$$

Nesta seção vamos considerar o efeito de tais transformações na mecânica quântica.

<u>Potenciais constantes</u> Vamos considerar primeiro a mudança

$$V(x) \rightarrow \tilde{V}(x) = V(x) + V_0$$

Seja $|\alpha\rangle$ um estado inicial e

$$|\alpha, t\rangle \longrightarrow \text{evolução com } V(x)$$

$$\widetilde{|\alpha, t\rangle} \longrightarrow \text{evolução com } \tilde{V}(x)$$

Então

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\alpha\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{H}t} |\alpha\rangle = e^{\frac{-iV_0 t}{\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\alpha\rangle = e^{\frac{-iV_0 t}{\hbar}} |\alpha, t\rangle$$

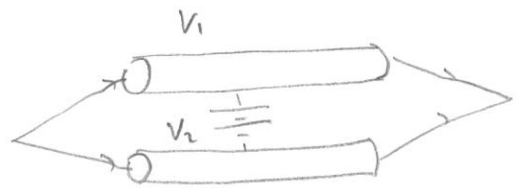
e

$$\tilde{\Psi}(x,t) = e^{-iV_0 t/\hbar} \Psi(x,t)$$

Como a diferença é de uma fase global, valores esperados (que só dependem de diferenças de energia) não são afetados. Se $V_0 = V_0(t)$ o cálculo é idêntico e a diferença de fase será

$$-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V(t')\,dt' .$$

Exemplo-1 – Feixe de partículas carregadas é separado e passa por tubos metálicos. Quando as partículas entram no tubo eles são carregados com potenciais constantes diferentes:



Como os potenciais são constantes, não há força. A função de onda na região de interferência será

$$\Psi(x,t) = \varphi(x,t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}V_1 t} + \varphi(x,t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}V_2 t} = \varphi(x,t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}V_1 t}\left[1 + e^{\frac{i}{\hbar}(V_2 - V_1)t}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{1}{\hbar}(V_2 - V_1)t$$ vai produzir um padrão de interferência.

o que é um efeito puramente quântico.

Exemplo 2 – Efeito da Gravidade na Mec. Quântica

Para uma partícula de massa m no campo uniforme $\vec{g}$, a equação clássica não depende da massa:

$$\vec{F} = -mg\hat{z} \qquad V(z) = mgz = m\Phi_G(z)$$

$$m\ddot{\vec{x}} = -mg\hat{z} \rightarrow \boxed{\ddot{\vec{x}} = -g\hat{z}}$$

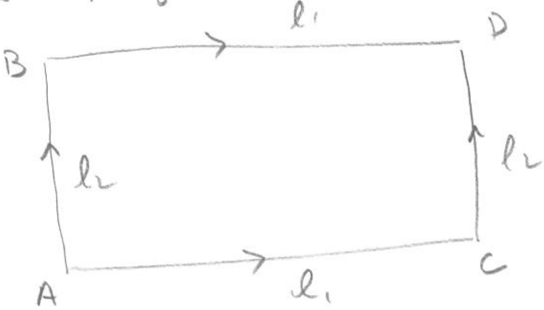
Na mecânica quântica a massa aparece:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + m\Phi_G\right]\psi \Rightarrow \text{aparece a combinação } \left(\frac{\hbar}{m}\right)$$

Embora a equação de Heisenberg para $\vec{x}$ t.b. não envolva m

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt} = -\nabla V = -mg\hat{z} \rightarrow \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -g\hat{z}$$

efeitos de interferência podem ser medidos. Considere o experimento abaixo onde os caminhos são horizontais:



OBS Classicamente a velocidade em B-D é menor que em AC: $E = p^2/2m + mgz \rightarrow \frac{p\Delta p}{m} = -mg\Delta z = -mgl_2\sin\delta$. Usando $p = \hbar/\bar{\lambda}$ vem $\frac{\Delta\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}^2} = \frac{m^2 g l_2 \bar{\lambda}\sin\delta}{\hbar^2}$ e $\Delta\varphi = \frac{l_1\Delta p}{\hbar}$ reproduz o resultado abaixo.

Escolhendo $V = 0$ na mesa do experimento as partículas seguindo ABD ou ACD apresentam a mesma fase $\Rightarrow$ sem interferência. Rodando o experimento em torno de AC de δ mudamos o potencial em BD de $mgl_2\sin\delta$ induzindo uma mudança de fase

$$\exp\left\{\frac{-imgl_2\sin\delta\, T}{\hbar}\right\} ; \quad T = l_1/v$$

Em termos de $\bar{\lambda} = \hbar/p = \frac{\hbar}{mv} = \frac{\hbar T}{m l_1} \rightarrow T = \frac{m l_1 \bar{\lambda}}{\hbar}$

$$\Delta\phi = -\frac{m^2 g l_1 l_2 \bar{\lambda}\sin\delta}{\hbar^2}$$

A experiência foi feita com neutrons usando

$$\lambda = 1.42\ \mathring{A} \qquad m = 1.675 \times 10^{-27}\ kg$$
$$l_1 l_2 = 10\ cm^2 \qquad \hbar = 1.05 \times 10^{-34}\ J.s$$
$$\sin\delta = 1$$

produziu $\Delta\phi = 55.6 \Rightarrow \frac{\Delta\phi}{2\pi} \simeq 9$ oscilações conforme δ é variado de 0 à 2π.

TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE NO ELETROMAGNETISMO

Trataremos apenas o caso independente do tempo. Então

$$\mathbb{E} = -\nabla\phi \qquad \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} \quad ; \quad \phi = \phi(\mathbb{x}) \ ; \ \mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{x})$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbb{P} - \frac{e\mathbb{A}}{c}\right)^2 + e\phi \equiv \frac{1}{2m}\left[\mathbb{P}^2 - \frac{e}{c}(\mathbb{P}\cdot\mathbb{A} + \mathbb{A}\cdot\mathbb{P}) + \frac{e^2\mathbb{A}^2}{c^2}\right]$$

$\mathbb{P}$ = momento canônico = gerador de translações

$\Pi \equiv$ momento mecânico $= \mathbb{P} - \frac{e}{c}\mathbb{A}$

Veja que $[P_i, P_j] = 0$ mas $[\Pi_i, \Pi_j] = \left(\frac{i\hbar e}{c}\right)\varepsilon_{ijk}B_k \neq 0$

PROVA $[\Pi_i, \Pi_j] = \left[P_i - \frac{eA_i}{c}, P_j - \frac{eA_j}{c}\right] = -\frac{e}{c}[P_i, A_j] + \frac{e}{c}[P_j, A_i]$

$$= \frac{i\hbar e}{c}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) = \frac{i\hbar e}{c}\varepsilon_{ijk}B_k \quad \text{pois}$$

Como $B_k = \varepsilon_{klm}\partial_l A_m = \frac{\partial A_m}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_m}$ se $k \neq l \neq m$

Então, escrevendo $H = \frac{\Pi^2}{2m} + e\phi$

$$\frac{d\mathbb{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbb{x}, H] = \frac{1}{2i\hbar m}[\mathbb{x}, \Pi^2] = \frac{1}{2mi\hbar}\left\{\Pi[\mathbb{x}, \Pi] + [\mathbb{x}, \Pi]\Pi\right\}$$

$$= \frac{\Pi}{m} \rightarrow m\frac{d\mathbb{x}}{dt} = \Pi$$

$$m\frac{d^2\mathbb{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\Pi, H\right] = e\left[\mathbb{E} + \frac{1}{2c}\left(\frac{d\mathbb{x}}{dt}\times\mathbb{B} - \mathbb{B}\times\frac{d\mathbb{x}}{dt}\right)\right]$$

$$= e\left[\mathbb{E} + \frac{1}{c}\mathbb{v}\times\mathbb{B}\right] = \text{força de Lorenz}$$

pois

$$\left[\Pi_i, H\right] = \frac{1}{2m}\sum_j\left[\Pi_i, \Pi_j^2\right] + e\left[\Pi_i, \phi\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_j\Big\{\Pi_j\underbrace{\left[\Pi_i,\Pi_j\right]}_{\frac{i\hbar e}{c}\varepsilon_{ijk}B_k} + \underbrace{\left[\Pi_i,\Pi_j\right]}_{\frac{i\hbar e}{c}\varepsilon_{ijk}B_k}\Pi_j\Big\} - ei\hbar\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

$$= \frac{i\hbar e}{2mc}\Big[\underbrace{\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\Pi_j B_k}_{(\Pi\times\mathbb{B})_i} + \underbrace{\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}B_k\Pi_j}_{-\sum\varepsilon_{ikj}B_k\Pi_j \,=\, -(\mathbb{B}\times\Pi)_i}\Big] - ei\hbar\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

$$= \frac{i\hbar e}{2mc}\left[\Pi\times\mathbb{B} - \mathbb{B}\times\Pi\right]_i - \left[ei\hbar\nabla\phi\right]_i .$$

Antes de fazer a transformação de Gauge $\mathbb{A}\to\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} + \nabla\Lambda$ vamos rederivar a equação de continuidade na presença de ϕ, $\mathbb{A}$. Inicialmente vemos que

$$\langle x'|\left(\mathbb{p} - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2|\alpha, t\rangle = \left[-i\hbar\nabla' - \frac{e}{c}\mathbb{A}(x')\right]\left[-i\hbar\nabla' - \frac{e}{c}\mathbb{A}(x')\right]\psi(x', t)$$

$$= \left[-i\hbar\nabla' - \frac{e}{c}\mathbb{A}(x')\right]\left[-i\hbar\nabla'\psi - \frac{e}{c}\mathbb{A}(x')\psi(x')\right]$$

$$= -\hbar^2\nabla'^2\psi + \frac{2ei\hbar}{c}\mathbb{A}(x')\nabla'\psi + \frac{ei\hbar}{c}(\nabla\cdot\mathbb{A}')\psi + \frac{e^2}{c^2}\mathbb{A}^2\psi$$

Assim temos

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \dfrac{ei\hbar}{mc}\mathbb{A}\nabla'\psi + \dfrac{i\hbar e}{2mc}(\nabla\cdot\mathbb{A})\psi + \dfrac{e^2}{2mc^2}\mathbb{A}^2\psi + e\phi\psi = i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} & \times\psi^* \\[2ex] -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* - \dfrac{ei\hbar}{mc}\mathbb{A}\nabla'\psi^* - \dfrac{i\hbar e}{2mc}(\nabla\cdot\mathbb{A})\psi^* + \dfrac{e^2\mathbb{A}^2\psi^*}{2mc^2} + e\phi\psi^* = -i\hbar\dfrac{\partial\psi^*}{\partial t} & \times\psi \end{cases}$$

SUBTRAINDO :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right] + \frac{ei\hbar}{mc}\left[\mathbb{A}\psi^*\nabla\psi + \mathbb{A}\psi\nabla\psi^*\right] + \frac{i\hbar e}{2mc}\left[2|\psi|^2\nabla\cdot\mathbb{A}\right] = i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

ond $\rho = |\psi|^2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right] + \frac{ei\hbar}{mc}\nabla\cdot\left[|\psi|^2\mathbb{A}\right] = i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left[-\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) - \frac{e}{mc}\mathbb{A}|\psi|^2\right] = 0$$

e

$$\boxed{\mathbb{j} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(\psi^*\nabla\psi\right) - \frac{e}{mc}\mathbb{A}|\psi|^2}$$

que é o esperado se fizermos $\nabla \to \nabla - \frac{ie}{\hbar c}A$. Escrevendo ainda

$$\psi = \sqrt{\rho}\, e^{iS/\hbar}$$

$$\mathbb{j} = \frac{\rho}{m}\left(\nabla S - \frac{e\mathbb{A}}{c}\right) \Rightarrow \langle \mathbb{j}\rangle = \frac{1}{m}\langle \mathbb{P} - \frac{e\mathbb{A}}{c}\rangle = \langle \pi\rangle/m$$

Finalmente vamos considerar a transf. de Gauge

$$\phi \to \tilde{\phi} = \phi \quad ; \quad \mathbb{A} \to \tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} + \nabla\Lambda$$

Exemplo: $\mathbb{B} = B_0\hat{z}$

$$\mathbb{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$$

$$\tilde{\mathbb{A}} = B(-y, 0, 0) = \mathbb{A} + \nabla\left(\frac{Bxy}{2}\right)$$

OBS. P_x é constante p/ $\tilde{H}$ mas não para $H \Rightarrow$ $\mathbb{P}$ é dependente de Gauge.

Como esperamos que os valores médios mantenham sua similaridade com as equações clássicas, vamos impor que

$$\langle\alpha|\mathbb{x}|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\mathbb{x}|\tilde{\alpha}\rangle \qquad (1)$$

ond $|\tilde{\alpha}\rangle$ é a solução da Eq. de Schrödinger com $\tilde{\mathbb{A}}$

Além disso impomos que

$$\langle\alpha|\mathbb{P}-\frac{e}{c}\mathbb{A}|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\mathbb{P}-\frac{e}{c}\tilde{\mathbb{A}}|\tilde{\alpha}\rangle \qquad (2)$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle \qquad (3)$$

A relação entre $|\tilde{\alpha}\rangle$ e $|\alpha\rangle$ é

$$\boxed{|\tilde{\alpha}\rangle = \exp\left\{\frac{ie\Lambda(x)}{\hbar c}\right\}|\alpha\rangle} .$$

As propriedades (1) e (3) são imediatas. Para provar (2) fazemos

$$\langle\tilde{\alpha}|\mathbb{P}-\frac{e\tilde{\mathbb{A}}}{c}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}\left(\mathbb{P}-\frac{e\mathbb{A}}{c}-\frac{e}{c}\nabla\Lambda\right)e^{\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\mathbb{P}-\frac{e}{c}\mathbb{A}|\alpha\rangle$$

pois

$$e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}\,\mathbb{P}\,e^{\frac{ie\Lambda}{\hbar c}} = e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}\left[\mathbb{P}, e^{\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}\right] + \mathbb{P} = \frac{e}{c}\nabla\Lambda + \mathbb{P}$$

$$e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}f(x)\,e^{\frac{ie\Lambda}{\hbar c}} = f(x)$$

Esse resultado pode tb ser obtido diretamente da Eq. de Schrödinger:

dado

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\mathbb{P}-\frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2+e\phi\right]|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial|\alpha\rangle}{\partial t} \qquad \text{e}$$

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\mathbb{P}-\frac{e\mathbb{A}}{c}-\frac{e\nabla\Lambda}{c}\right)^2+e\phi\right]|\tilde{\alpha}\rangle = i\hbar\frac{\partial|\tilde{\alpha}\rangle}{\partial t}$$

vemos que usando $|\tilde{\alpha}\rangle = e^{\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}|\alpha\rangle$ caímos em

$$\left[\frac{1}{2m}e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}\left(\mathbb{P}-\frac{e\mathbb{A}}{c}-\frac{e\nabla\Lambda}{c}\right)^2e^{\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}+e\phi\right]|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial|\alpha\rangle}{\partial t}$$

mas

$$e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}\left(\mathbb{P}-\frac{e\mathbb{A}}{c}-\frac{e\nabla\Lambda}{c}\right)^2e^{ie\Lambda/\hbar c} = e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}\left(\mathbb{P}-\frac{e\mathbb{A}}{c}-\frac{e\nabla\Lambda}{c}\right)e^{\frac{ie\Lambda}{\hbar c}}\times$$

$$e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar}}\left(\mathbb{P}-\frac{e\mathbb{A}}{c}-\frac{e\nabla\Lambda}{c}\right)e^{ie\Lambda/\hbar c}$$

$$= \left(\mathbb{P}-\frac{e\mathbb{A}}{c}\right)^2$$

que recai na eq. de Schrödinger original.

RESUMO

Se $\mathbb{A} \to \tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} + \nabla\Lambda$

$$|\alpha\rangle \to |\tilde{\alpha}\rangle = e^{\frac{ie\Lambda(x)}{\hbar c}} |\alpha\rangle$$

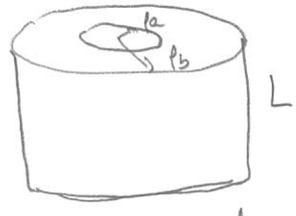
$$\psi(x',t) \to \tilde{\psi}(x',t) = e^{\frac{ie\Lambda(x')}{\hbar c}} \psi(x',t)$$

$\mathbb{X}$ e Π são Gauge independent

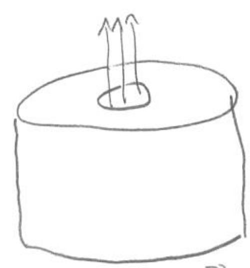
$\mathbb{P}$ é GAUGE dependent.

O EFEITO BOHM-AHARONOV - Esse efeito ilustra o fato de que a existência de um potencial vetor tem consequências na mecânica quântica mesmo quando o campo resultante $\vec{B}$ é nulo.

O primeiro exemplo desse efeito aparece quando consideramos uma partícula confinada a uma casca cilíndrica ou de raios ρ_a e ρ_b e altura L:



(A) Sem Campo Mag.



(B) Com $\vec{B} = B_0\hat{z}$ dentro do furo.

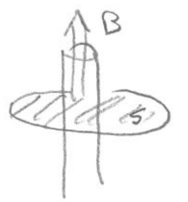
Na situação (B) aplicamos um campo magnético constante na região $\rho < \rho_a$ apenas, de forma que tanto em (A) quanto em (B) o campo é nulo na região onde a partícula se encontra. Não há força sobre a partícula nos dois casos.

Em (A) o potencial vetor é nulo. Em (B) temos

$$\mathbb{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0) = \frac{B\rho}{2}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \frac{B\rho}{2}\hat{\varphi} \quad \text{se } \rho < \rho$$

(veja pag. 85)

Para $\rho > \rho_a$ usamos a lei de Stokes:



$$\underbrace{\int (\vec{B}\cdot \hat{n})\, dS}_{\Phi \,=\, \text{fluxo de } \vec{B} \,=\, B\pi\rho_a^2} = \int (\nabla \times \vec{A})\cdot \hat{n}\, dS = \oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = 2\pi\rho A$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{B\rho_a^2}{2\rho}\hat{\varphi}} \quad \text{se} \quad \rho > \rho_a$$

Veja que $A \neq 0$ p/ $\rho > \rho_a$.

Os níveis de energia em (A) são dados pelas soluções de $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$ onde ψ se anula nas paredes do cilindro:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] = E\psi$$

onde $\psi(r,\varphi,z)$ deve ter a forma

$$\psi(r,\varphi,z) = R(\rho)\, e^{im\varphi} \sin\mu z \qquad \begin{matrix}(m \text{ inteiro})\\ (\mu = n\pi/L)\end{matrix}$$

substituindo achamos a equação para $R(\rho)$:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho} + \left(K^2 - \mu^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0 \qquad K^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Chamando $k = \sqrt{K^2 - \mu^2}$ e $x = k\rho$ obtemos

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0 \quad \Rightarrow \text{ equação de Bessel}$$

$$\psi(r,\varphi,z) = A\sin\mu z\, e^{im\varphi}\left[J_m(k\rho) + B\, N_m(k\rho)\right]$$

Impondo $\psi(\rho_a,\varphi,z) = \psi(\rho_b,\varphi,z) = 0$ vem

$$J_m(k\rho_a) + B N_m(k\rho_a) = 0$$
$$J_m(k\rho_b) + B N_m(k\rho_b) = 0$$
$$\Downarrow$$

- $N_m(k\rho_a) J_m(k\rho_b) - J_m(k\rho_a) N_m(k\rho_b) = 0 \Rightarrow k = k_{m,p}$

onde p conta as soluções p/ m fixo

- $B_{m,p} = -J_m(k_{m,p}\rho_a) / N_m(k_{m,p}\rho_a)$

$$E_{n,m,p} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \mu^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{2mL^2} + \frac{\hbar^2 k_{m,p}^2}{2m}$$

O que muda quando colocamos o campo magnético central?

$$-i\hbar\nabla \longrightarrow -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbb{A} \quad ; \quad \nabla \to \nabla - \frac{ie}{\hbar c}\mathbb{A}$$

$$\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} \longrightarrow \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{\varphi}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)\frac{B\rho_a^2}{2\rho}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi} - \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)\frac{B\rho_a^2}{2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \to \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{ie}{\hbar c}\frac{B\rho_a^2}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{ie}{\hbar c}\frac{B\rho_a^2}{2}\right)\psi$$

$$= \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - 2\left(\frac{ie}{\hbar c}\right)\frac{B\rho_a^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{B\rho_a^2}{2}\right)^2\psi \quad ; \quad \psi \sim e^{im\varphi}$$

$$= -m^2 + \frac{2em}{\hbar c}\frac{B\rho_a^2}{2} - \left(\frac{e}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{B\rho_a^2}{2}\right)^2 = -\left(m - \frac{e}{\hbar c}\frac{B\rho_a^2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad m \longrightarrow m - \underbrace{\left(\frac{e}{\hbar c}\right)\left(\frac{B\rho_a^2}{2}\right)}_{\frac{e}{2\pi\hbar c}\Phi_B \,\equiv\, -\Phi_B/\Phi_0} \equiv \nu \quad \text{não inteiro} \qquad \Phi_0 \equiv \frac{2\pi\hbar c}{|e|}$$

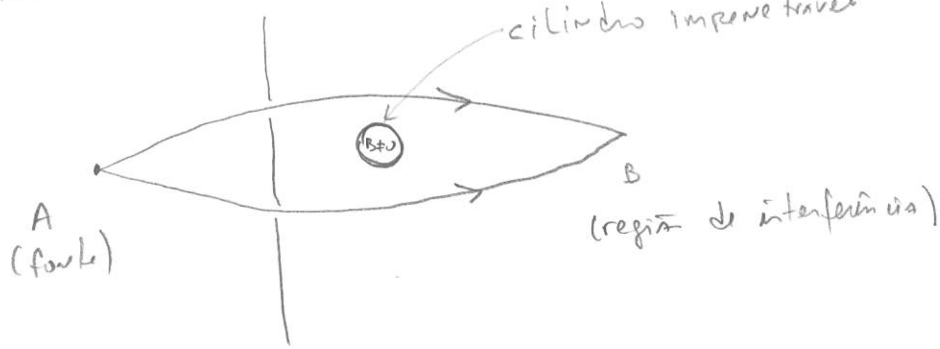
A condição para os autovalores agora fica

$$N_\nu(k\rho_a)\, J_\nu(k\rho_b) - J_\nu(k\rho_a)\, N_\nu(k\rho_b) = 0$$

e os zeros mudam de lugar. Note que se $\Phi_B = l\,\Phi_0$ não há mudança.

Portanto, apesar da partícula não sentir forças magnéticas, os níveis de energia dependem do fluxo do campo magnético.

O segundo exemplo é similar, mas considera um problema de espalhamento:



Sabemos que $\mathbb{A} \neq 0$ na região externa ao cilindro. Usaremos aqui o formalismo de integrais de trajetória. A Lagrangeana na presença de $\mathbb{A}$ é

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 \longrightarrow \mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \frac{e}{c}\frac{d\mathbf{x}}{dt}\cdot\mathbb{A}$$

A ação ao longo de uma propagação infinitesimal entre t_{n-1} e t_n fica

$$S(n,n-1) \longrightarrow S(n,n-1) + \frac{e}{c}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{d\mathbf{x}}{dt}\cdot\mathbb{A}\, dt = S(n,n-1) + \frac{e}{c}\int_{\mathbf{x}_{n-1}}^{\mathbf{x}_n} \mathbb{A}\cdot d\vec{l}$$

A ação ao longo de um caminho entre A e B é

$$S \longrightarrow S + \frac{e}{c}\int_A^B \mathbb{A}\cdot d\vec{l}\,.$$

Cada caminho possui uma "ação livre" + ação devida ao campo. A integral de linha independe do caminho, desde que ele não envolva nenhum fluxo*. Assim podemos escrever

$$\langle B|U(t,t_0)|A\rangle = \int_{\text{ACIMA}} \mathcal{D}[x(t)]\, e^{\frac{iS^{(0)}}{\hbar}}\, e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{A,\text{ACIMA}}^{B} \vec{A}\cdot d\vec{l}} + \int_{\text{ABAIXO}} \mathcal{D}[x(t)]\, e^{\frac{iS^{(0)}}{\hbar}}\, e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{A,\text{ABAIXO}}^{B} \vec{A}\cdot d\vec{l}}$$

A diferença de fase devida ao campo (existe ainda a diferença de fase devida à diferença de ação livre) é

$$\Delta\varphi = \frac{e}{\hbar c}\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \frac{e}{\hbar c}\Phi_B$$

A quantidade

$$\frac{2\pi\hbar c}{|e|} = 4.135\times 10^{-7}\ \text{Gauss-cm}^2$$

é a unidade fundamental de fluxo magnético. Experimentos já foram realizados e mediram o desvio de fase previsto.

MONOPOLOS MAGNÉTICOS – Suponha que exista uma carga magnética e_m de tal forma que

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 4\pi\rho_m$$

Para uma carga pontual na origem teríamos

$$\mathbf{B} = \left(\frac{e_m}{r^2}\right)\hat{r} .$$

É claro que não podemos mais escrever $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ em todo espaço, pois isso levaria à $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$. No entanto, olhando a forma de $\nabla\times\mathbf{A}$ em esféricas

* Veja que $\nabla\times\mathbf{A} = 0$ na região externa e $\int \mathbf{A}\cdot d\vec{l}$ é como o trabalho de uma força conservativa.

$$\nabla\times A = \hat{r}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] + \hat{\theta}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]$$

$$+\hat{\varphi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

vemos que

$$A = \frac{e_m(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \qquad \text{dá} \qquad \nabla\times A = \frac{e_m}{r^2}\hat{r}$$

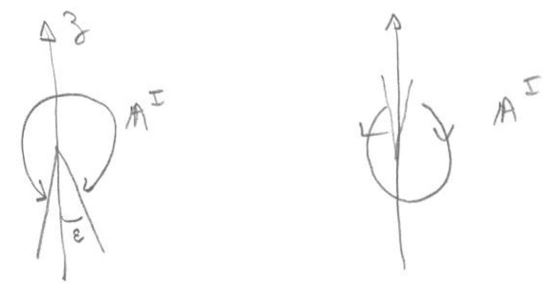
<u>OBS</u>: • o fator "1" em "$1-\cos\theta$" é colocado por conveniência, mas não é necessário.

• A é singular p/ $\theta=\pi$ (eixo z negativo)

Podemos então nos valer de um truque: definimos 2 A's:

$$A^{I} = \frac{e_m(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \qquad \text{para} \quad \theta < \pi-\varepsilon$$

$$A^{II} = -\frac{e_m(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \qquad \text{para} \quad \theta > \varepsilon$$



Na região fora da vizinhança dos eixos z-positivo e z-negativo temos

$$\nabla\times A^{I} = \nabla\times A^{II} = B$$

e portanto A^{I} e A^{II} diferem por uma transformação de GAUGE!

Usando

$$A^{II} - A^{I} = -\frac{2e_m}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \qquad \text{e}$$

$$\nabla\Lambda = \hat{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi}$$

vemos que $\Lambda = -2e_M \varphi$ p/ $\mathbb{A}^{II} = \mathbb{A}^{I} + \nabla\Lambda$.

Como vimos, as funções de onda em cada gauge estão ligadas por

$$\psi^{II} = \psi^{I} e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda} = \psi^{I} e^{-\frac{2iee_M \varphi}{\hbar c}}$$

Impondo unicidade $\psi^{I}(0) = \psi^{I}(2\pi)$; $\psi^{II}(0) = \psi^{II}(2\pi)$ vemos que

$$\frac{2ee_M}{\hbar c} = \pm N \quad , \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

$\Rightarrow$ A carga magnética, se existir, deve ser quantizada. O quantum é

$$\frac{\hbar c}{2|e|} \simeq \left(\frac{137}{2}\right)|e|$$

APÊNDICE - E — Teorias de Gauge

Existe uma outra maneira de tratar as transformações de Gauge na mecânica quântica. Sabemos que as funções de onda $\Psi(x,t)$ são definidas a menos de uma fase global. Assim, a função

$$\tilde{\Psi}(x,t) = e^{i\theta}\,\Psi(x,t) \quad ; \quad \theta = \text{const.}$$

descreve o mesmo sistema físico que $\Psi(x,t)$. Se $\Psi(x,t)$ satisfaz a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

é fácil ver que $\tilde{\Psi}$ satisfaz exatamente a mesma equação.

No entanto, podemos fazer uma suposição mais arrojada definindo

$$\tilde{\Psi}(x,t) = e^{i\rho(x,t)}\,\Psi(x,t) .$$

A diferença entre $\tilde{\Psi}$ e Ψ ainda é uma fase, mas agora essa fase depende do ponto x e do tempo t. Sob que condições a física descrita por $\tilde{\Psi}$ é a mesma descrita por Ψ?

Para descobrir a resposta precisamos encontrar a equação que $\tilde{\Psi}$ satisfaz:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = i\hbar e^{-i\rho}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial t} + \hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}e^{-i\rho}\tilde{\Psi} = e^{-i\rho}\left(i\hbar\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial t} + \hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}\tilde{\Psi}\right)$$

$$\mathbb{D}^2\Psi = e^{-i\rho}\left\{(\mathbb{D} - i\mathbb{D}\rho)^2\tilde{\Psi}\right\} \qquad \text{(prove!)}$$

Então, se Ψ satisfaz a equação de Schrödinger $\tilde{\Psi}$ deve satisfazer

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[(\nabla - i\nabla\rho)^2\right]\tilde{\Psi} + \left[V - \hbar\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]\tilde{\Psi}$$

que não é a Eq. de Schrödinger. No entanto, suponha que a equação inicial p/ Ψ seja

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[(\nabla + i\mathbb{A})^2\Psi\right] + V\Psi$$

Nesse caso a equação p/ $\tilde{\Psi}$ será

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[(\nabla + i(\mathbb{A} - \nabla\rho))^2\right]\tilde{\Psi} + \left[V - \hbar\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]\tilde{\Psi}$$

que é a equação original para

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} - \nabla\rho$$
$$\tilde{V} = V - \hbar\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad :$$

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[(\nabla + i\tilde{\mathbb{A}})^2\right]\tilde{\Psi} + \tilde{V}\tilde{\Psi}$$

que são exatamente as transformações sobre os potenciais $\mathbb{A}$ e ϕ que não afetam os campos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$. Dessa forma, a imposição de que a física descrita por funções que diferem de uma fase seja a mesma implica na existência do eletromagnetismo.

Quando a função de onda é um spinor podemos impor invariância por transformações mais completas e isso gera campos mais completos ligados às forças fraca e forte.