# Invariância Relativística da Equação de Dirac

FI002 – Mecânica Quântica II
Marcus A.M. de Aguiar

A equação de Dirac para elétrons livres é dada por

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}(\vec{r},t)}{\partial t}=\left(c\frac{\hbar}{i}\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta mc^{2}\right)\hat{\Psi}(\vec{r},t)$$

Multiplicando tudo por β/ihc  e definindo as matrizes γ por

$$\gamma^{0}=\beta\quad\gamma^{1}=\beta\alpha_{x}\quad\gamma^{2}=\beta\alpha_{y}\quad\gamma^{3}=\beta\alpha_{z}$$

obtemos

$$\frac{\gamma^{0}}{c}\frac{\partial\hat{\Psi}(\vec{r},t)}{\partial t}+\vec{\gamma}\cdot\nabla\hat{\Psi}(\vec{r},t)+ik\hat{\Psi}(\vec{r},t)=0$$

onde $k = \dfrac{mc}{\hbar}$ . Introduzindo ainda

$$x^{\mu} = (ct, \vec{r}) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial\, x^{\mu}} = \partial_{\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\, t}, \nabla)$$

temos

$$\boxed{\gamma^{\mu}\frac{\partial \hat{\Psi}(\vec{r},t)}{\partial\, x^{\mu}} + ik\hat{\Psi}(\vec{r},t) = 0}$$

onde fica implícita a soma sobre índices repetidos.

Se em um referencial inercial **R** vale a equação

$$\gamma^{\mu} \frac{\partial \hat{\Psi}(\vec{r},t)}{\partial\, x^{\mu}} + ik\hat{\Psi}(\vec{r},t) = 0$$

então em outro referencial inercial **R'** deve valer

$$\gamma^{\mu} \frac{\partial \hat{\Psi}'(\vec{r}\,',t')}{\partial\, x'^{\mu}} + ik\hat{\Psi}'(\vec{r}\,',t') = 0$$

onde $x^{\mu}$ e $x'^{\mu}$ estão conectados por uma transformação de Lorentz e

$$\hat{\Psi}'(\vec{r}\,',t') = U^{+}\,\hat{\Psi}(\vec{r}\,',t')\,U = S\,\hat{\Psi}(\vec{r},t)$$

Essa transformação é análoga ao caso de uma rotação do vetor **S** do spin: U faz o papel do operador de rotação $U=\exp(-iJ_n\phi/h)$. O resultado final é que cada componente do spin no sistema rodado é uma combinação linear das componentes originais de acordo com uma matriz de rotação S.

Aqui temos uma complicação adicional que o campo depende do ponto do espaço-tempo, que também 'roda' na transformação.

Além disso, para que a equação de Dirac seja invariante por transformações de Lorentz, as matriz S deve ser uma representação do grupo de Lorentz:

- para cada transformação de Lorentz **g** existe uma matriz S[**g**]

- dadas duas transformações $g_1$ e $g_2$ e a transformação composta $\mathbf{g} = \mathbf{g_1 g_2}$ devemos ter $S[\mathbf{g}] = S[\mathbf{g_1}]\, S[\mathbf{g_2}]$

Uma transformação de Lorentz genérica pode ser escrita como

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu} \qquad \text{com} \qquad a^{\mu}_{\lambda} a_{\mu}^{\ \nu} = \delta_{\lambda}^{\ \nu}$$

Isso garante que o intervalo entre dois eventos,

$$dx^{\mu} dx_{\mu} = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

seja preservado, i.e.,

$$dx^{\mu} dx_{\mu} = dx'^{\mu} dx'_{\mu}$$

Além disso $$g_{\mu\nu} a^{\mu}_{\lambda} = a_{\nu\lambda}$$

onde

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos ainda que

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = a^{\nu}_{\ \mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \qquad e \qquad \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = a_{\mu}^{\ \nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

Vamos então escrever a equação de Dirac no referencial **R'**:

$$\gamma^{\mu} \frac{\partial \hat{\Psi}(\vec{r},t)}{\partial x^{\mu}} + ik\hat{\Psi}(\vec{r},t) = 0$$

$$\gamma^{\mu} a^{\nu}{}_{\mu} \frac{\partial [S^{-1}\hat{\Psi}'(x')]}{\partial x'^{\nu}} + ikS^{-1}\hat{\Psi}'(x') = 0$$

$$S\gamma^{\mu} a^{\nu}{}_{\mu} S^{-1} \frac{\partial \hat{\Psi}'(x')}{\partial x'^{\nu}} + ik\hat{\Psi}'(x') = 0$$

e a condição para invariância é $S\gamma^{\mu} a^{\nu}{}_{\mu} S^{-1} = \gamma^{\nu}$ ou $\boxed{\gamma^{\mu} a^{\nu}{}_{\mu} = S^{-1}\gamma^{\nu} S}$

## Cálculo de S para transformações infinitesimais

Dada uma transformação de Lorentz da forma $a^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$

escrevemos sua matriz S na forma $S = 1 + dS$

Temos então que:

(1) $$a^{\mu}{}_{\lambda} a_{\mu}{}^{\nu} = \left(\delta^{\mu}{}_{\lambda} + \varepsilon^{\mu}{}_{\lambda}\right)\left(\delta_{\mu}{}^{\nu} + \varepsilon_{\mu}{}^{\nu}\right)$$
$$= \delta_{\lambda}{}^{\nu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\lambda}\delta_{\mu}{}^{\nu} + \delta^{\mu}{}_{\lambda}\varepsilon_{\mu}{}^{\nu} + O(2) \equiv \delta_{\lambda}{}^{\nu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon^{\nu}{}_{\lambda} = -\varepsilon_{\lambda}{}^{\nu}}$$

(2) $$\gamma^{\mu} a^{\nu}{}_{\mu} = S^{-1} \gamma^{\nu} S$$

$$\left(\delta^{\nu}_{\mu} + \varepsilon^{\nu}{}_{\mu}\right)\gamma^{\mu} = (1 - dS)\gamma^{\nu}(1 + dS)$$

$$\varepsilon^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = \gamma^{\nu} dS - dS\,\gamma^{\nu}$$

A solução desta equação é $$dS = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$$

e portanto

$$\boxed{S = 1 + \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}}$$

**Prova:** vamos verificar que essa solução satisfaz a equação

$$\frac{1}{4}\gamma^{\lambda}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\left(-\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda} + 2g^{\mu\lambda}\right)\gamma^{\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\left(-\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu} + 2g^{\lambda\nu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}g^{\mu\lambda}\gamma^{\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}g^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}$$

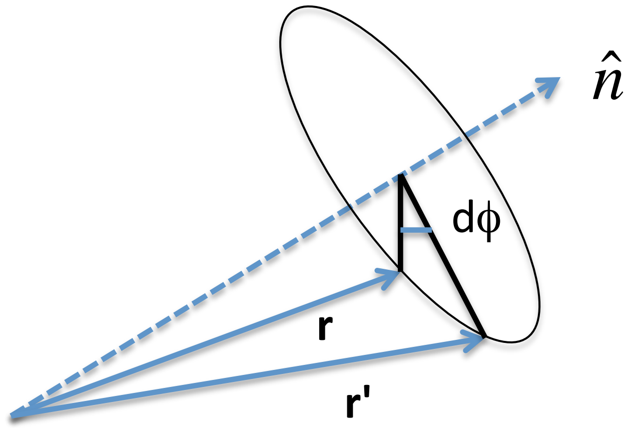
$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda}{}_{\nu}\gamma^{\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu}{}^{\lambda}\gamma^{\mu} = \varepsilon^{\lambda}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

# Exemplo 1: Rotações

Considere a transformação

$$t' = t$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + d\varphi\, \hat{n} \times \boldsymbol{r}$$




Abrindo o produto vetorial obtemos

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left[ \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_z d\varphi & n_y d\varphi \\ 0 & n_z d\varphi & 0 & -n_x d\varphi \\ 0 & -n_y d\varphi & n_{zx} d\varphi & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A componente temporal não tem nenhum papel e podemos escrever

$$\varepsilon^{\mu}{}_{\nu} = d\varphi \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \mu,\nu = 1,2,3$$

Como a métrica $g_{\mu\nu}$ tem o valor -1 na parte espacial vemos que $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$

Vamos agora definir um operador que se revelará muito importante:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] = i\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - g^{\mu\nu}\right)$$

Para cada $\mu$ e $\nu$ temos uma matriz $\Sigma^{\mu\nu}$. No entanto, como $\Sigma^{\mu\nu}$ é definida através de um comutador, $\Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\mu\nu}$ . O conjunto é antissimétrico e apenas 6 matrizes são independentes. No exemplo que estamos considerando, apenas os índices espaciais serão importantes e correspondem a 3 dessas matrizes, que vamos renomear:

$$\Sigma_x \equiv \Sigma^{23} \qquad \Sigma_y \equiv \Sigma^{31} \qquad \Sigma_z \equiv \Sigma^{12}$$

Então

$$dS = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\left(-i\Sigma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\right) = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}$$

pois $g^{\mu\nu}$ é diferente de 0 apenas na diagonal, mas $\Sigma^{\mu\nu}$ é zero na diagonal.

Escrevendo as matrizes explicitamente

$$\varepsilon_{\mu\nu} = d\varphi \begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_z & -\Sigma_y \\ -\Sigma_z & 0 & \Sigma_x \\ \Sigma_y & -\Sigma_x & 0 \end{pmatrix}$$

e fazendo o produto termo a termo e somando (não é um produto de matrizes!)

$$dS = -\frac{i}{4}\left[2n_x\Sigma_x + 2n_y\Sigma_y + 2n_z\Sigma_z\right]d\varphi = -\frac{i}{2}\hat{n}\cdot\vec{\Sigma}\, d\varphi$$

Calculando as matrizes $\Sigma$ explicitamente obtemos

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Finalmente podemos calcular a transformação dos campos:

$$\hat{\Psi}'(\vec{r}\,',t') = U^{+}\,\hat{\Psi}(\vec{r}\,',t')\,U = S\,\hat{\Psi}(\vec{r},t)$$

$$U^{+}\,\hat{\Psi}(\vec{r} + d\varphi\,\hat{n}\times\vec{r},\, t)\,U = \left(1 - \frac{i}{2}\hat{n}\cdot\vec{\Sigma}\,d\varphi\right)\hat{\Psi}(\vec{r},t)$$

$$U^{+}\,\hat{\Psi}(\vec{r},\, t)\,U + U^{+}\left[d\varphi\,\nabla\hat{\Psi}(\vec{r},\, t)\cdot\hat{n}\times\vec{r}\right]U = \hat{\Psi}(\vec{r},t) - \frac{i}{2}d\varphi\,\hat{n}\cdot\vec{\Sigma}\;\hat{\Psi}(\vec{r},t)$$

segundo termo à esquerda já é de primeira ordem e a ação de $U^{+}$ U pode ser pode ser desprezada, pois produziria correções de ordem superior:

$$U^{+}\left[d\varphi\,\nabla\hat{\Psi}(\vec{r},\, t)\cdot\hat{n}\times\vec{r}\right]U \approx d\varphi\,\nabla\hat{\Psi}(\vec{r},\, t)\cdot\hat{n}\times\vec{r}$$

Re-arranjando os termos obtemos

$$U^{+}\,\hat{\Psi}(\vec{r},\,t)\,U = \hat{\Psi}(\vec{r},t) - d\varphi\,\nabla\hat{\Psi}(\vec{r},\,t)\cdot\hat{n}\times\vec{r} - \frac{i}{2}d\varphi\,\hat{n}\cdot\vec{\Sigma}\;\hat{\Psi}(\vec{r},t)$$

$$= \left[1 - \frac{i}{2}d\varphi\,\hat{n}\cdot\vec{\Sigma} - d\varphi\,\hat{n}\cdot\left(\vec{r}\times\nabla\right)\right]\hat{\Psi}(\vec{r},\,t)$$

$$= \left[1 - \frac{i}{\hbar}d\varphi\,\hat{n}\cdot\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} + \vec{L}\right)\right]\hat{\Psi}(\vec{r},\,t)$$

Compondo várias transformações infinitesimais na direção **n** e definindo o momento angular total

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} + \vec{L}$$

obtemos

$$\hat{\Psi}'(\vec{r},t) = e^{-i\frac{\varphi \vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}}\hat{\Psi}(\vec{r},t)$$

O operador J do campo fica

$$\vec{J} = \int \Psi^{+}(\vec{r},t)\left(\vec{r}\times\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)\Psi(\vec{r},t)\, d^3r$$

## Exemplo 2: Movimento uniforme

Considere agora que o referencial **R'** se desloque na direção x com velocidade v em relação à **R.** Vamos escrever

$$v = c\tanh\chi$$

Com isso vemos que

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \cosh\chi \qquad e \qquad \frac{v}{c}\Gamma = \sinh\chi$$

de forma que

$$a^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nesse caso pode-se resolver diretamente a equação para S

$$\gamma^{\mu} a^{\nu}{}_{\mu} = S^{-1} \gamma^{\nu} S$$

e o resultado é

$$S = \exp\left( -\frac{\chi}{2} \alpha_x \right) = \cosh(\chi / 2) - \alpha_x \sinh(\chi / 2)$$

Exercícios:

(1) Verifique que a solução está correta substituindo na equação acima para $\nu$=0,1,2,3.

(2) Verifique que a composição S' S'' resulta em uma transformação S cuja velocidade é dada pela adição relativística de v' e v''.

## Exemplo 3: Reflexão

Nesse caso temos uma *transformação imprópria* dada por

$$a^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

As equações $\gamma^{\mu} a^{\nu}{}_{\mu} = S^{-1} \gamma^{\nu} S$ ficam

$$S^{-1}\gamma^{0}S = \gamma^{0} \qquad\qquad S^{-1}\gamma^{k}S = -\gamma^{k}$$

cuja solução é $S = \gamma^{0} = \beta$ como pode ser verificada.

a reflexão espacial é então dada por

$$U_P \, \hat{\Psi}(\vec{r},t) \, U_P^{+} = \gamma^0 \, \hat{\Psi}(-\vec{r},t)$$