

Caos e Fractais



SEGUNDA ESCOLA AVANÇADA
DE FÍSICA
UNICAMP-IFGW-2006

Marcus A.M. de Aguiar

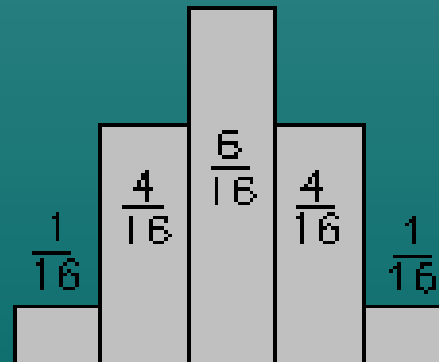
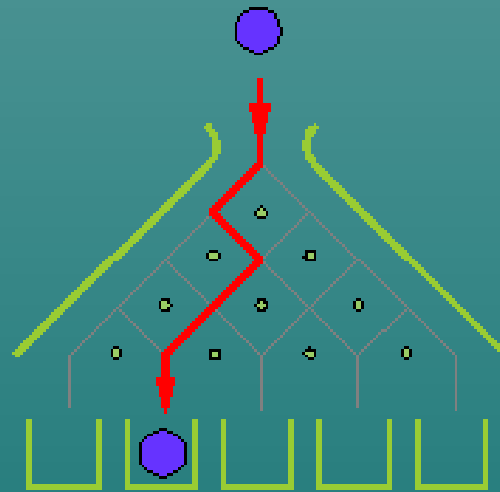
Resumo

- ◆ 1 – O que é Caos?
- ◆ 2 – Um exemplo de sistema caótico:
O mapa logístico
- ◆ 3 – Caos e Fractais

Sistemas Previsíveis e Não-Previsíveis

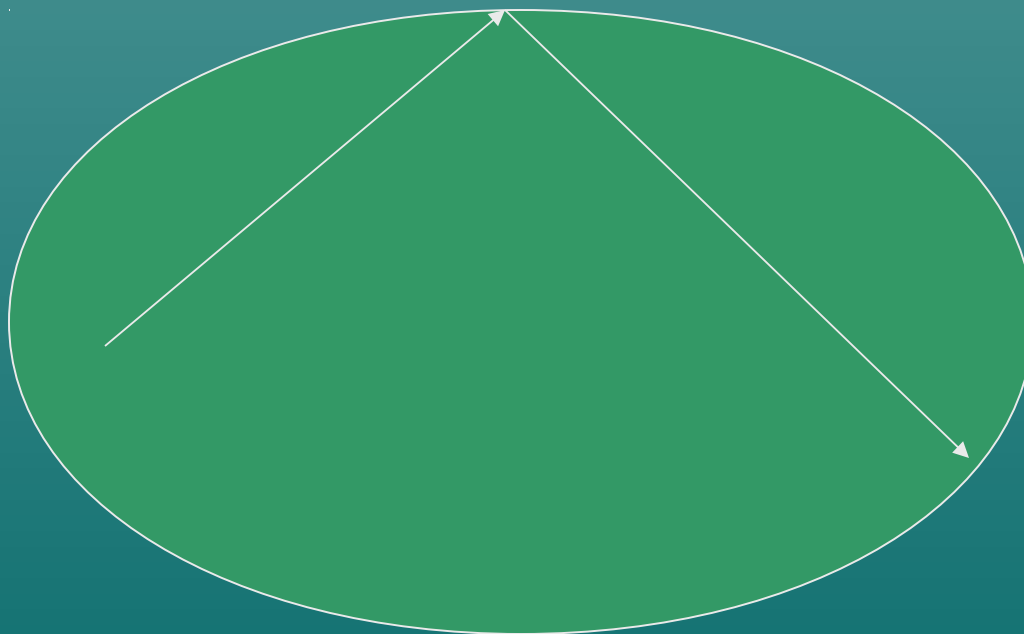
- ◆ Calendário (anos bissextos, eclipses)
- ◆ Pêndulos (relógio)
- ◆ Sistema massa-mola
- ◆ Clima
- ◆ Fluidos turbulentos
- ◆ Mesa de pregos
- ◆ Mesa de bilhar

A Mesa de Pregos: Caos e Determinismo



relative frequency
distribution

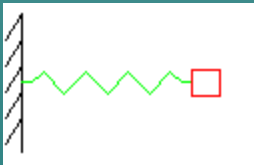
A Mesa de Bilhar



- ◆ **As equações de Newton, que regem a mecânica, são determinísticas:**
dadas as forças agindo sobre um sistema de partículas e as condições iniciais devemos ser capazes de determinar o movimento do sistema.
- ◆ Se jogamos as bolinas (aproximadamente) do mesmo modo, porque elas não caem (aproximadamente) no mesmo lugar?
- ◆ Condições iniciais muito parecidas podem provocar efeitos dinâmicos muito diferentes!
- ◆ Surpresa: sistemas muito simples podem ter comportamentos complexos, onde pequenas diferenças iniciais são amplificadas, levando a um comportamento aleatório.

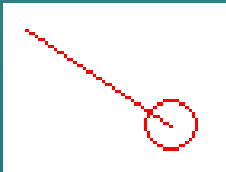
Sistemas Regulares X Sistemas Caóticos

1)



Sistema massa-mola

2)



Pêndulo simples

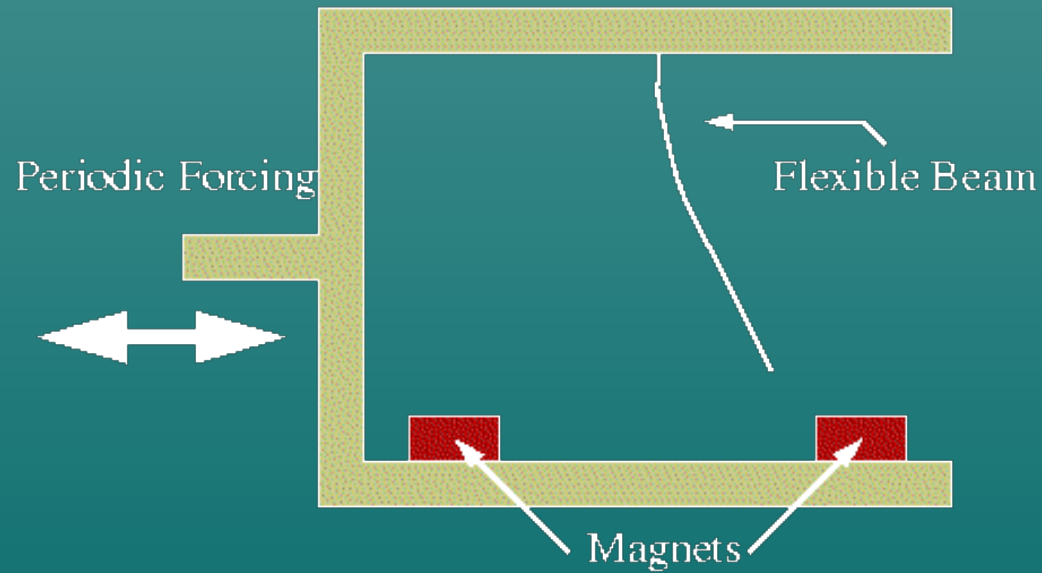
3)

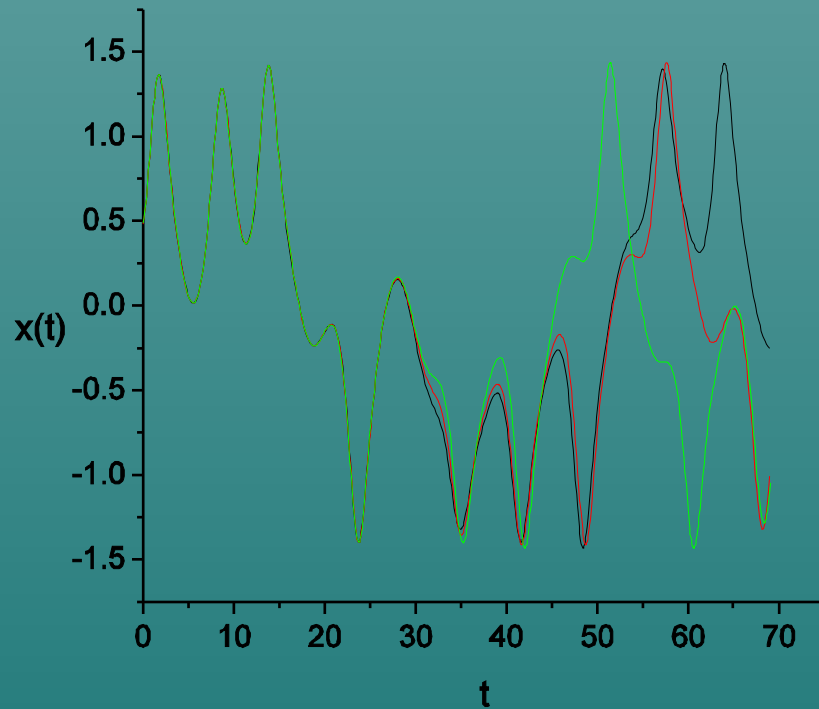
Sistema Terra-Sol

4)

O pendulo duplo com molas

O oscilador de Duffing





Preto:	$x(0)=0.480$	$v(0)=0.355$
Vermelho:	$x(0)=0.481$	$v(0)=0.355$
Verde:	$x(0)=0.482$	$v(0)=0.355$

O movimento é tão complicado que torna-se imprevisível!

CAOS = sensibilidade à condições iniciais
=
imprevisibilidade

RESUMO

- ◆ Caos = sensibilidade às condições iniciais
- ◆ Condições iniciais muito próximas separam-se exponencialmente rápido: (efeito borboleta)
- ◆ Existe um tempo característico τ dentro do qual previsões são possíveis. Além desse tempo o sistema torna-se imprevisível. O fator $1/\tau$ é chamado de **expoente de Lyapunov**.

Perguntas:

- ◆ Porque alguns sistemas determinísticos se comportam de forma simples e outros de forma quase aleatória (caótica)?
- ◆ Qual o mecanismo responsável pelo aparecimento de dinâmica caótica?
- ◆ Quais as implicações do movimento caótico?
- ◆ Quão raros ou freqüentes são sistemas caóticos?

Sistema dinâmicos

Sistemas físicos como o oscilador de Duffing ou o sistema Sol-Terra-Lua são complicados do ponto de vista matemático.

Vamos considerar aqui apenas sistemas dinâmicos simples, que servirão como modelos para o estudo de sistemas realistas.

Exemplo 1:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} \quad x_n \geq 0$$

$$x_0 = 49.0$$

$$x_1 = 7.0$$

$$x_2 = 2.646\dots$$

$$x_3 = 1.627\dots$$

$$x_4 = 1.275\dots$$

$$x_5 = 1.129\dots$$

$$x_6 = 1.063\dots$$

$$x_7 = 1.031\dots$$

$$x_0 = 0.030$$

$$x_1 = 0.173\dots$$

$$x_2 = 0.416\dots$$

$$x_3 = 0.645\dots$$

$$x_4 = 0.803\dots$$

$$x_5 = 0.896\dots$$

$$x_6 = 0.947\dots$$

$$x_7 = 0.973\dots$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 1$$

$$x_5 = 1$$

$$x_6 = 1$$

$$x_7 = 1$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

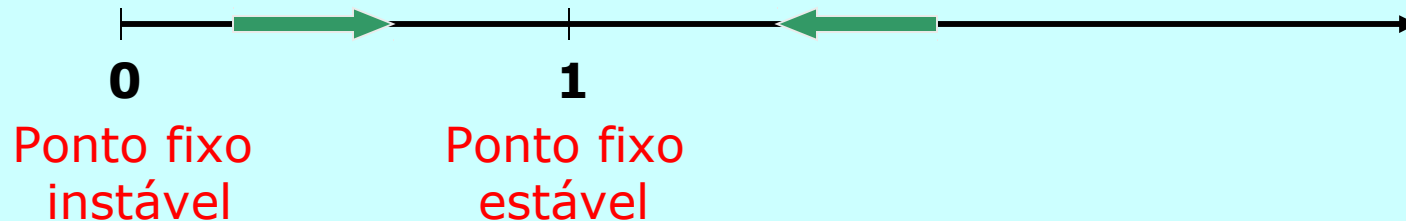
$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 0$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = 0$$



Exemplo 2:

$$x_{n+1} = x_n^2 \quad x_n \geq 0$$

$x_0 = 2.0$

$x_1 = 4.0$

$x_2 = 16$

$x_3 = 256$

$x_4 = 65536$

$x_5 = 4294967296$

$x_0 = 0.8$

$x_1 = 0.64$

$x_2 = 0.4096$

$x_3 = 0.1677...$

$x_4 = 0.0281...$

$x_5 = 0.0008...$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1$

$x_4 = 1$

$x_5 = 1$

$x_0 = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

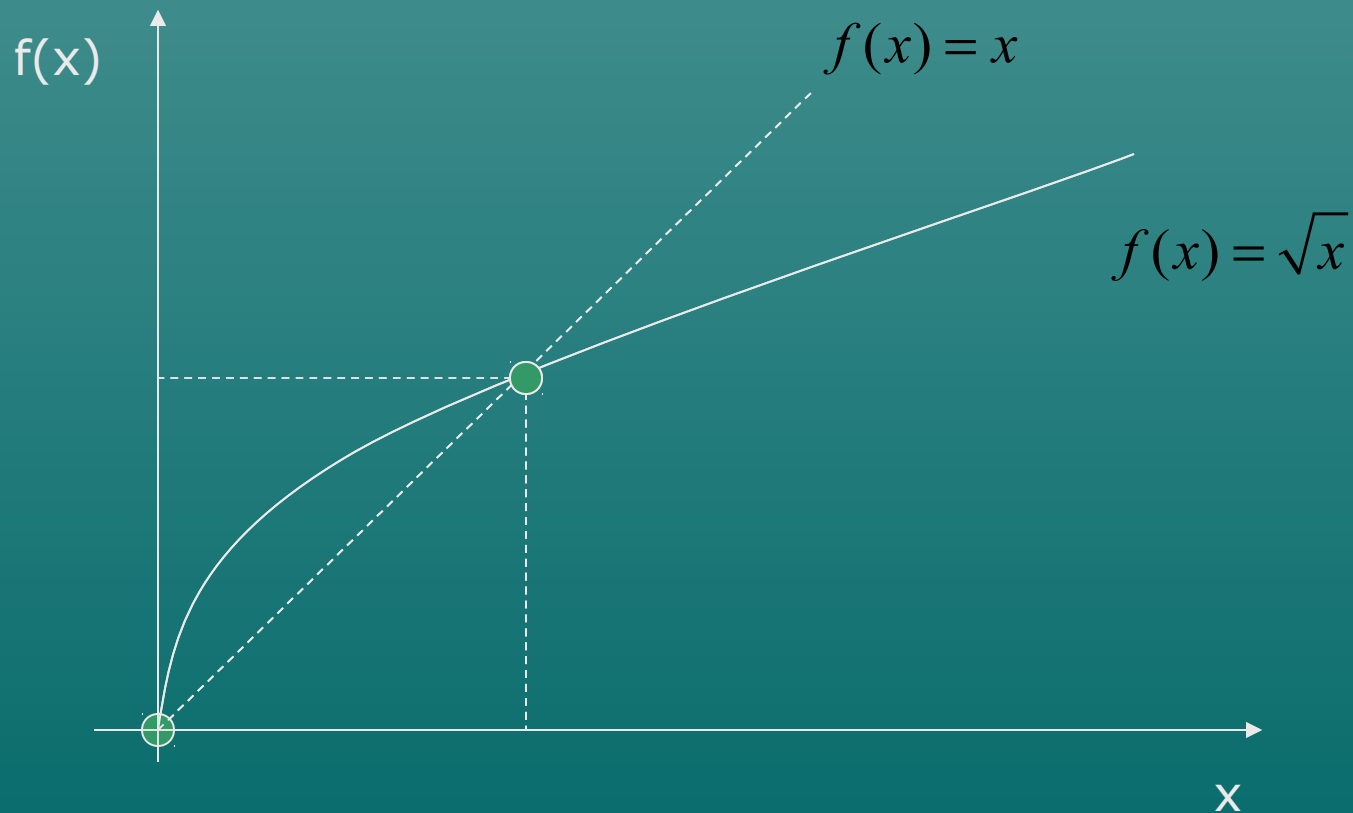
$x_4 = 0$

$x_5 = 0$

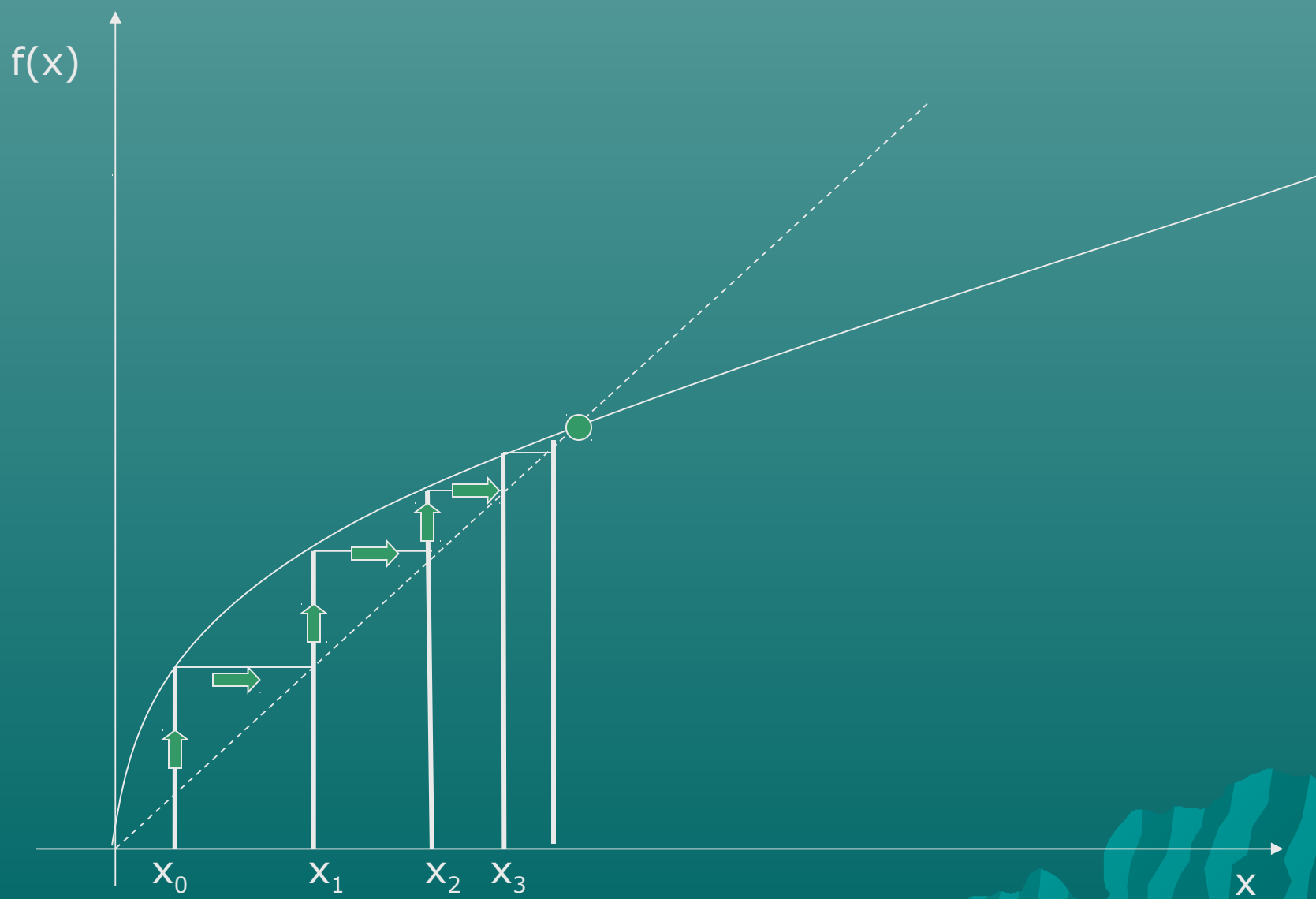


Pontos fixos são como pontos de equilíbrio. No caso do primeiro exemplo podemos encontrá-los da seguinte forma:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} = x_n$$



Dinâmica



Exemplo 3: o mapa logístico

Motivação:

Seja X_n a população de uma determinada espécie na geração n .

A cada geração uma parte da população morre e filhotes nascem. O número de indivíduos na geração seguinte deve ser aproximadamente proporcional ao número de indivíduos na geração anterior:

$X_{n+1} = \mu X_n$ onde o parâmetro $\mu > 1$ mede a taxa de crescimento

Se a população fica muito grande pode faltar comida. Então a taxa de crescimento não pode ser constante. Substituímos μ por

$$\mu(1 - X_n/X_c)$$

onde X_c é o maior número de indivíduos que pode sobreviver com os recursos existentes.

Veja que

$$\mu(1 - X_n / X_c) \approx \begin{cases} \mu & \text{se } X_n \ll X_c \\ 0 & \text{se } X_n \approx X_c \end{cases}$$

Então a equação que descreve a população fica:

$$X_{n+1} = \mu X_n (1 - X_n / X_c)$$

Dividindo os dois lados por X_c e definindo uma nova variável $x_n = X_n / X_c$

$$\frac{X_{n+1}}{X_c} = \mu \frac{X_n}{X_c} \left(1 - \frac{X_n}{X_c}\right)$$

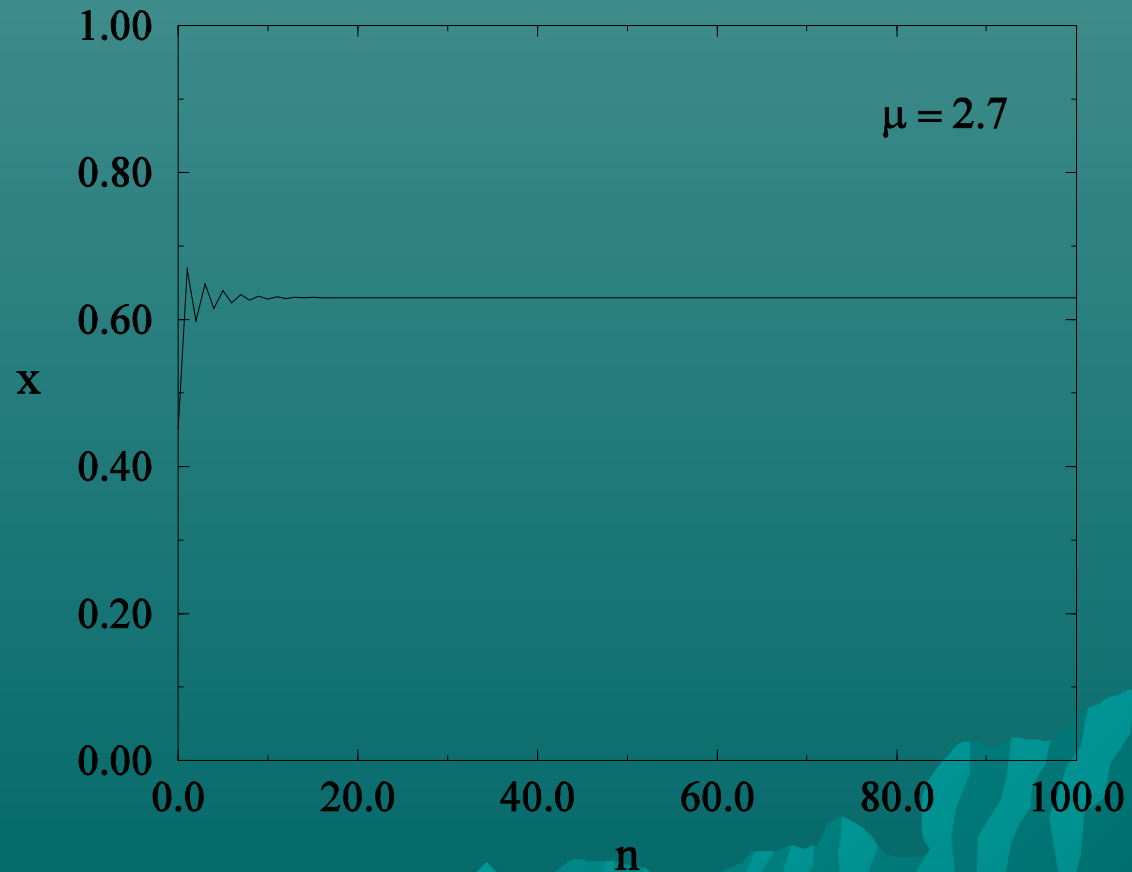
$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

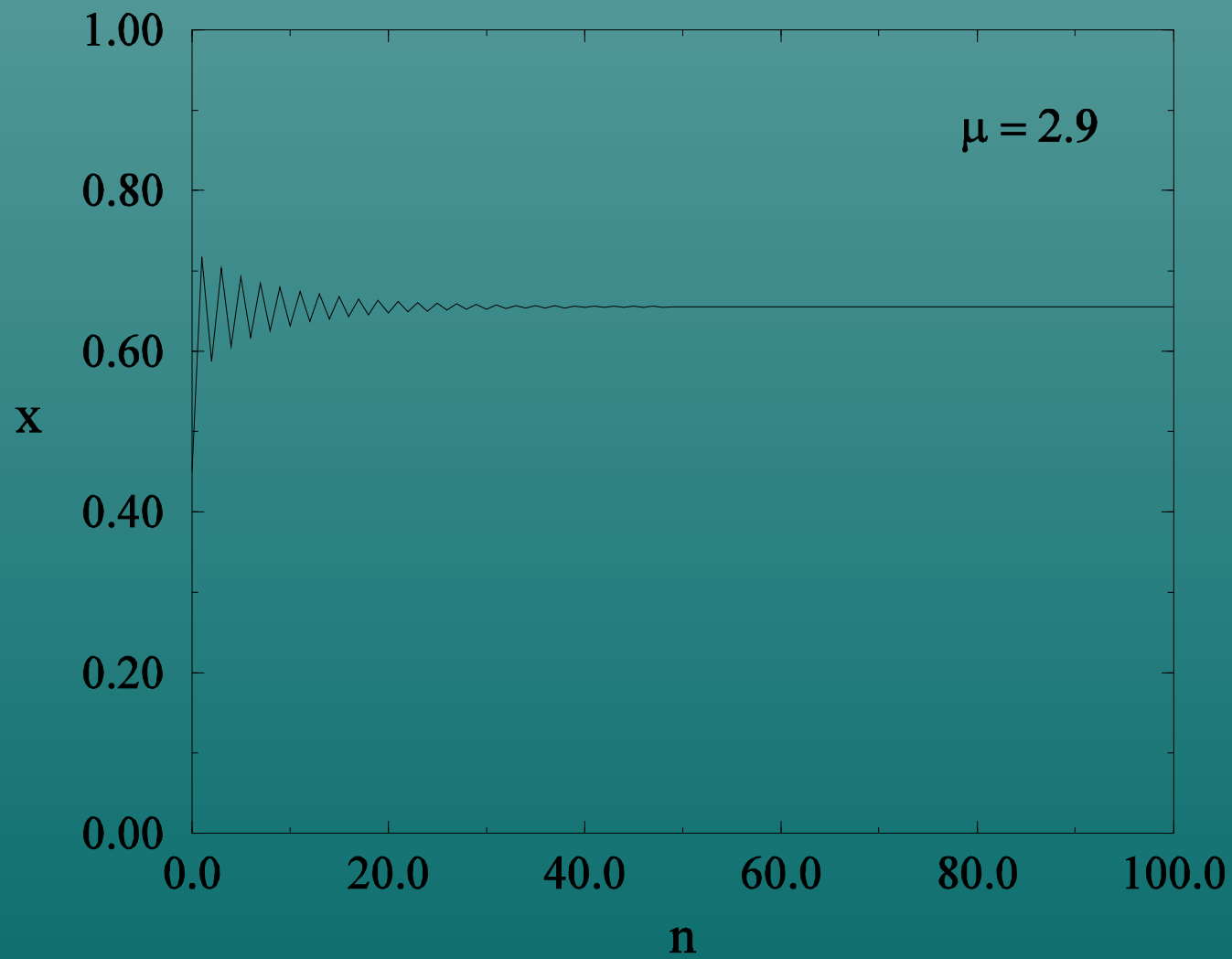
$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad 0 \leq x_n \leq 1 \quad \mu = 2.7$$

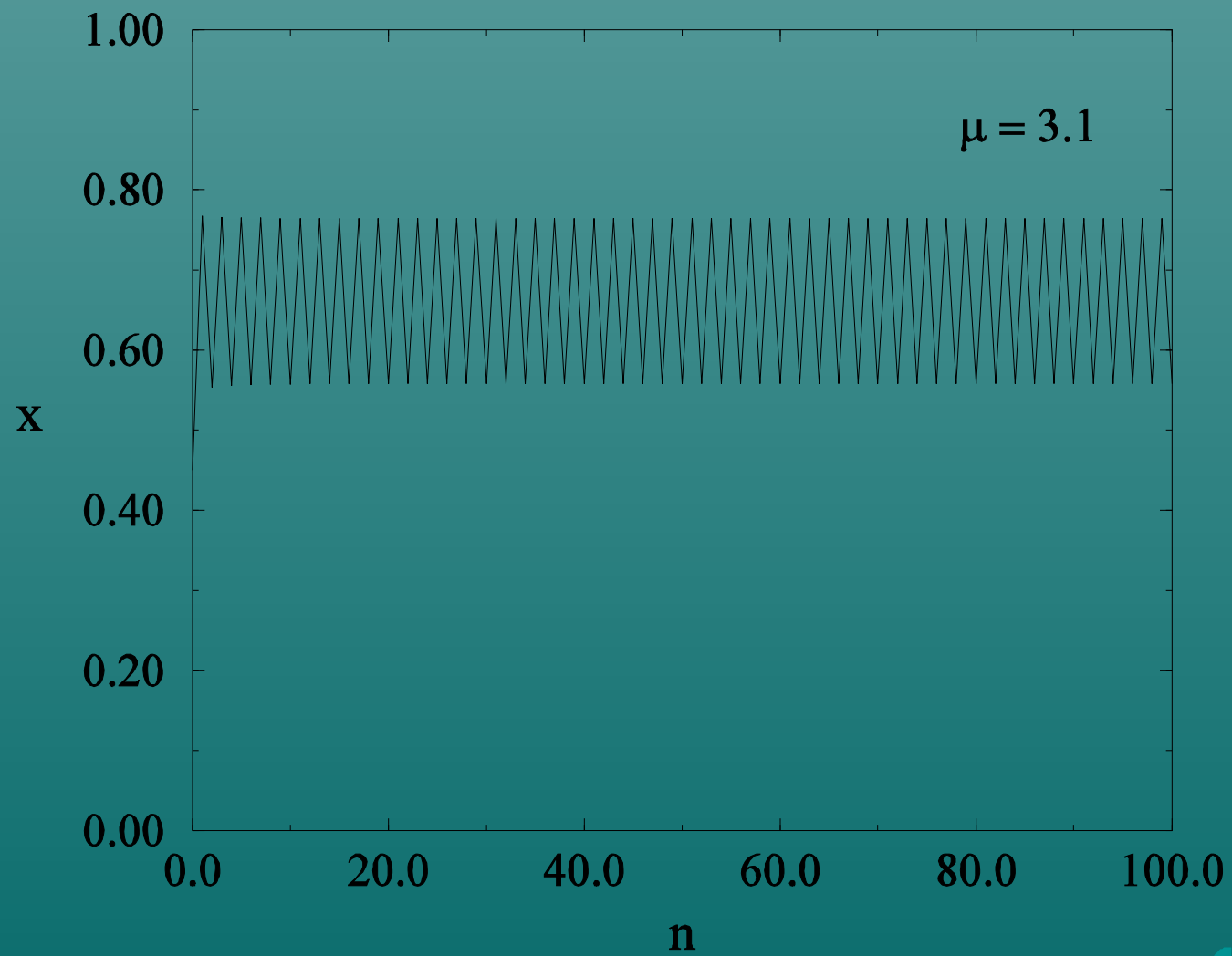
Pontos fixos: $x_{n+1} = x_n$

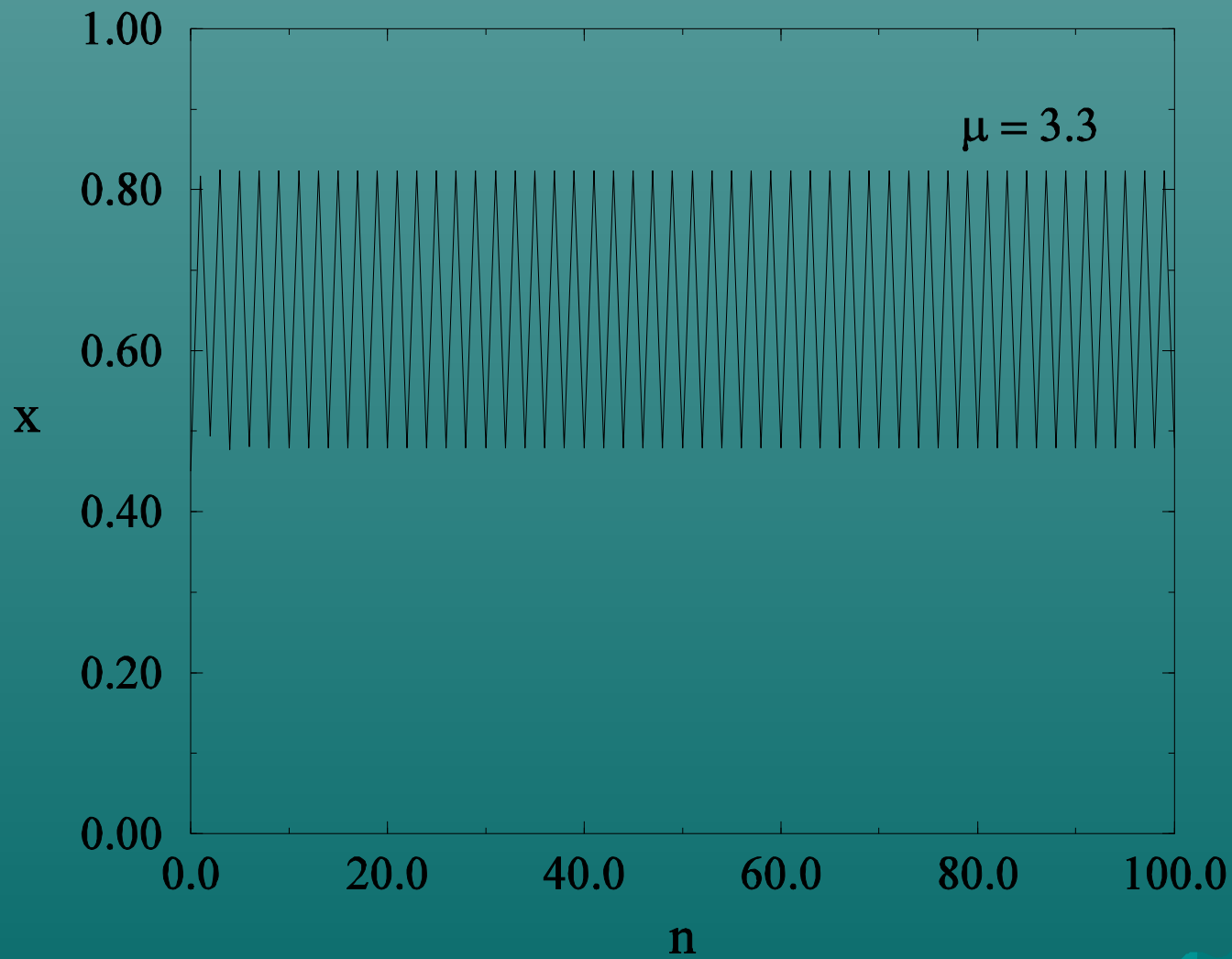
Soluções: $x=0$ e $x = (\mu-1)/\mu = 0.629\dots$

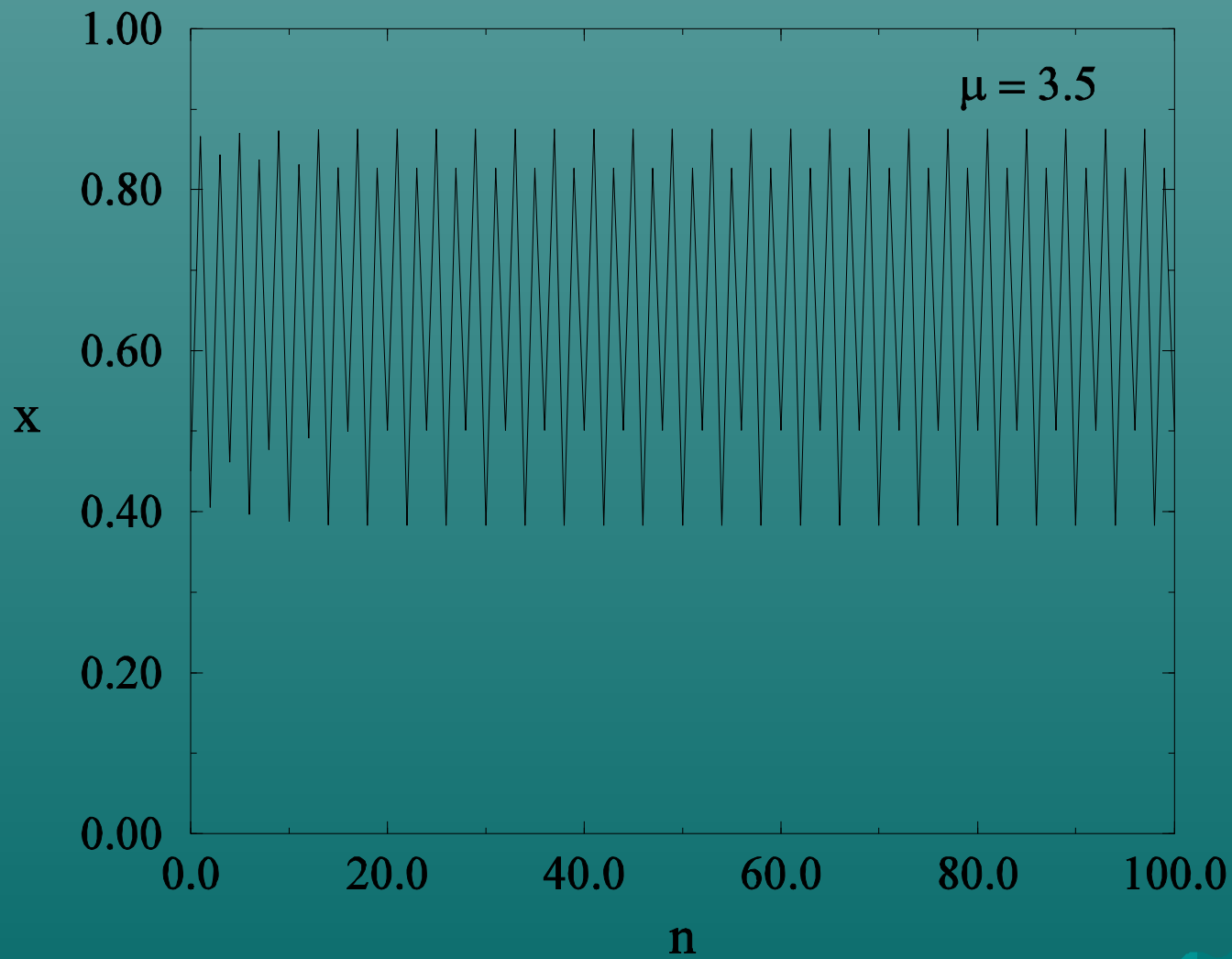
$x_0 = 0.5$
 $x_1 = 0.675$
 $x_2 = 0.597\dots$
 $x_3 = 0.650\dots$
 $x_4 = 0.615\dots$
 $x_5 = 0.640\dots$
 $x_6 = 0.622\dots$
 $x_7 = 0.634\dots$

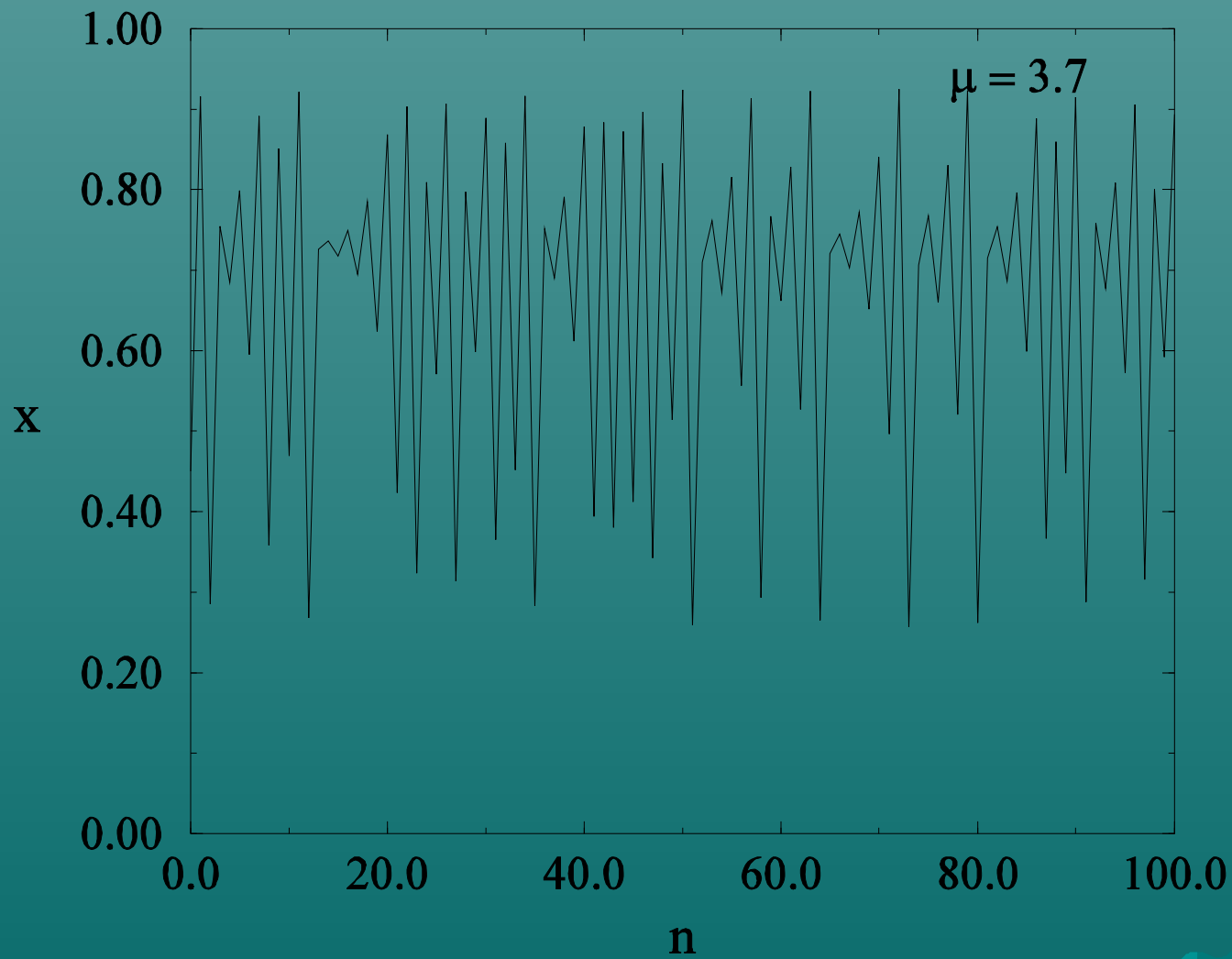


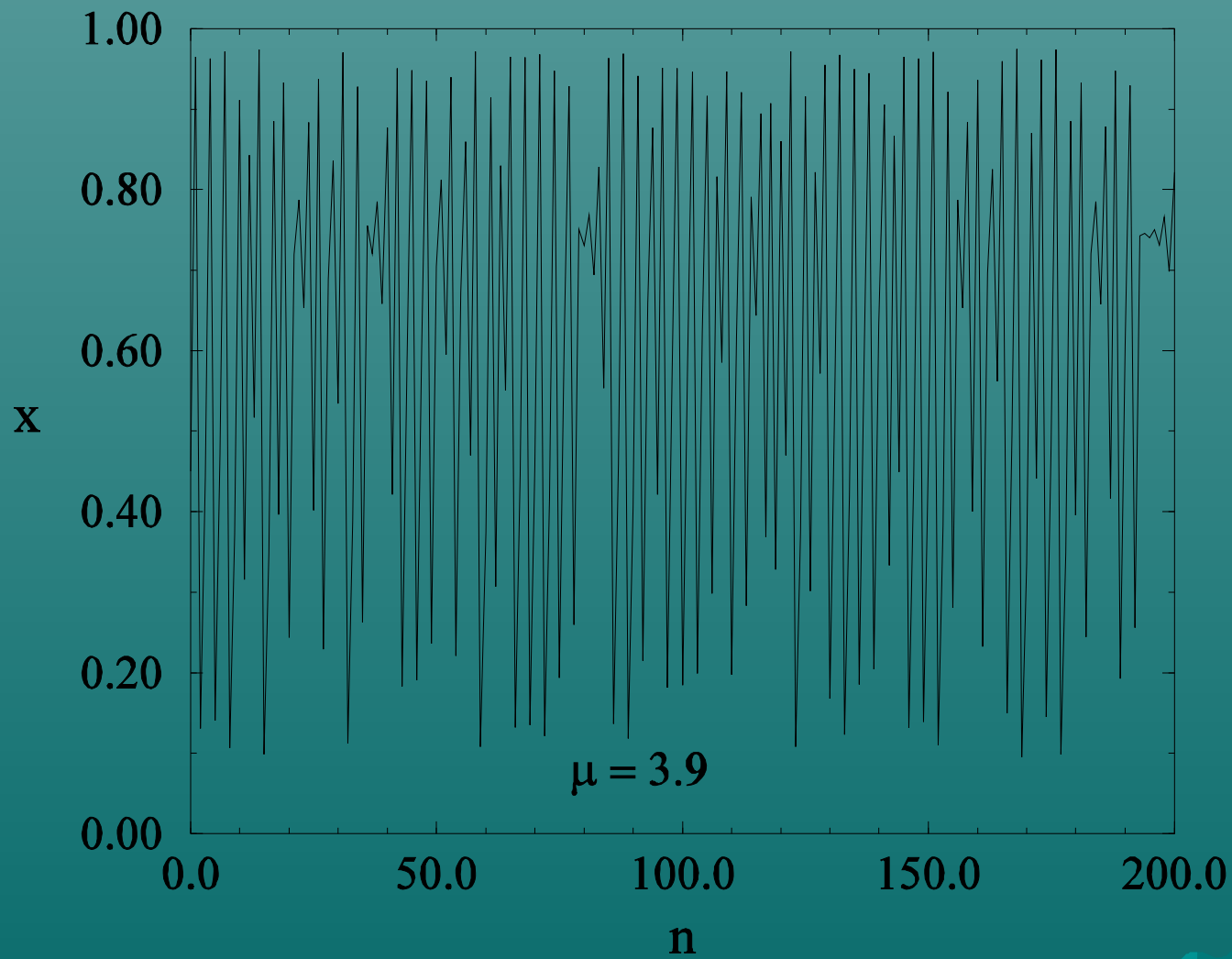




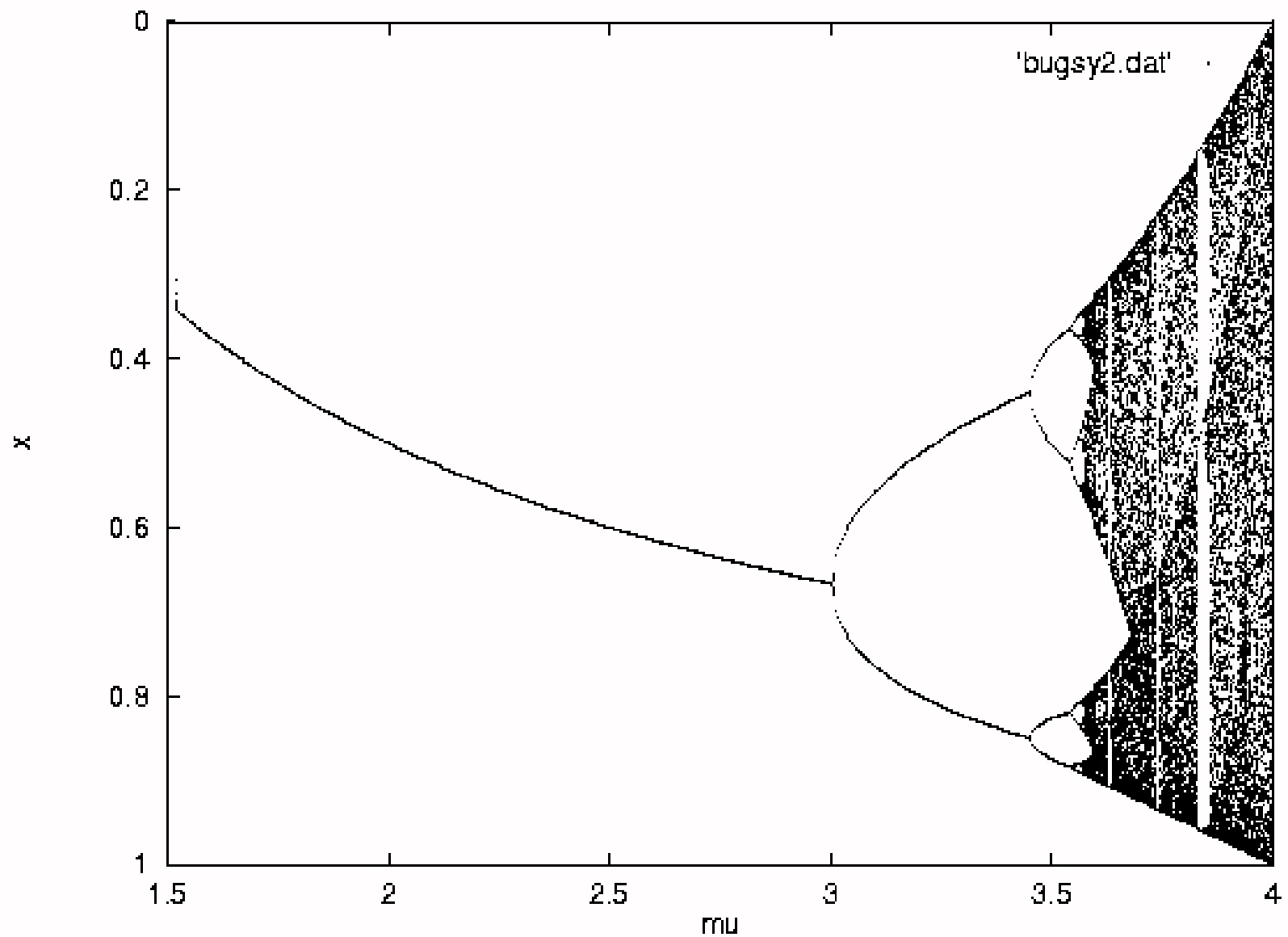




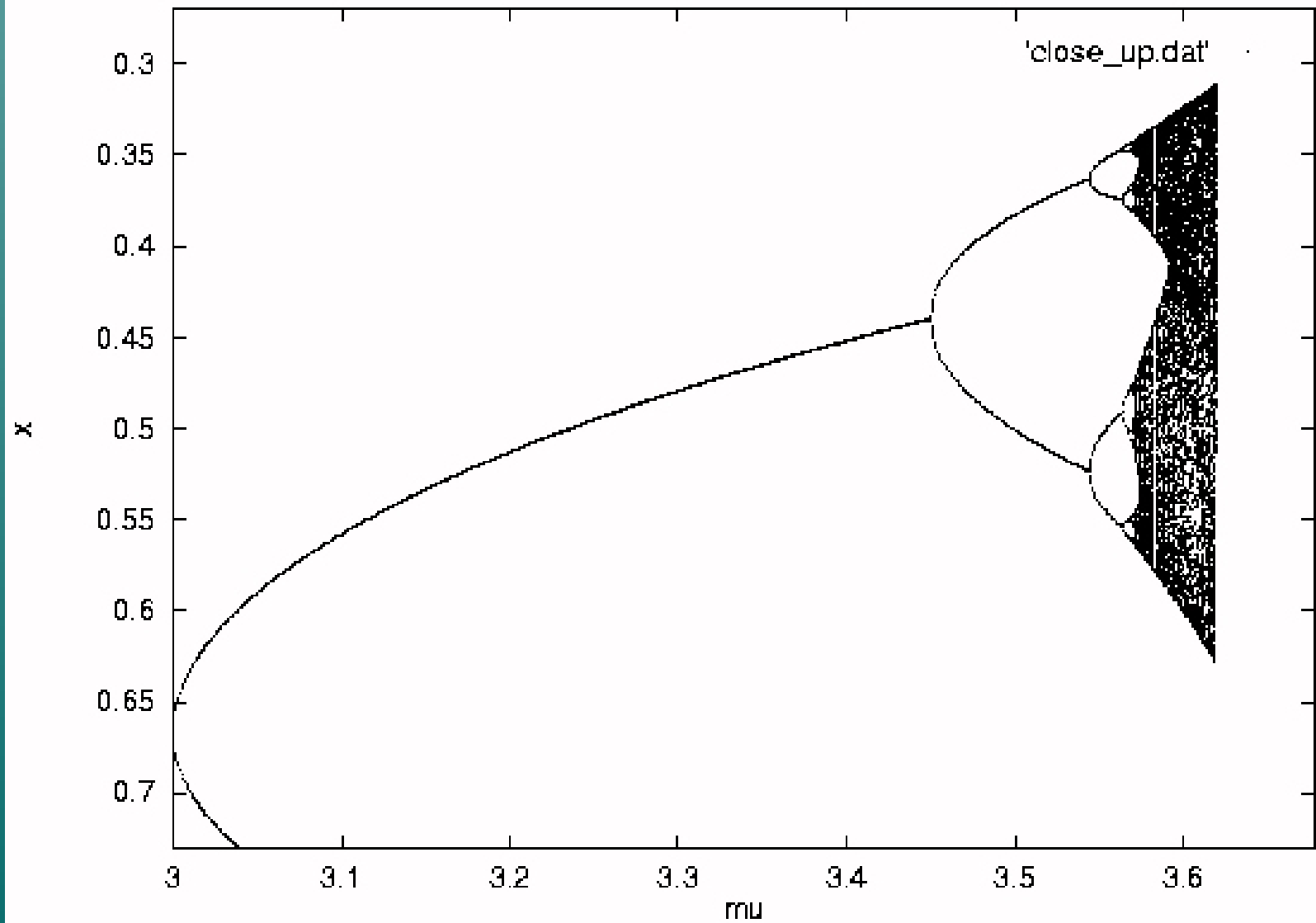




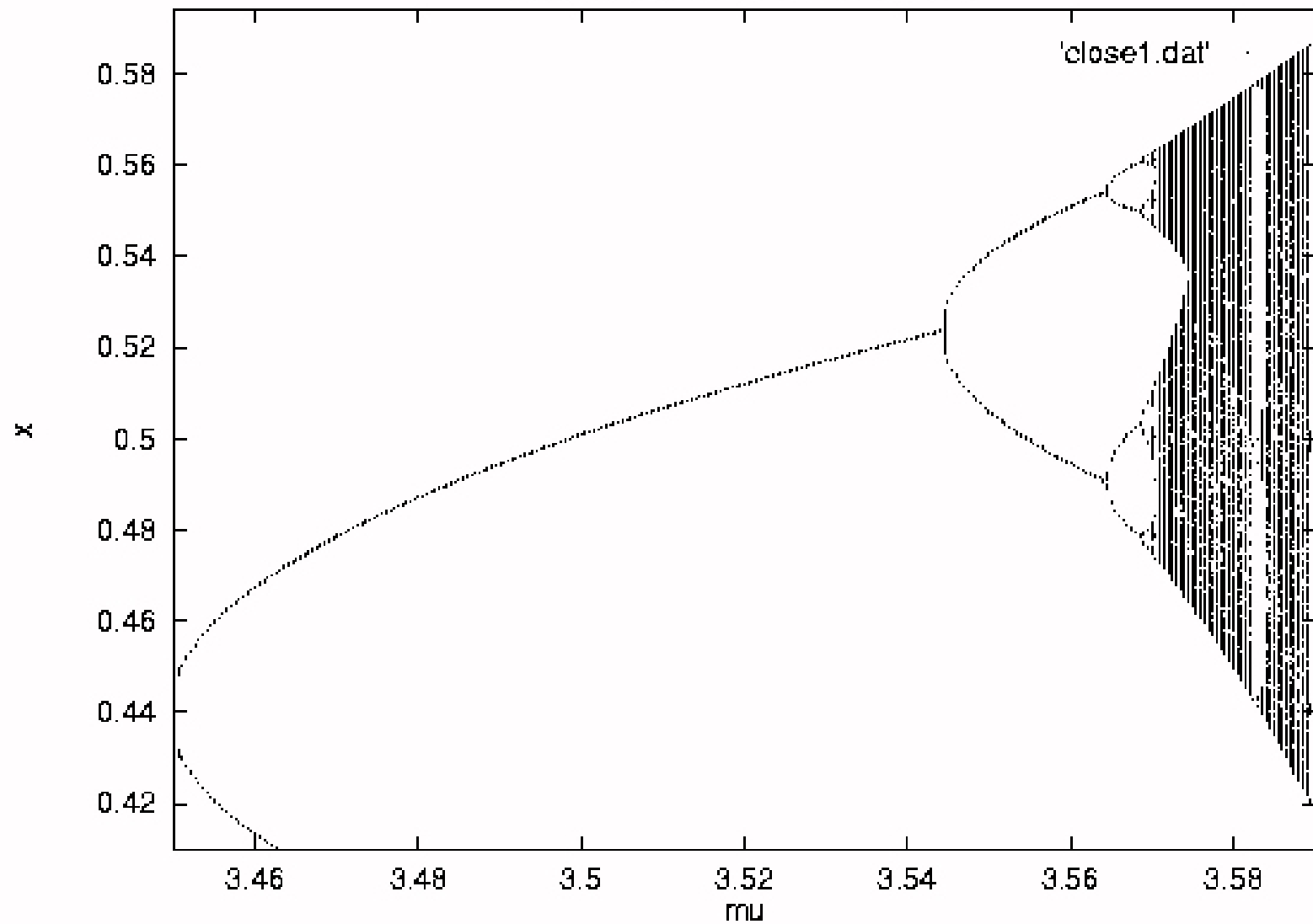
Rota para o caos por duplicação de período



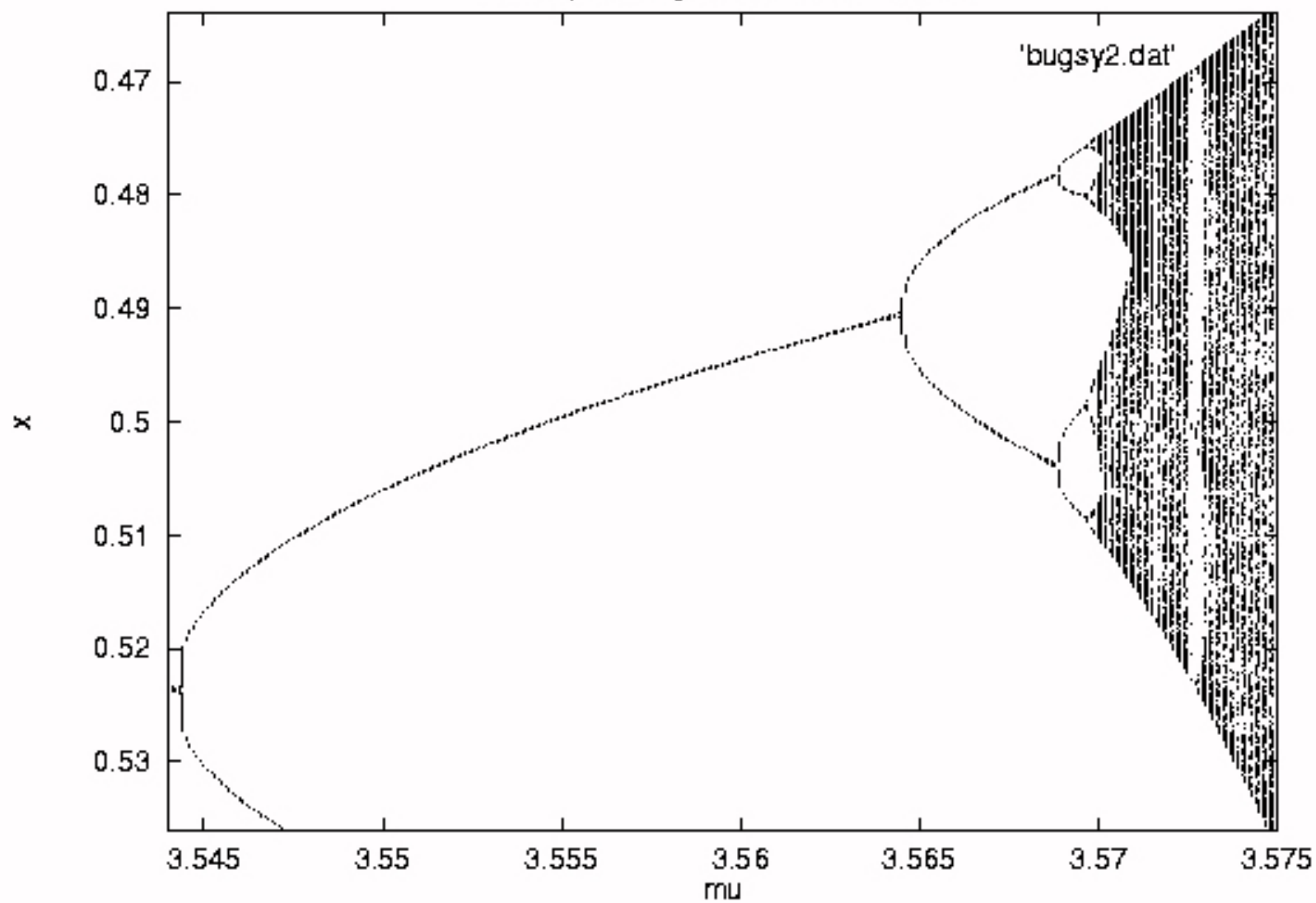
Closeup of range: $\mu = 3.0 - 3.678$

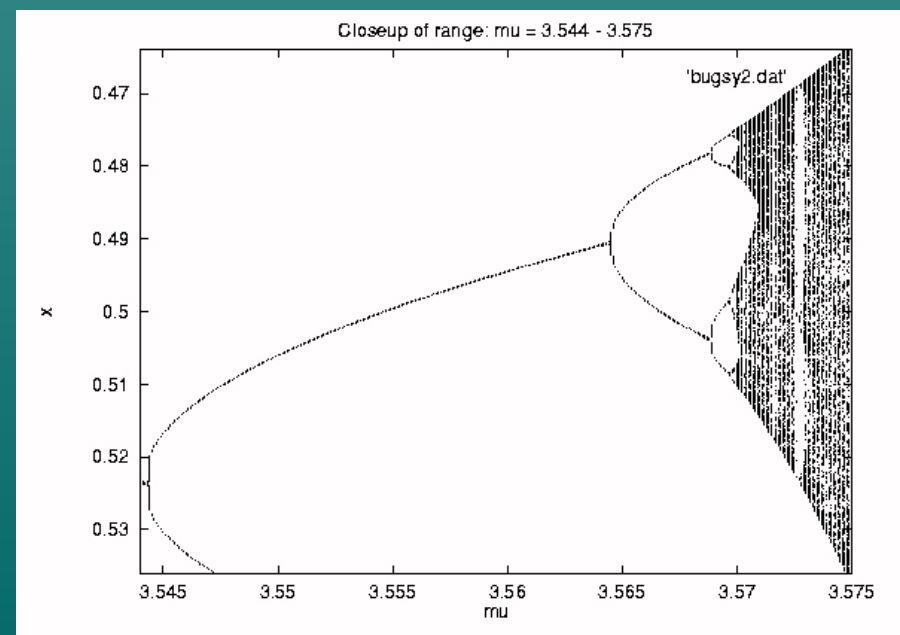
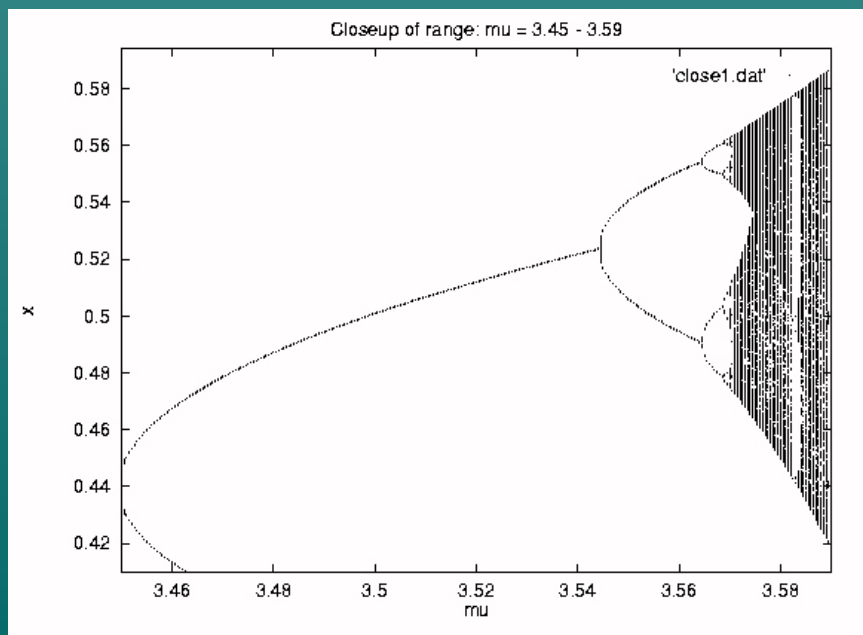
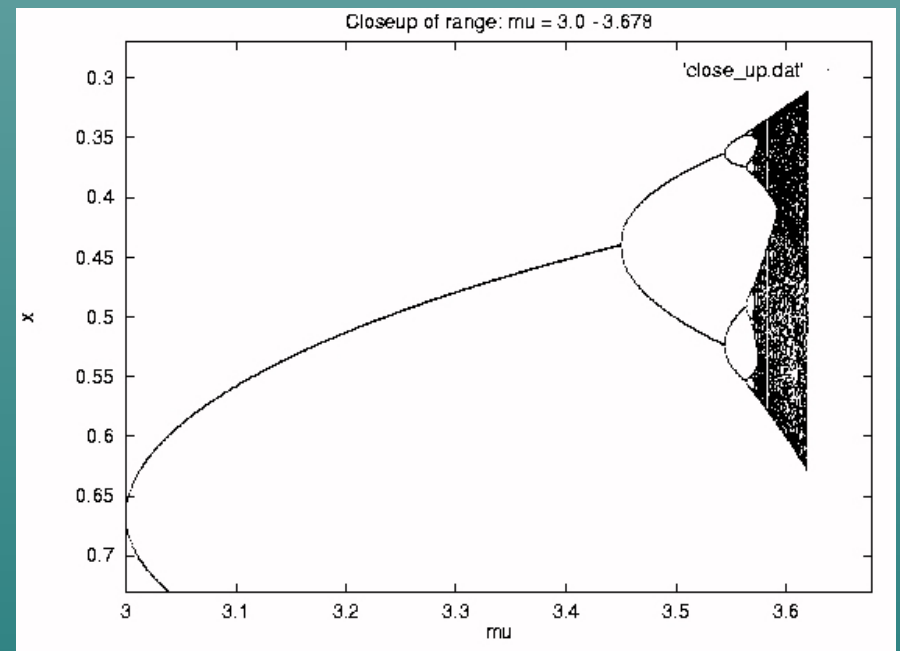
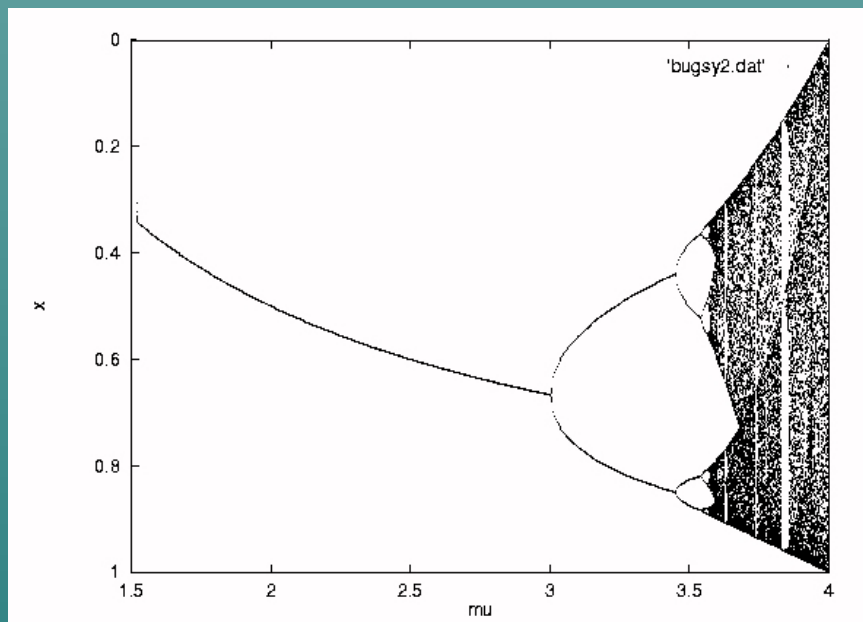


Closeup of range: $\mu = 3.45 - 3.59$



Closeup of range: $\mu = 3.544 - 3.575$





Dinâmica Auto-Similar !

Ordem no Caos!

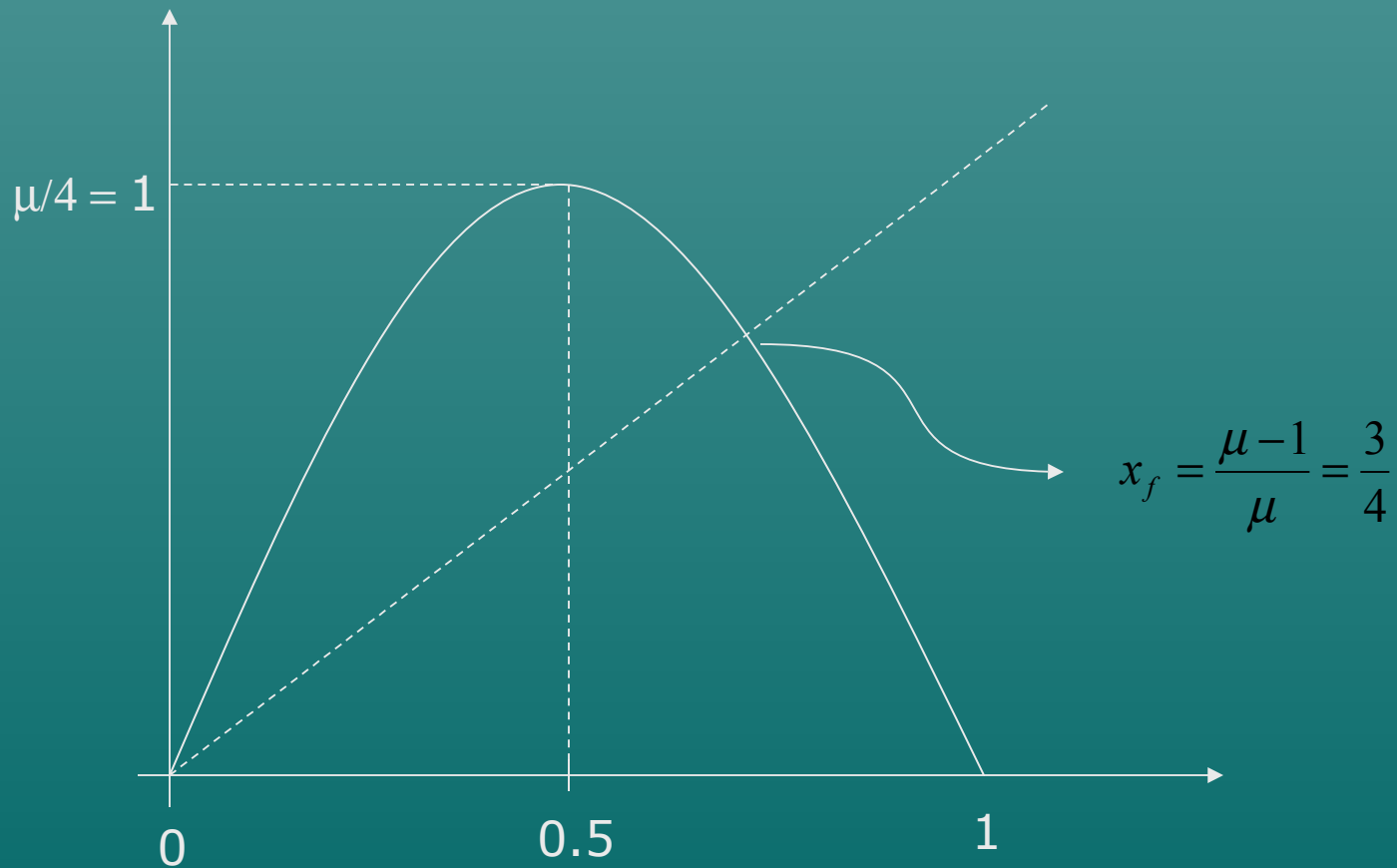


**Qual o mecanismo que leva ao
caos?**

**Para responder essa pergunta
vamos fazer uma análise
geométrica do problema.**

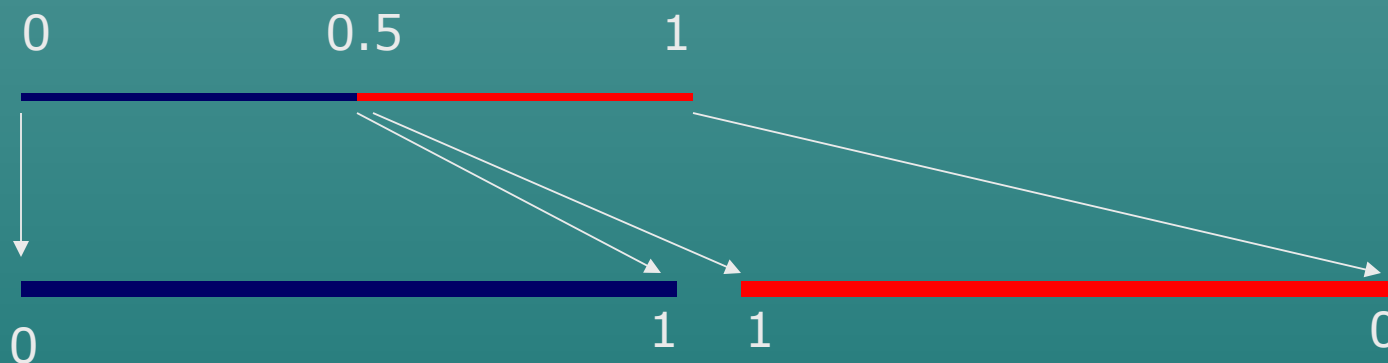
$$\mu = 4$$

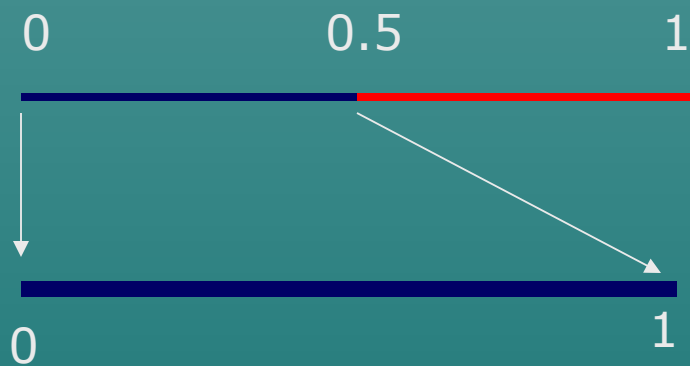
$$f(x) = 4x(1-x) \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

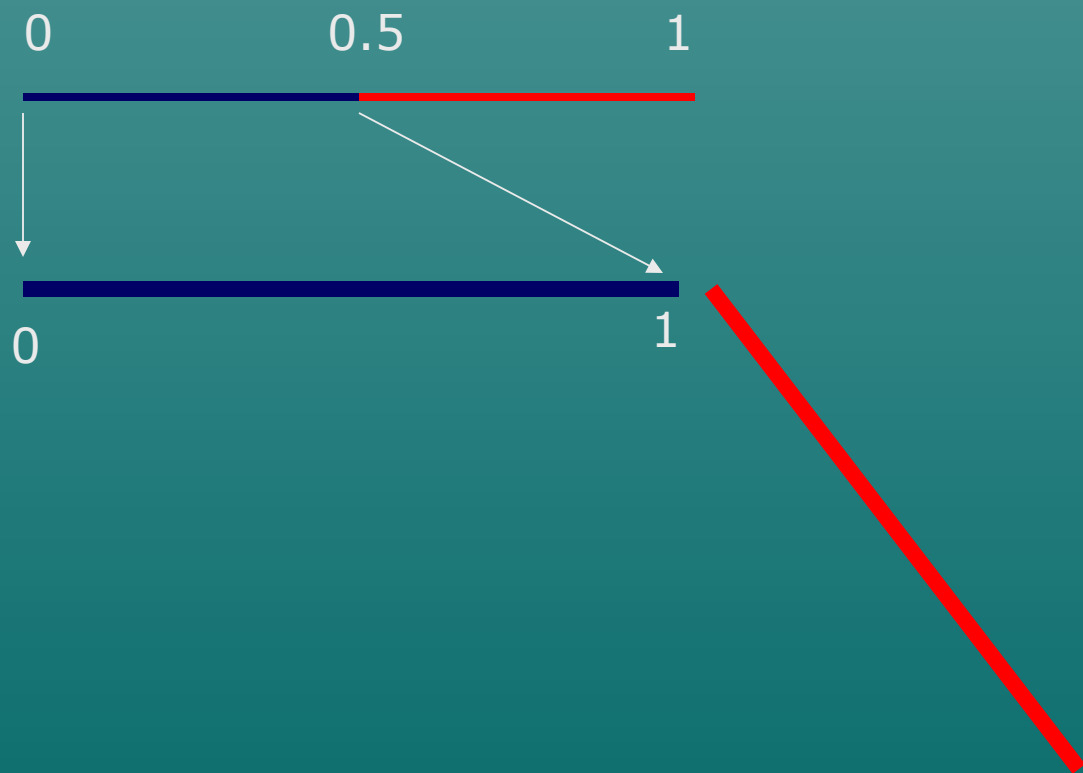


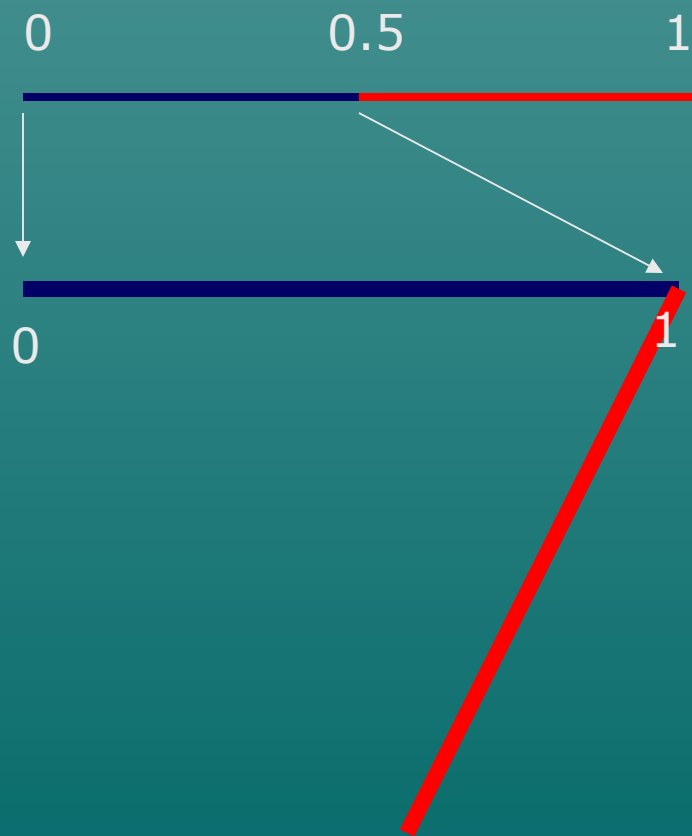
1 – O intervalo $[0, 0.5]$ é levado pelo mapa no intervalo $[0,1]$

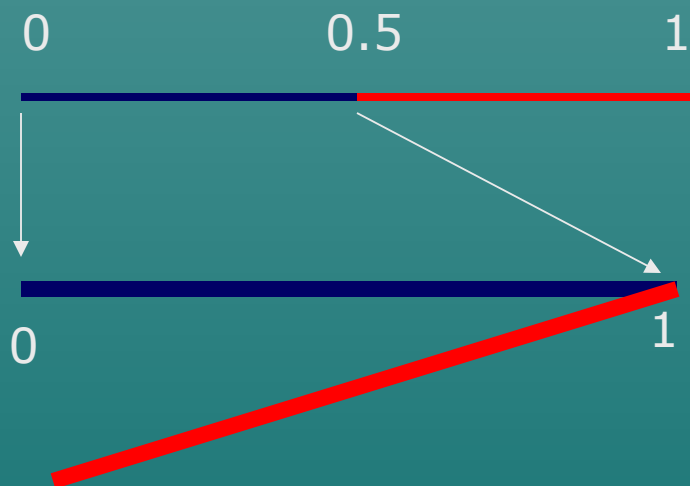
2 – O intervalo $[0.5, 1]$ é levado pelo mapa no intervalo $[1,0]$

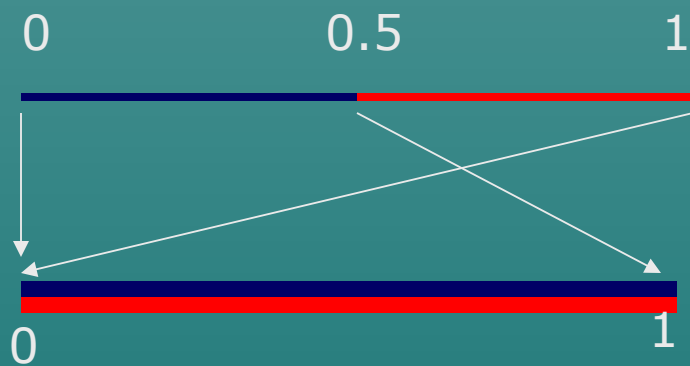






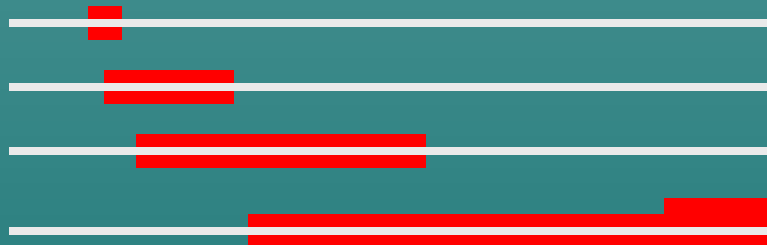






A cada passo do processo pontos inicialmente muito próximos vão se afastando devido ao esticamento.

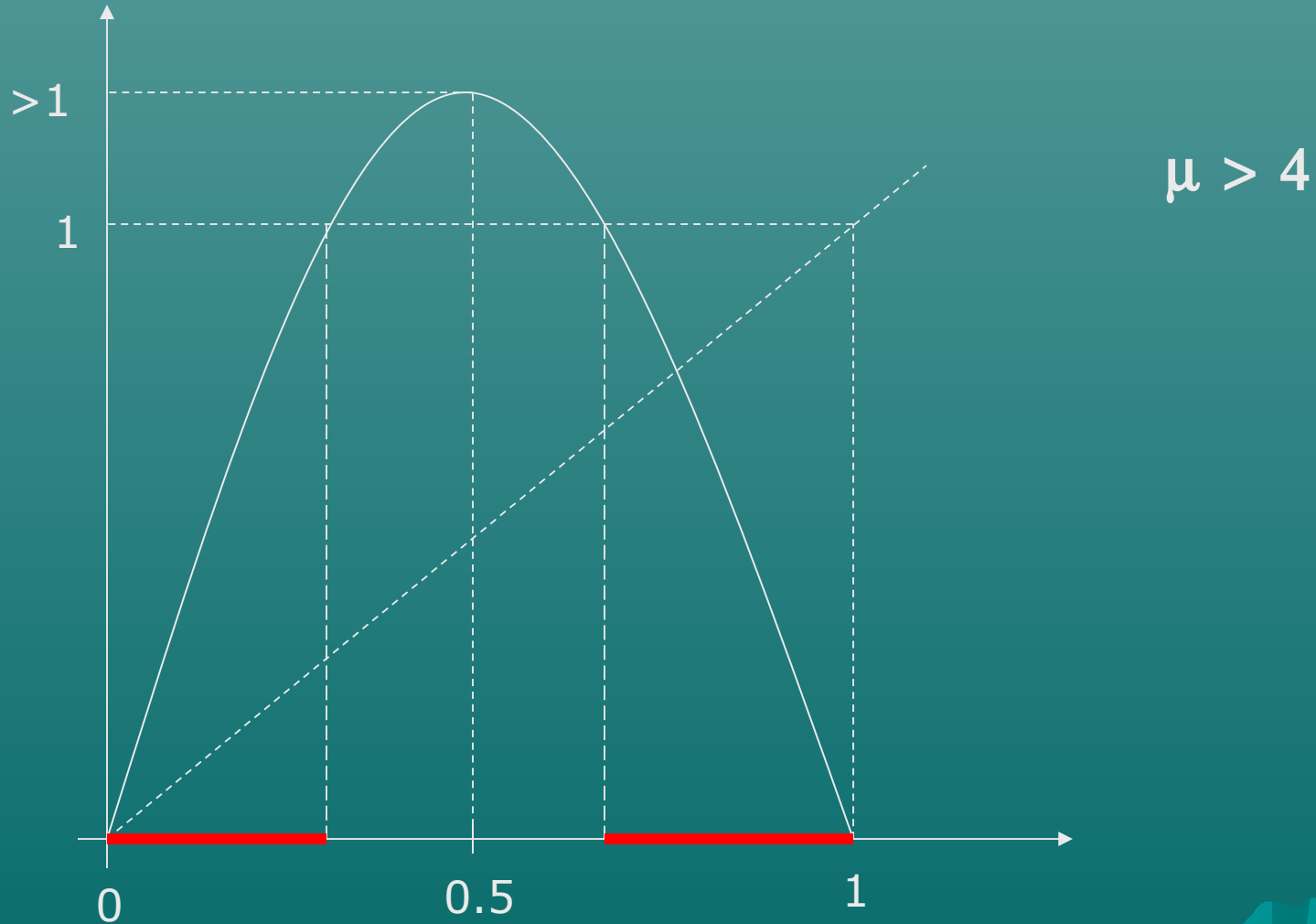
Se a distancia entre dois pontos representa um erro na condição inicial, esse erro acaba ficando do tamanho do espaço todo, e perdemos o poder de previsão:



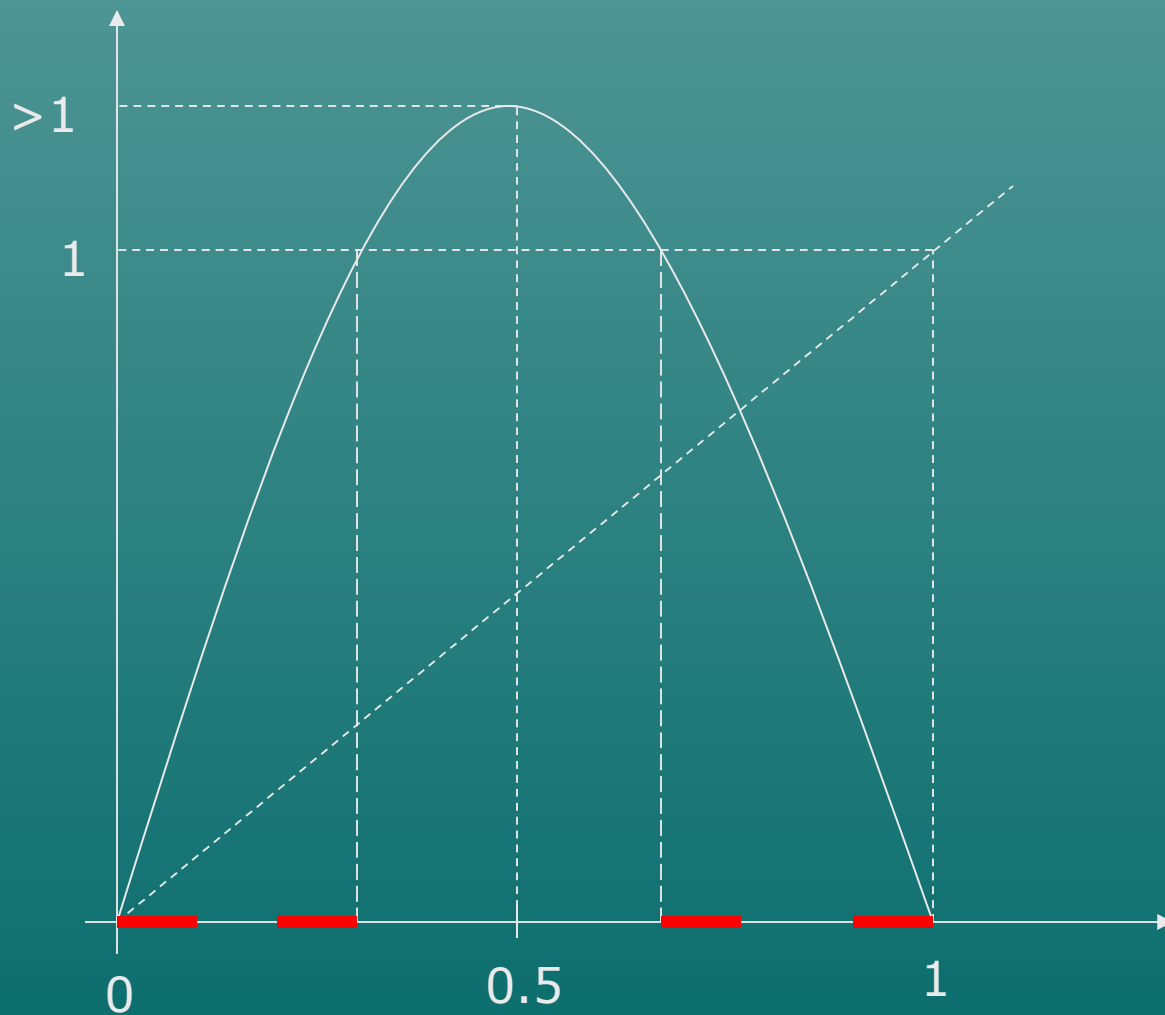
No caso da previsão do tempo, um erro de medida de 0.1 grau, por exemplo, no dia seguinte representa 0.5 grau e cinco dias depois 10 graus, perdendo totalmente o significado.

O processo de esticar e dobrar é o mecanismo fundamental da geração de caos.

Caos e Fractais



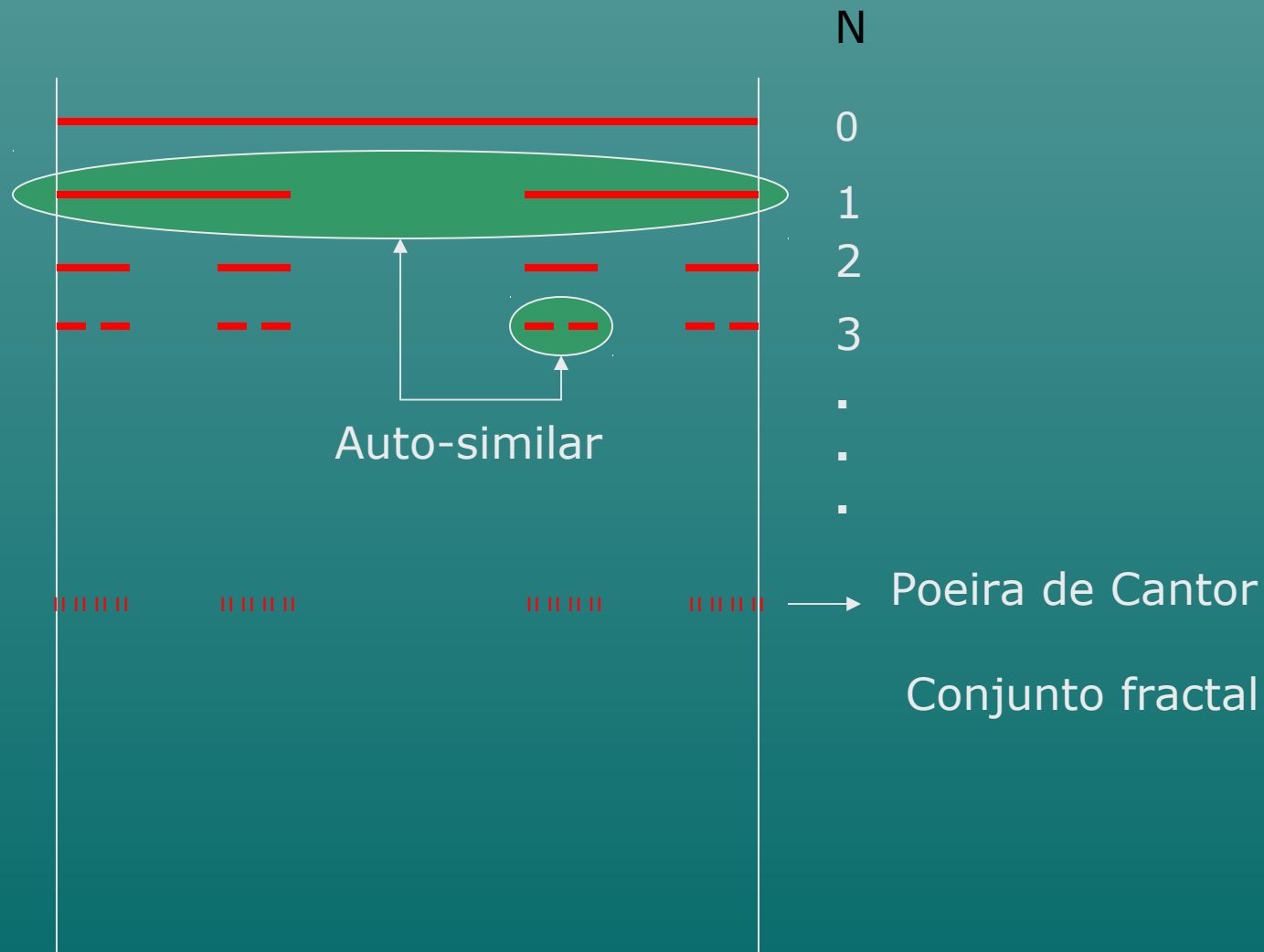
Pontos que permanecem no intervalo $[0,1]$ após uma aplicação



$$\mu > 4$$

Pontos que permanecem no intervalo $[0, 1]$ após duas aplicações

Pontos que permanecem no intervalo $[0,1]$ após N aplicações



O QUE SÃO FRACTAIS?

1 – Fractais são conjuntos auto-similares: ampliações sucessivas do conjunto reproduzem exatamente o mesmo conjunto.

2 – Fractais são conjuntos quase auto-similares: ampliações sucessivas são parecidas com o conjunto inicial, mas não idênticas. O importante é que cada ampliação revele novas estruturas.

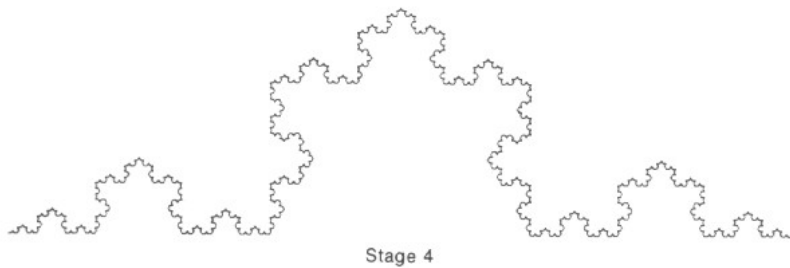
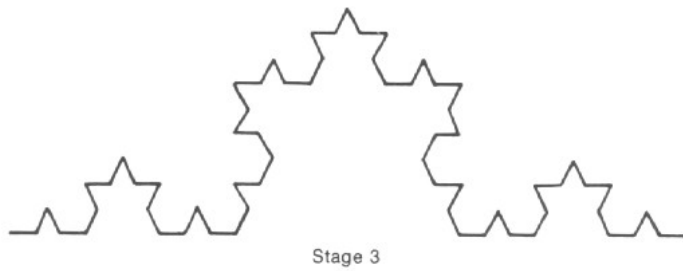
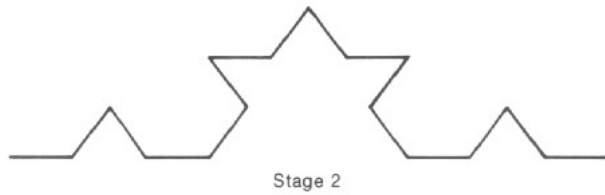
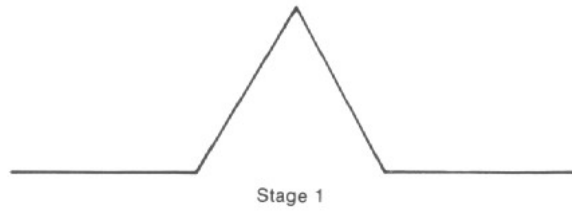
Característica importante: conjuntos fractais tem dimensão fracionaria!

An abstract graphic at the bottom right of the slide, rendered in various shades of teal and blue. It features jagged, layered shapes that resemble a mountain range or a complex fractal structure, with some areas appearing more solid and others more translucent or layered.

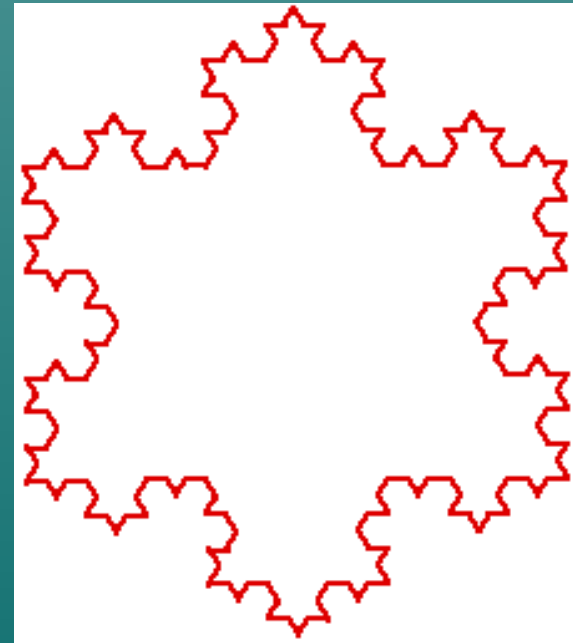
EXEMPLOS DE FRACTAIS EXATAMENTE AUTO-SIMILARES



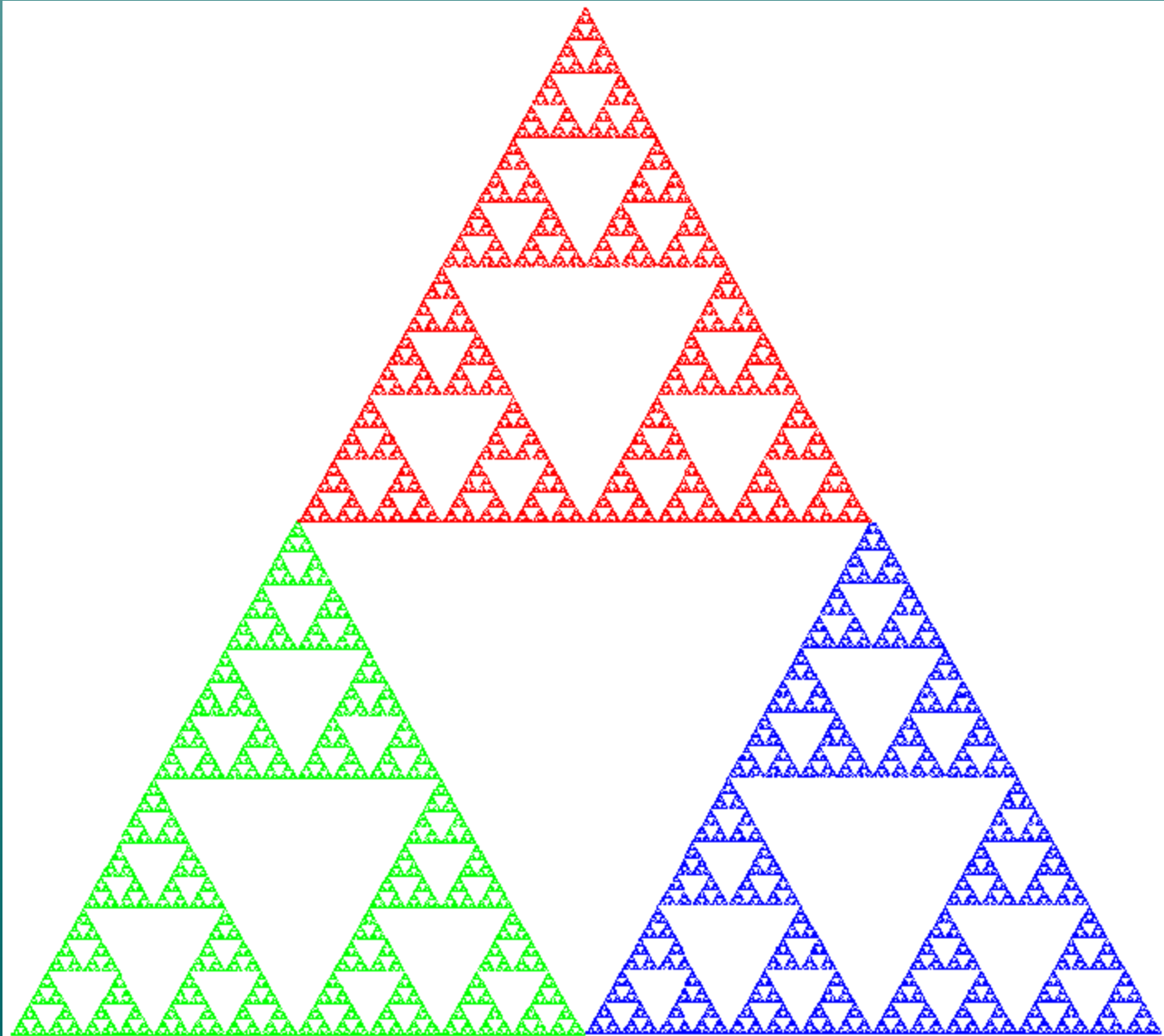
A Curva de Koch e o Floco de Neve

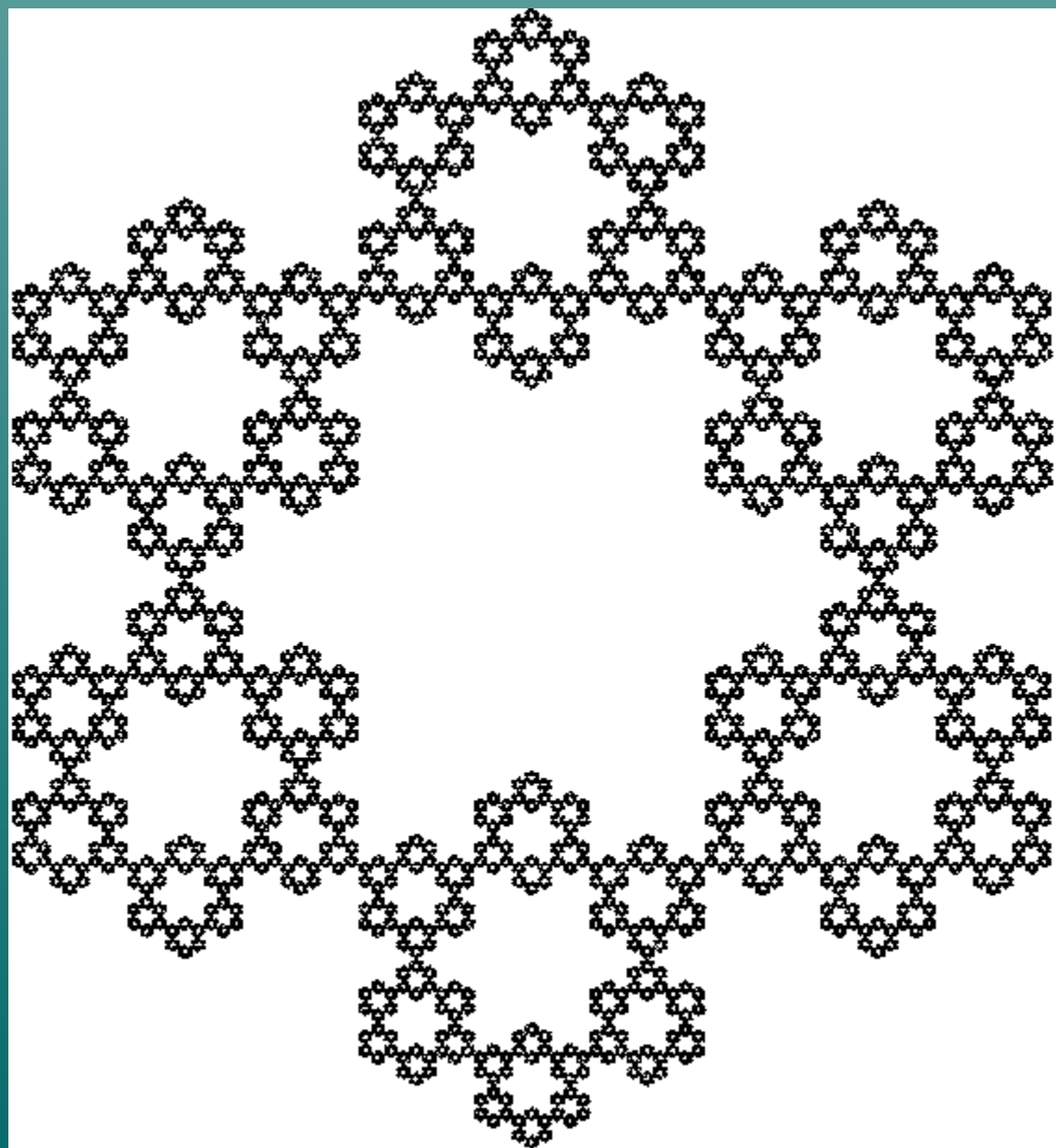


Adapted from Benoit Mandelbrot, *Fractals*.

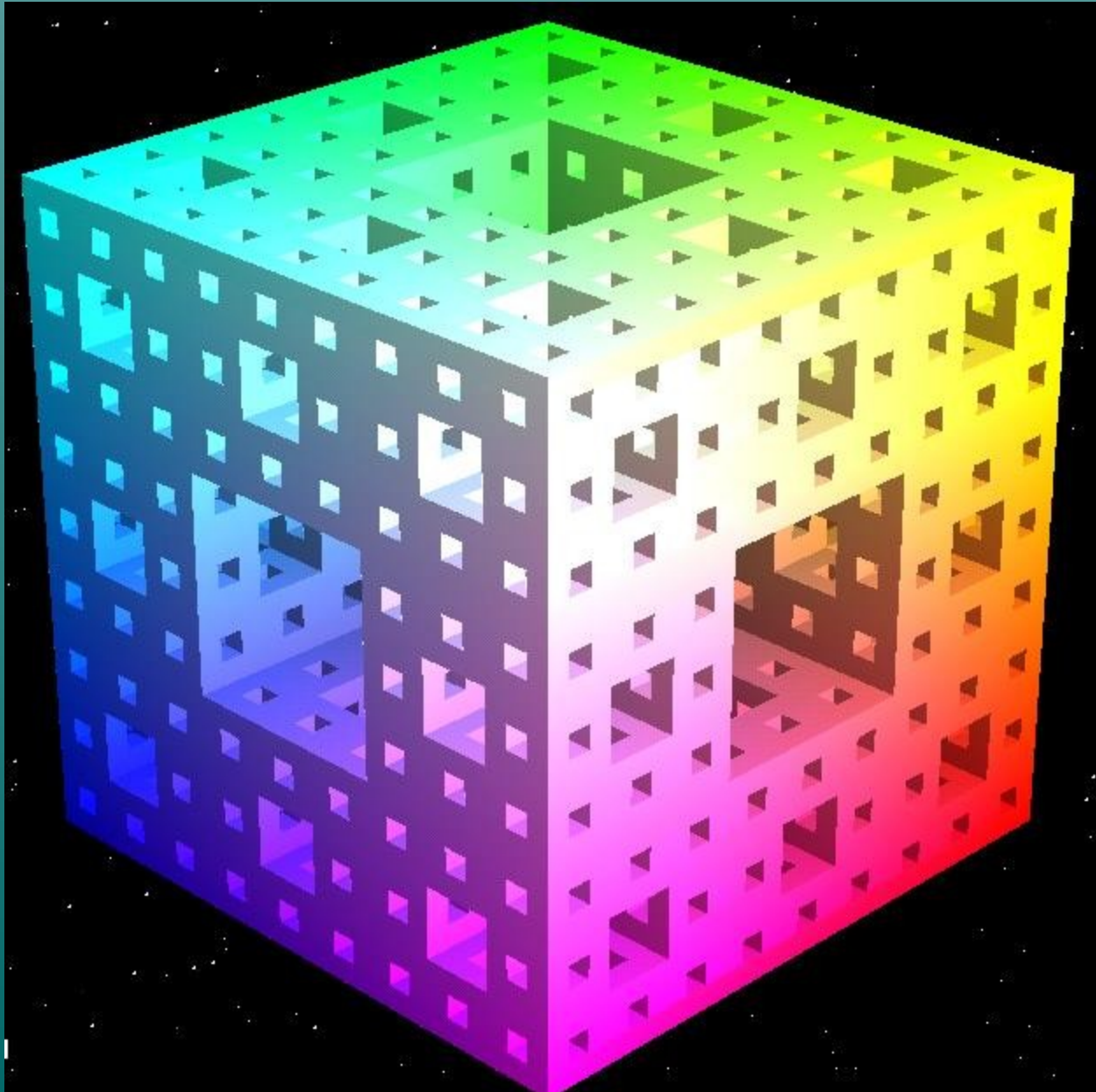


Tapete de Sierpinski





Esponja de Menger



UM EXEMPLO DE FRACTAL QUASE AUTO-SIMILAR: O CONJUNTO DE MANDELBROT

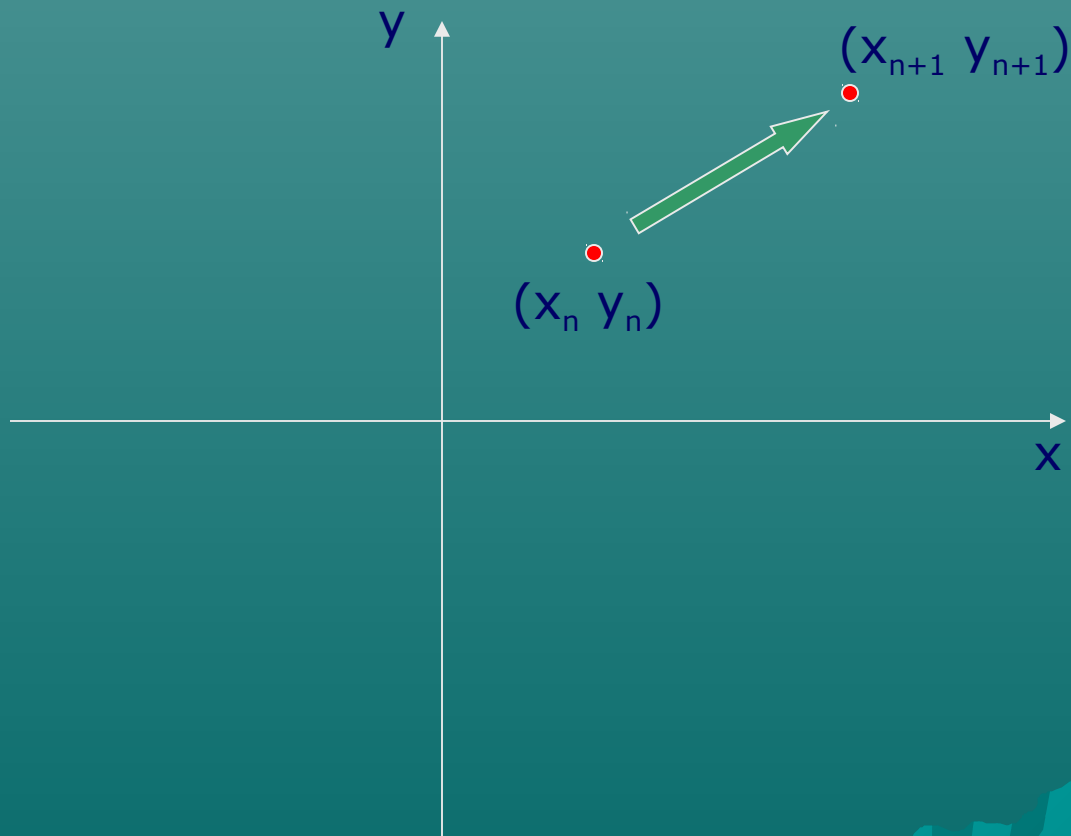


Mapas em Duas Dimensões

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

$$z_{n+1} = f(z_n)$$



Mapas Quadráticos

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

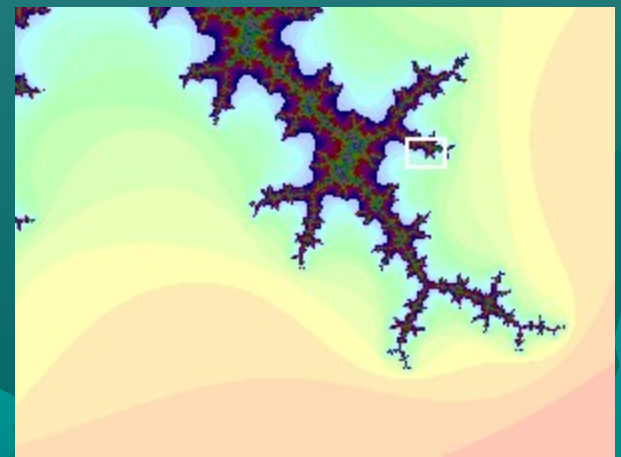
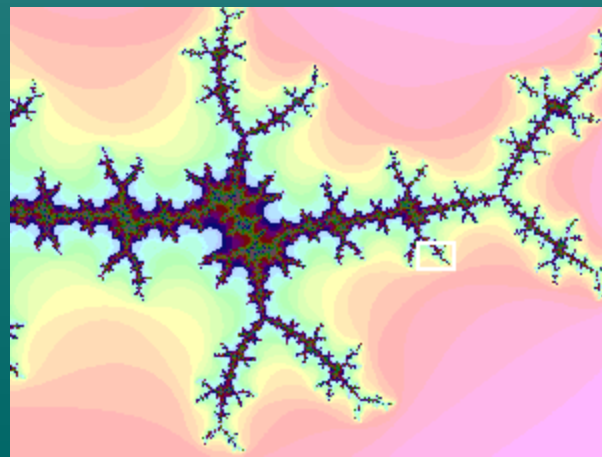
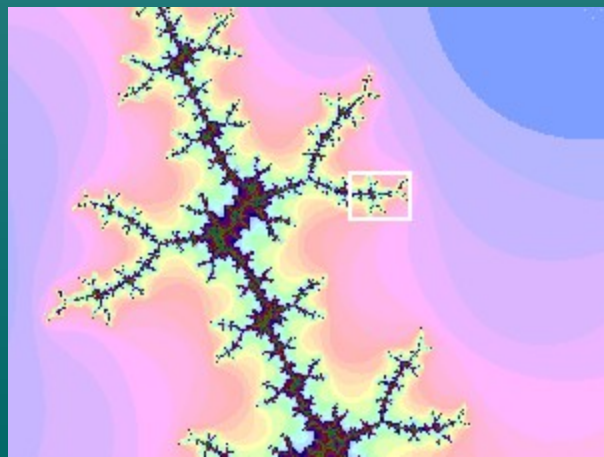
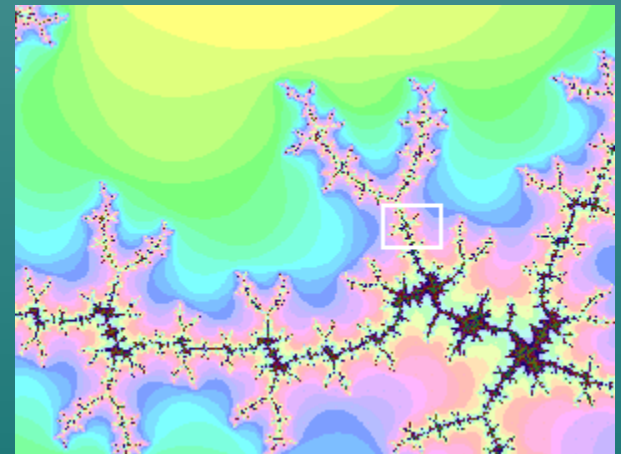
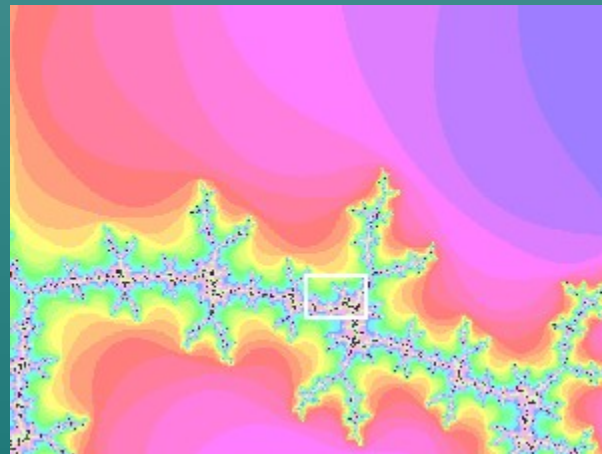
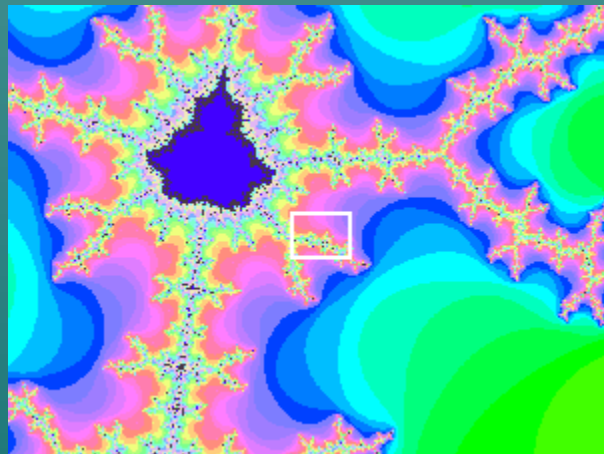
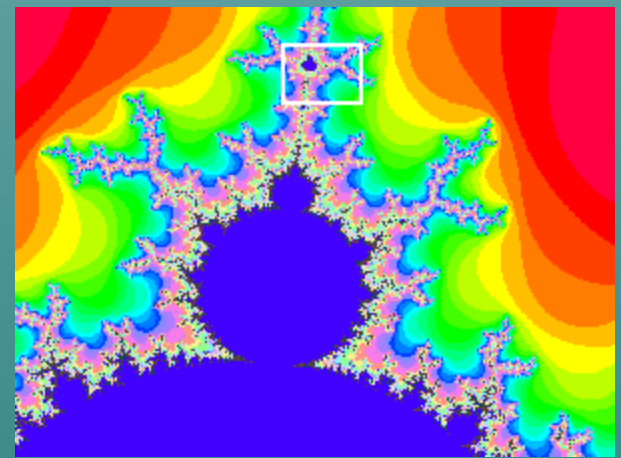
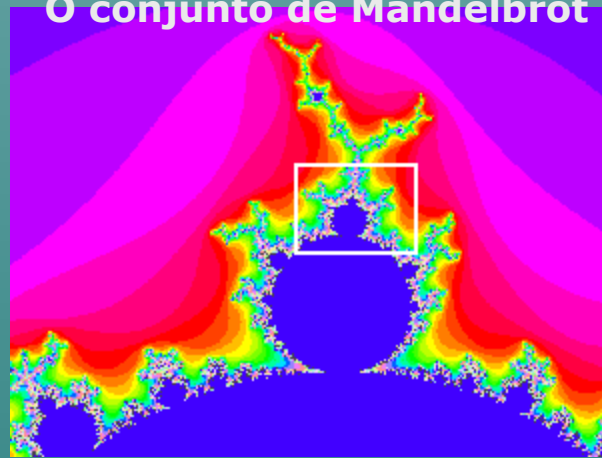
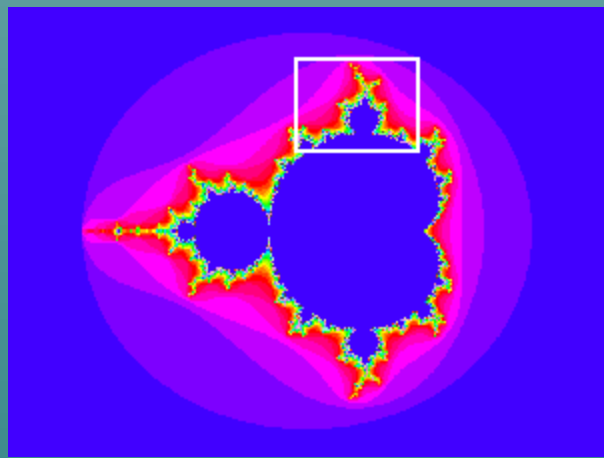
$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + c_1$$

$$y_{n+1} = 2 x_n y_n + c_2$$

Regra do jogo:

- 1 – ponto inicial é $z_0=0$ [ou $(x_0,y_0)=(0,0)$]
- 2 – para cada valor de c [ou de (c_1,c_2)] verificamos quantos passos são necessários para que $|z_n|^2 > 4$ [ou $x_n^2 + y_n^2 > 4$]
- 3 – de acordo com esse numero de passos associamos uma cor diferente ao ponto representado pela constante c . Por exemplo, vermelho de são necessários três passos, verde para quatro passos etc.

O conjunto de Mandelbrot



Cálculo da Dimensão Fractal

Cobrindo uma reta de comprimento 1 com segmentos menores:



Tamanho

Número

ϵ

$N(\epsilon)$

1

1



Tamanho

ε

Número

$N(\varepsilon)$

1

1

$\frac{1}{2}$

2



Tamanho

ε

Número

$N(\varepsilon)$

1

1

$\frac{1}{2}$

2



Tamanho

ε

Número

$N(\varepsilon)$

1

1

$\frac{1}{2}$

2

$\frac{1}{4}$

4

Dividindo o lado do segmento por 2, o número de segmentos multiplica por 2. Veja que $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$.

Cobrimos um quadrado de lado 1 com quadrados menores:



Tamanho

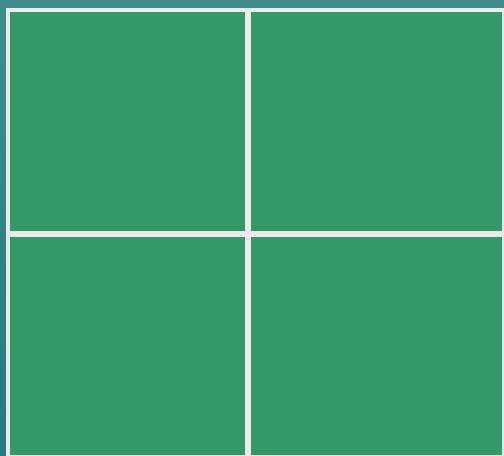
ε

Número

$N(\varepsilon)$

1

1



Tamanho

ε

Número

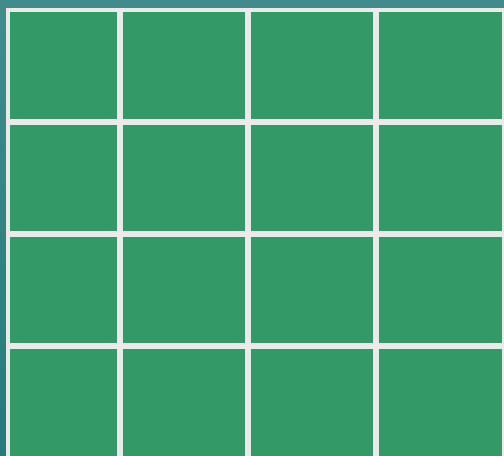
$N(\varepsilon)$

1

1

$\frac{1}{2}$

$4=2^2$



Tamanho

ϵ

Número

$N(\epsilon)$

1

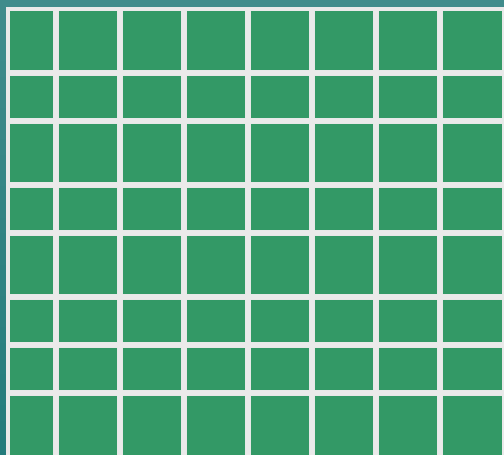
1

$1/2$

$4=2^2$

$1/4$

$16=4*4=4^2$



Tamanho

ϵ

Número

$N(\epsilon)$

1

1

$1/2$

$4=2^2$

$1/4$

$16=4^2$

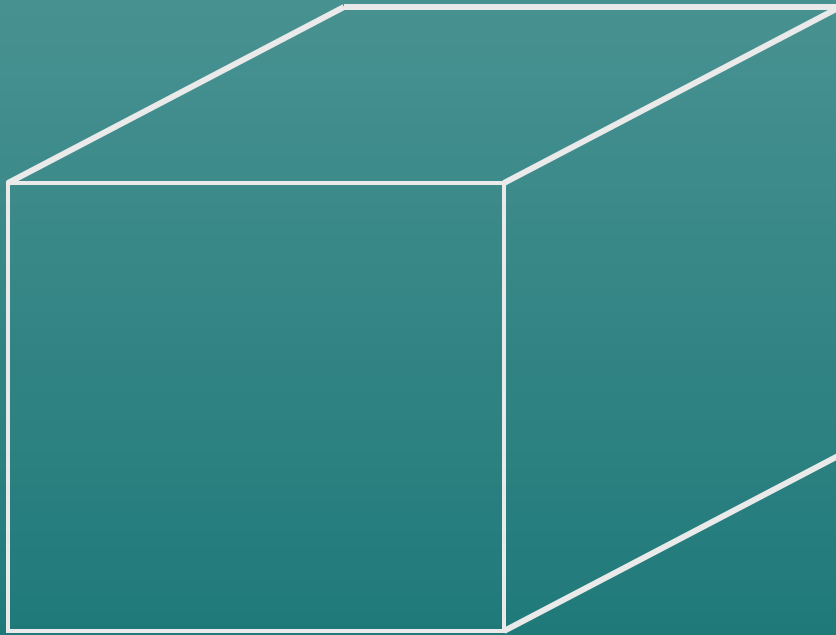
$1/2^k$

$(2^k)^2 = (1/\epsilon)^2$

Dividindo o lado por 2, o número de quadrados multiplica por $4 = 2^2$.

Veja que $N(\epsilon) = (1/\epsilon)^2$.

Cobrimos cubo de lado 1 com cubos menores:



Tamanho

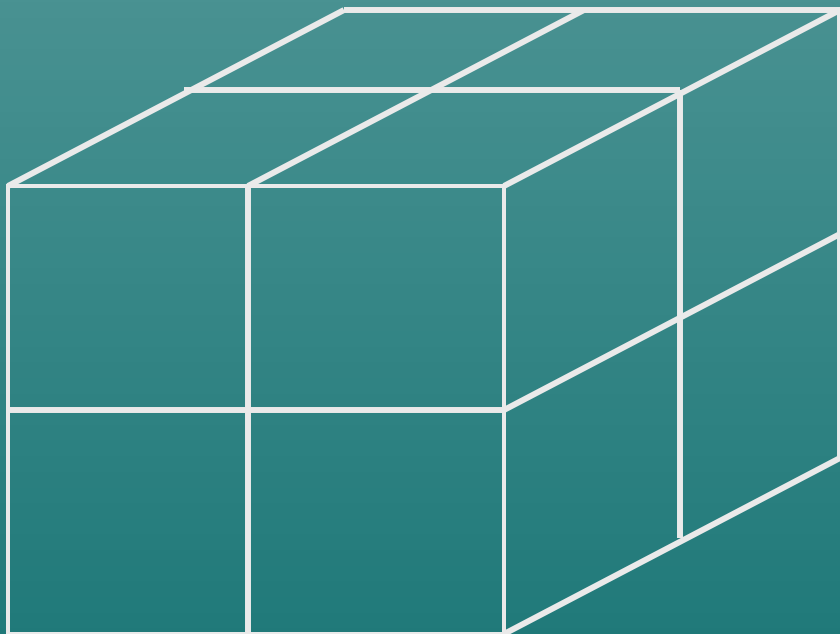
ε

1

Número

$N(\varepsilon)$

1



Tamanho

ε

1

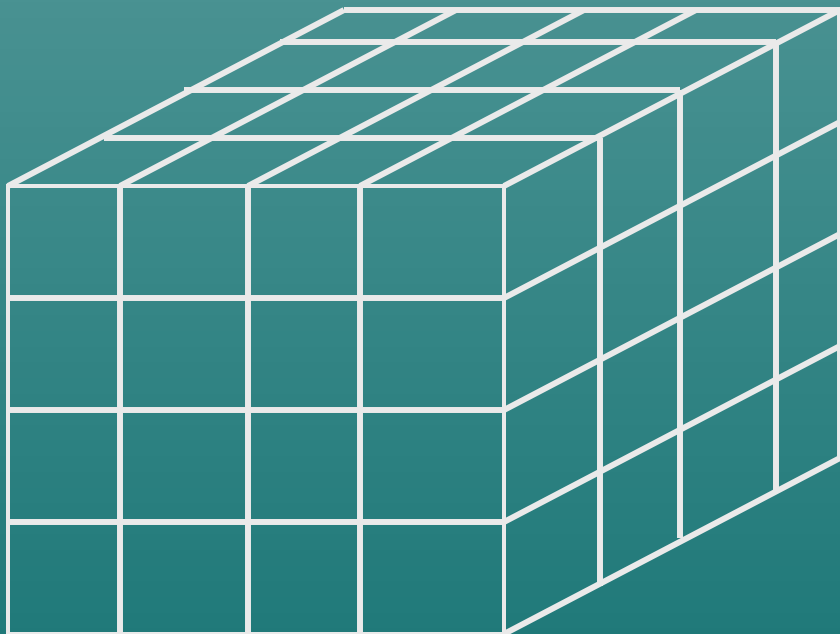
$\frac{1}{2}$

Número

$N(\varepsilon)$

1

$8=2^3$



Tamanho

ε

Número

$N(\varepsilon)$

1

1

$\frac{1}{2}$

$8=2^3$

$\frac{1}{4}$

$64=4^3$

$\frac{1}{2^k}$

$(2^k)^3 = (1/\varepsilon)^3$

Dividindo o lado por 2, o número de cubos multiplica por $8 = 2^3$.

Agora temos que $N(\varepsilon) = (1/\varepsilon)^3$.

Podemos então definir a dimensão de uma figura com base nesse processo:

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^d$$

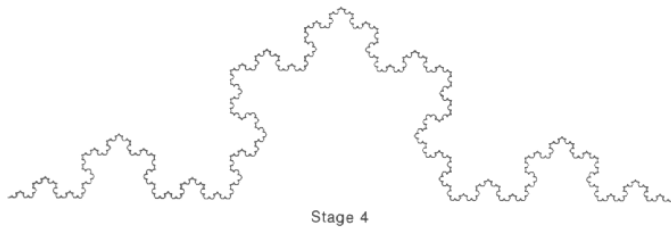
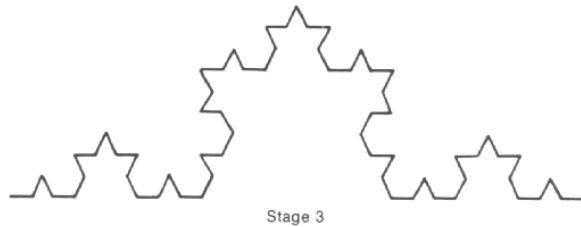
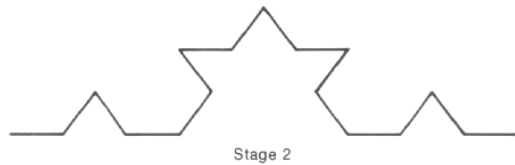
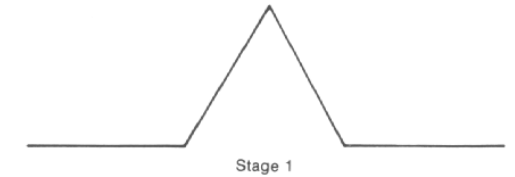
Tomando o logaritmo dos dois lados podemos isolar d:

$$\log[N(\varepsilon)] = \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d = d \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

e

$$d = \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log[1/\varepsilon]}$$

Dimensão da Curva de Koch:



Adapted from Benoit Mandelbrot, *Fractals*.

Tamanho
 ϵ

Número
 $N(\epsilon)$

1

1

$1/3$

4

$1/9$

$16=4^2$

$1/27$

$64=4^3$

$1/3^k$

4^k

$$d = \frac{\log[N(\epsilon)]}{\log[1/\epsilon]} = \frac{\log 4^k}{\log 3^k} = \frac{k \log 4}{k \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26185....$$

Exercício: calcular a dimensão da esponja de Menger.

Resultado: $d = \frac{\log 20}{\log 3} = 2.7268....$

A esponja tem volume zero, pois $d < 3$, mas tem superfície infinita, pois $d > 2$.

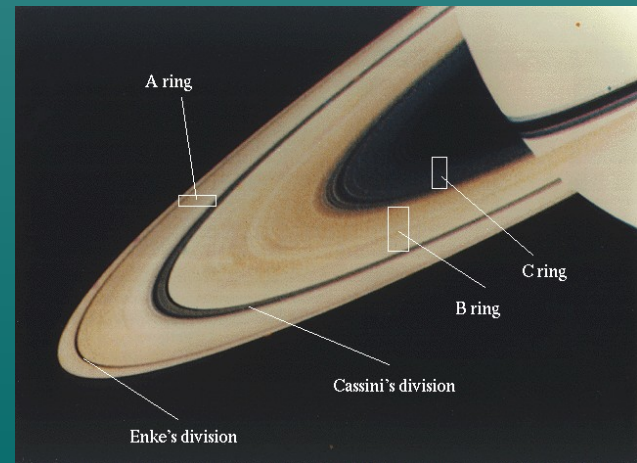
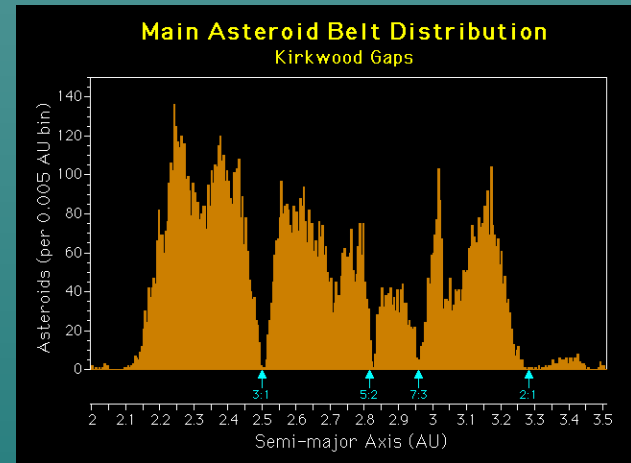
Quando colocada em um copo com água o nível da água não muda.

Mas se você quiser pintar a esponja, você precisa de uma quantidade infinita de tinta!

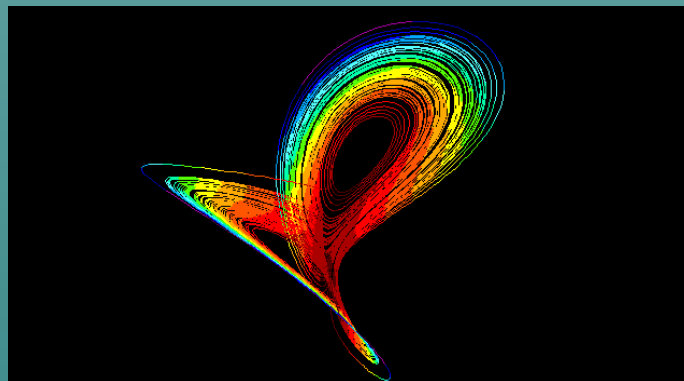
Exemplos de Sistemas com Movimento Caótico

Problemas de três corpos

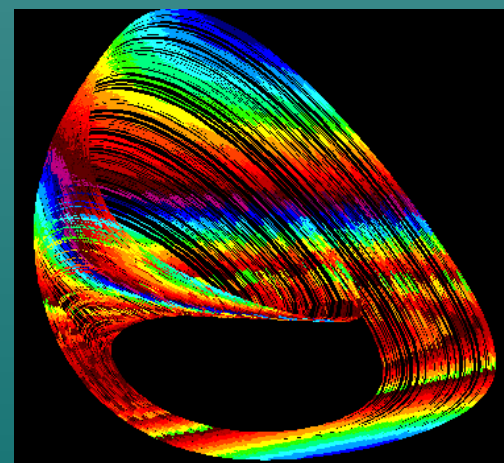
- ◆ Cinturão de asteróides entre Marte e Júpiter
- ◆ Anéis de Saturno



Meteorologia: o atrator de Lorenz



Ecologia: modelos predador-presa com 3 espécies



OUTROS EXEMPLOS:

Pêndulo duplo com hastes rígidas ou com molas

Osciladores acoplados não-lineares (redes atômicas)

Movimento de partículas em redes cristalinas

Movimento de elétrons em algumas estruturas mesoscópicas

Fluidos turbulentos

Conclusões

- ◆ **Caos = sensibilidade a condições iniciais** (efeito borboleta). Apesar do determinismo das equações de movimento nosso poder de previsão é limitado.
- ◆ **Esticar e Dobrar** é o mecanismo dinâmico que produz caos (dinâmica do padeiro).
- ◆ **Onde há caos há fractais.**

BIBLIOGRAFIA

◆ Nível introdutório:

- *Caos – fazendo uma nova ciência* – James Gleick
- *Acaso e caos* – David Ruelle

◆ Nível intermediário:

- *Caos – uma introdução* – N. Fiedler-Ferrara e C.P.C. de Prado
- *Chaos in dynamical systems* - Edward Ott

◆ Nível avançado:

- *An introduction to chaotic dynamical systems* – R.L. Devaney