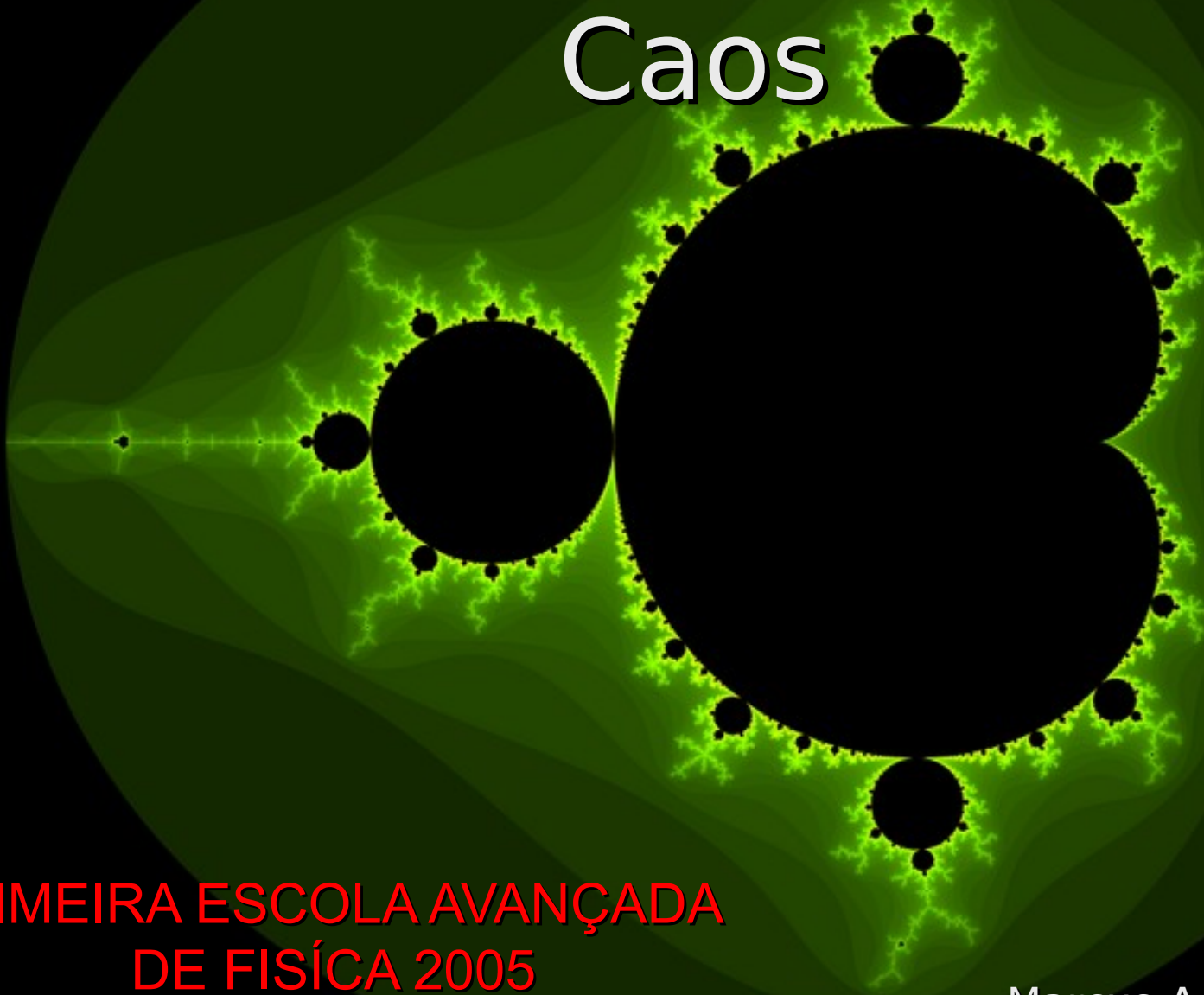


Introdução à Teoria do Caos



PRIMEIRA ESCOLA AVANÇADA
DE FÍSICA 2005

Marcus A.M. de Aguiar

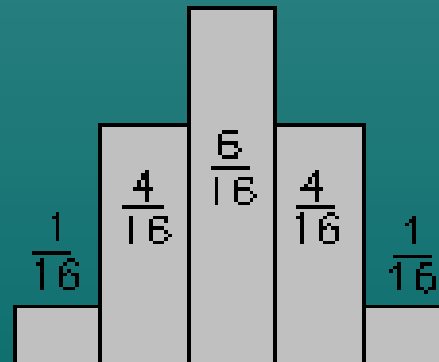
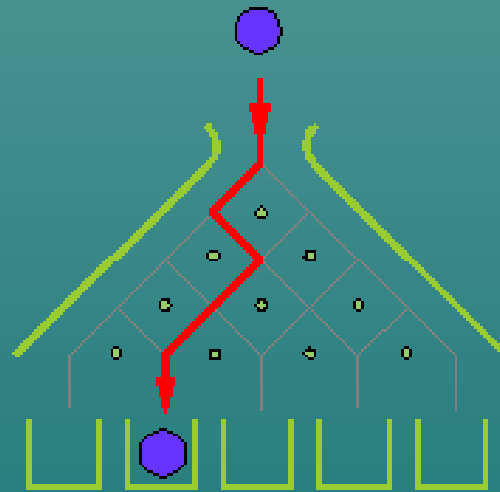
Sumário

- ◆ 1 – O que é Caos?
- ◆ 2 – O mapa logístico
- ◆ 3 – Caos e Fractais

Sistemas Previsíveis e Não-Previsíveis

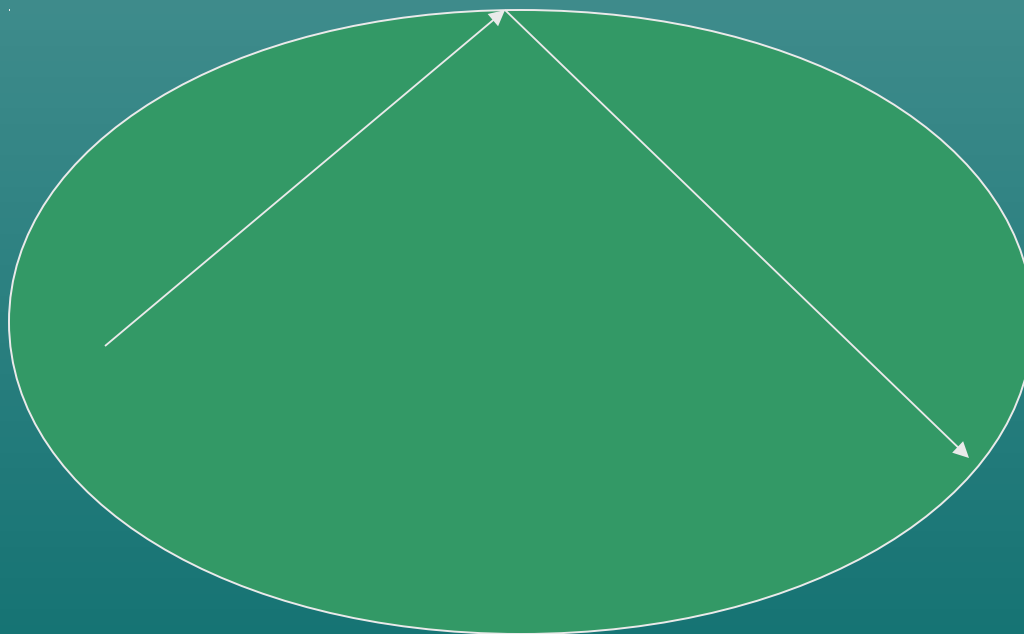
- ◆ Calendário (anos bissextos, eclipses)
- ◆ Pêndulos (relógio)
- ◆ Sistema massa-mola
- ◆ Clima
- ◆ Fluidos turbulentos
- ◆ Mesa de pregos
- ◆ Mesa de bilhar

A Mesa de Pregos: Caos e Determinismo



relative frequency
distribution

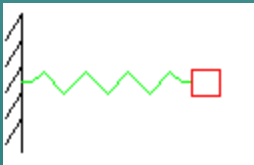
A Mesa de Bilhar



- ◆ **As equações de Newton, que regem a mecânica, são determinísticas:**
dadas as forças agindo sobre um sistema de partículas e as condições iniciais devemos ser capazes de determinar o movimento do sistema.
- ◆ Se jogamos as bolinas (aproximadamente) do mesmo modo, porque elas não caem (aproximadamente) no mesmo lugar?
- ◆ Condições iniciais muito parecidas podem provocar efeitos dinâmicos muito diferentes!
- ◆ Surpresa: sistemas muito simples podem ter comportamentos complexos, onde pequenas diferenças iniciais são amplificadas, levando a um comportamento aleatório.

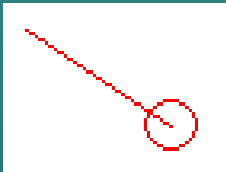
Sistemas Regulares X Sistemas Caóticos

1)



Sistema massa-mola

2)



Pêndulo simples

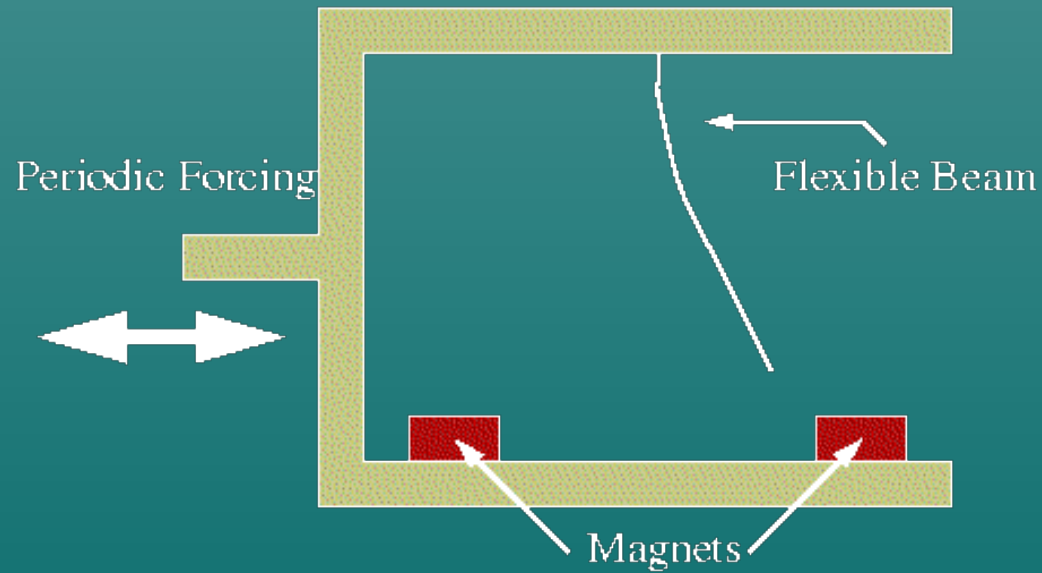
3)

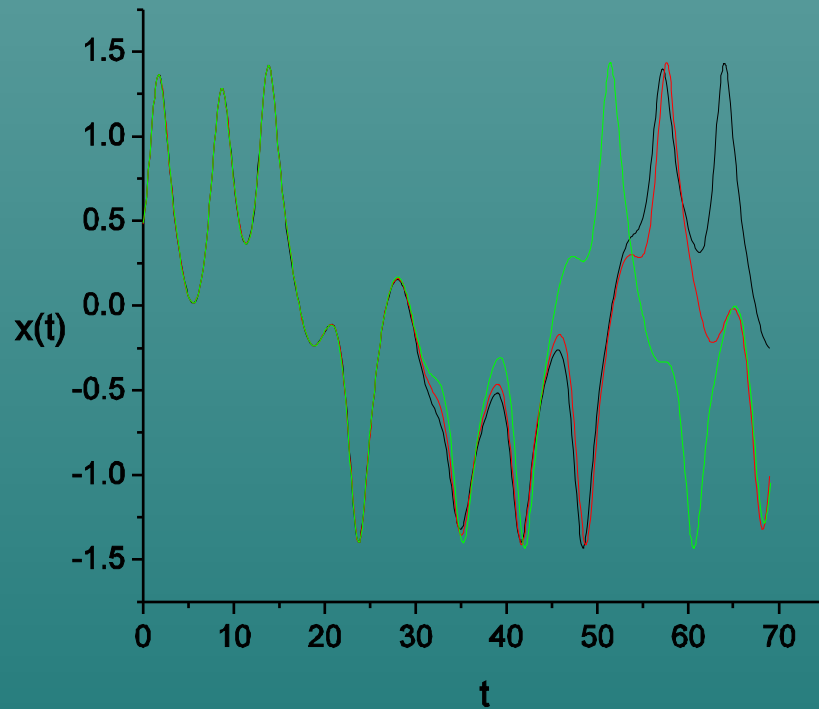
Sistema Terra-Sol

4)

O pendulo duplo com molas

O oscilador de Duffing





Preto: $x(0)=0.480$ $v(0)=0.355$
Vermelho: $x(0)=0.481$ $v(0)=0.355$
Verde: $x(0)=0.482$ $v(0)=0.355$

O movimento é tão complicado que torna-se imprevisível!

CAOS = sensibilidade à condições iniciais
=
imprevisibilidade

RESUMO

- ◆ Caos = sensibilidade às condições iniciais
- ◆ Condições iniciais muito próximas separam-se exponencialmente rápido: (efeito borboleta)
- ◆ Existe um tempo característico dentro do qual previsões são possíveis. Além desse tempo o sistema torna-se imprevisível.

Perguntas:

- ◆ Porque alguns sistemas determinísticos se comportam de forma simples e outros de forma quase aleatória (caótica)?
- ◆ Qual o mecanismo responsável pelo aparecimento de dinâmica caótica?
- ◆ Quais as implicações do movimento caótico?
- ◆ Quão raros ou freqüentes são sistemas caóticos?

Sistema dinâmicos

Sistemas físicos como o oscilador de Duffing ou o sistema Sol-Terra-Lua são complicados do ponto de vista matemático.

Vamos considerar aqui apenas sistemas dinâmicos simples, que servirão como modelos para o estudo de sistemas realistas.

Exemplo 1:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} \quad x_n \geq 0$$

$$x_0 = 49.0$$

$$x_1 = 7.0$$

$$x_2 = 2.646\dots$$

$$x_3 = 1.627\dots$$

$$x_4 = 1.275\dots$$

$$x_5 = 1.129\dots$$

$$x_6 = 1.063\dots$$

$$x_7 = 1.031\dots$$

$$x_0 = 0.030$$

$$x_1 = 0.173\dots$$

$$x_2 = 0.416\dots$$

$$x_3 = 0.645\dots$$

$$x_4 = 0.803\dots$$

$$x_5 = 0.896\dots$$

$$x_6 = 0.947\dots$$

$$x_7 = 0.973\dots$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 1$$

$$x_5 = 1$$

$$x_6 = 1$$

$$x_7 = 1$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

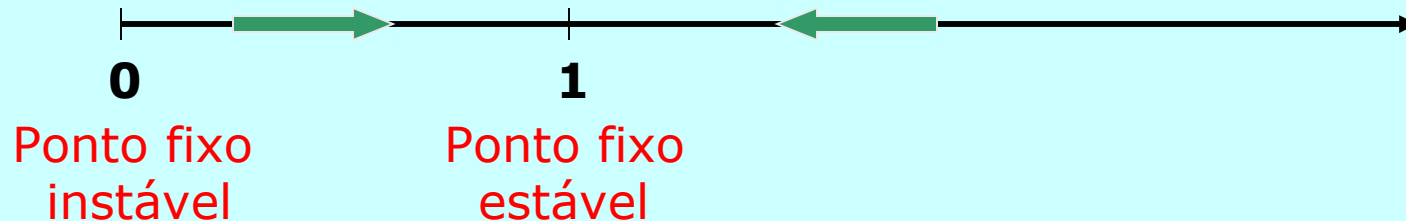
$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 0$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = 0$$



Exemplo 2:

$$x_{n+1} = x_n^2 \quad x_n \geq 0$$

$x_0 = 2.0$

$x_1 = 4.0$

$x_2 = 16$

$x_3 = 256$

$x_4 = 65536$

$x_5 = 4294967296$

$x_0 = 0.8$

$x_1 = 0.64$

$x_2 = 0.4096$

$x_3 = 0.1677...$

$x_4 = 0.0281...$

$x_5 = 0.0008...$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1$

$x_4 = 1$

$x_5 = 1$

$x_0 = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

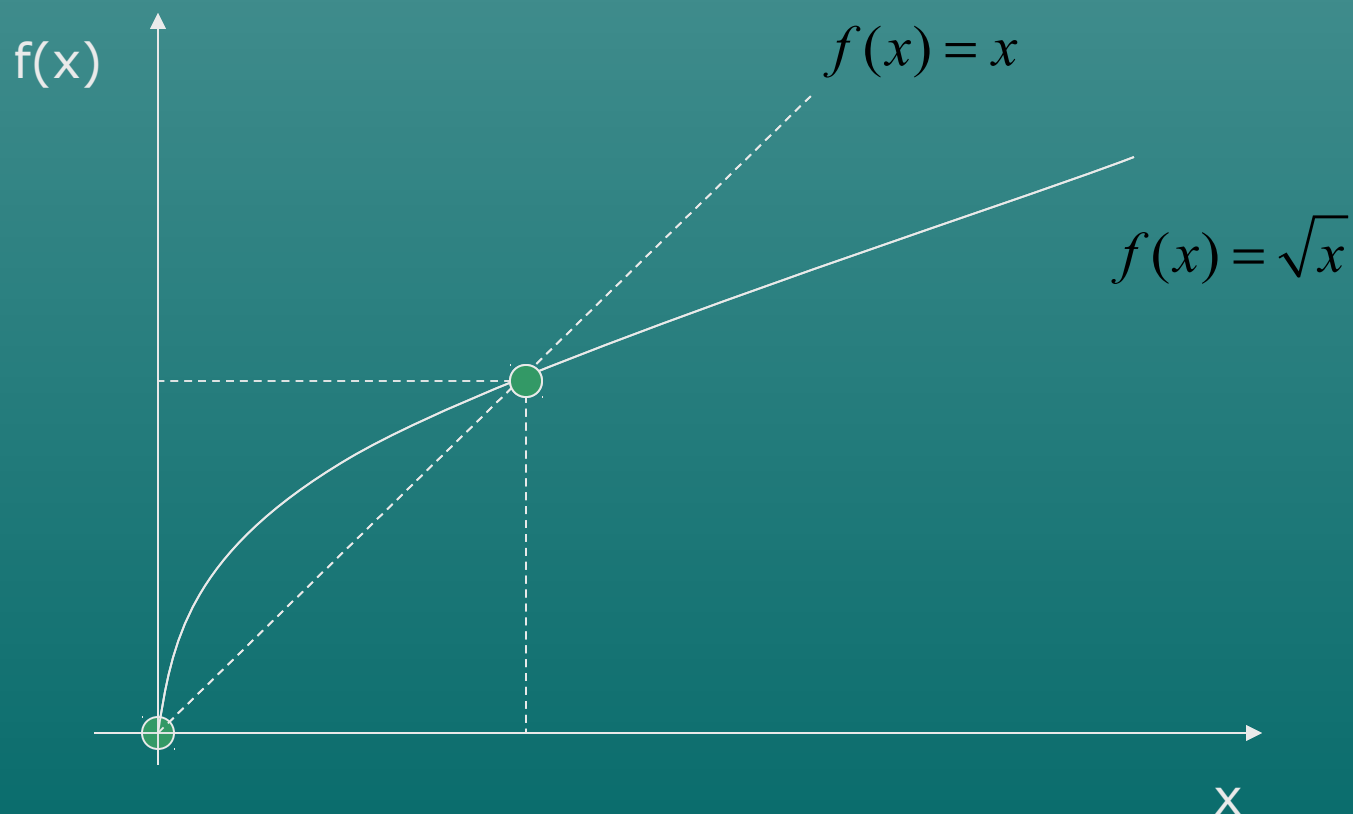
$x_4 = 0$

$x_5 = 0$

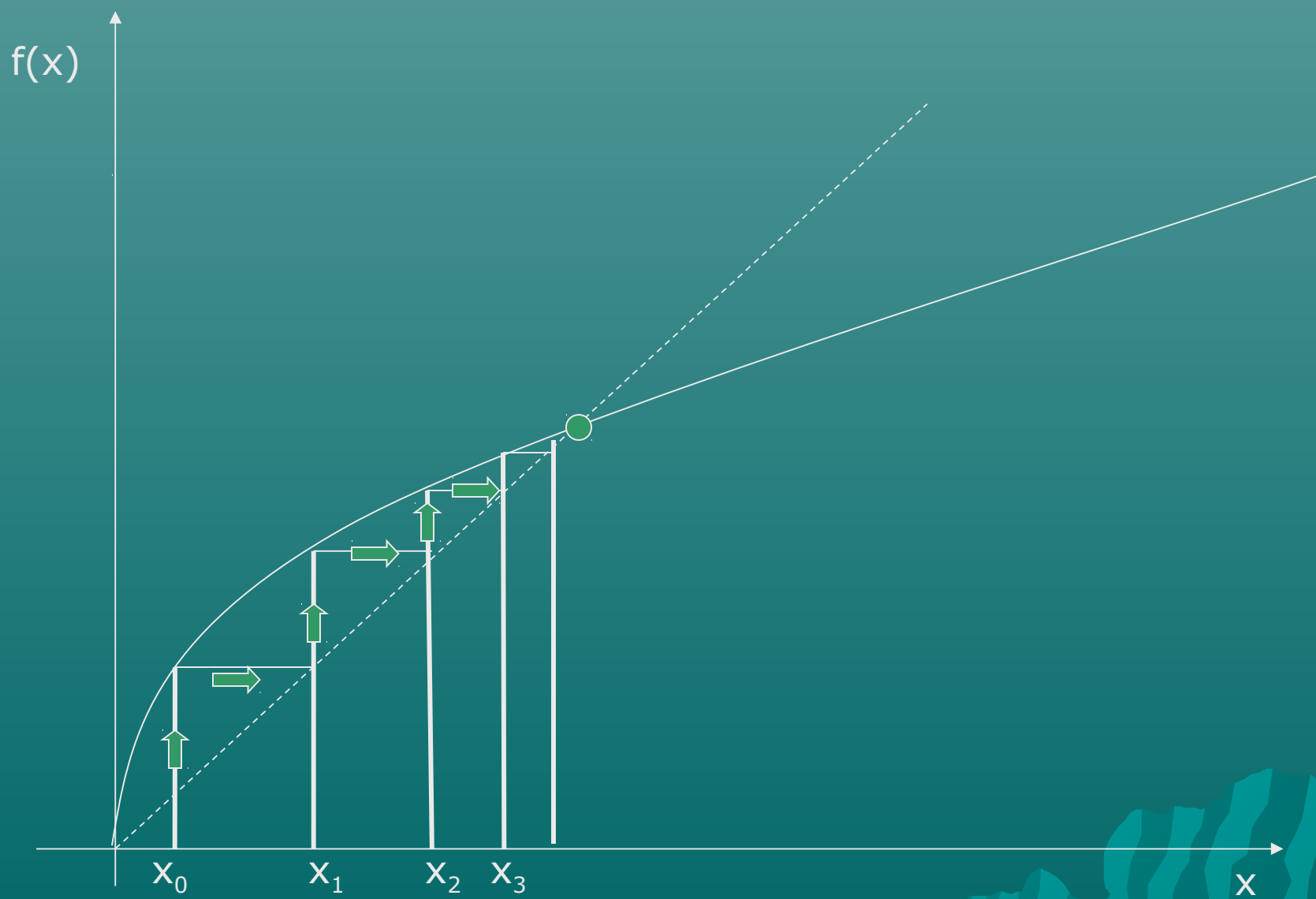


Pontos fixos são como pontos de equilíbrio. No caso do primeiro exemplo podemos encontrá-los da seguinte forma:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} = x_n$$



Dinâmica



Exemplo 3: o mapa logístico

Motivação:

Seja X_n a população de uma determinada espécie na geração n .

A cada geração uma parte da população morre e filhotes nascem.
O numero de indivíduos na geração seguinte deve ser aproximadamente
Proporcional ao numero de indivíduos na geração anterior:

$X_{n+1} = \mu X_n$ onde o parâmetro $\mu > 1$ mede a taxa de crescimento

Se a população fica muito grande pode faltar comida. Então a taxa de crescimento não pode ser constante. Substituímos μ por

$$\mu(1 - X_n/X_c)$$

onde X_c é o maior numero de indivíduos que pode sobreviver com os recursos existentes.

Veja que

$$\mu(1 - X_n / X_c) \approx \begin{cases} \mu & \text{se } X_n \ll X_c \\ 0 & \text{se } X_n \approx X_c \end{cases}$$

Então a equação que descreve a população fica:

$$X_{n+1} = \mu X_n (1 - X_n / X_c)$$

Dividindo os dois lados por X_c e definindo uma nova variável $x_n = X_n / X_c$

$$\frac{X_{n+1}}{X_c} = \mu \frac{X_n}{X_c} \left(1 - \frac{X_n}{X_c}\right)$$

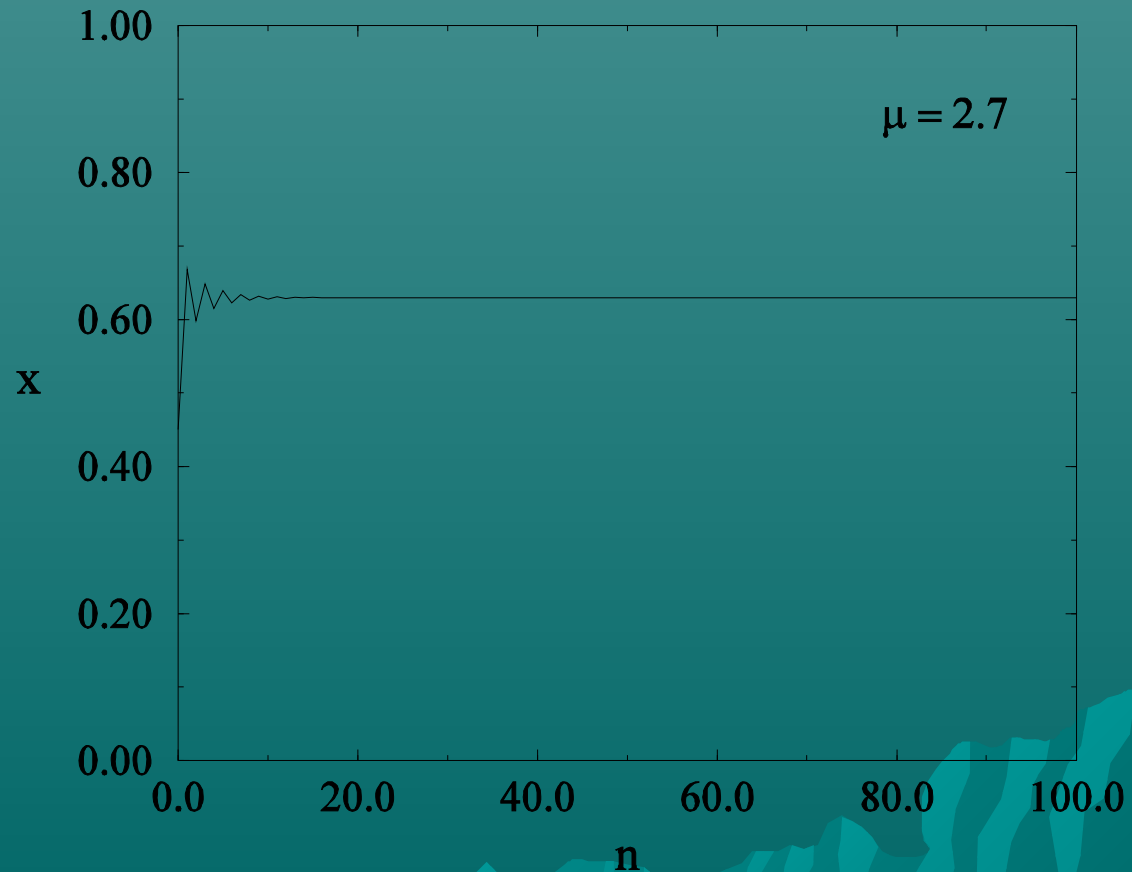
$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

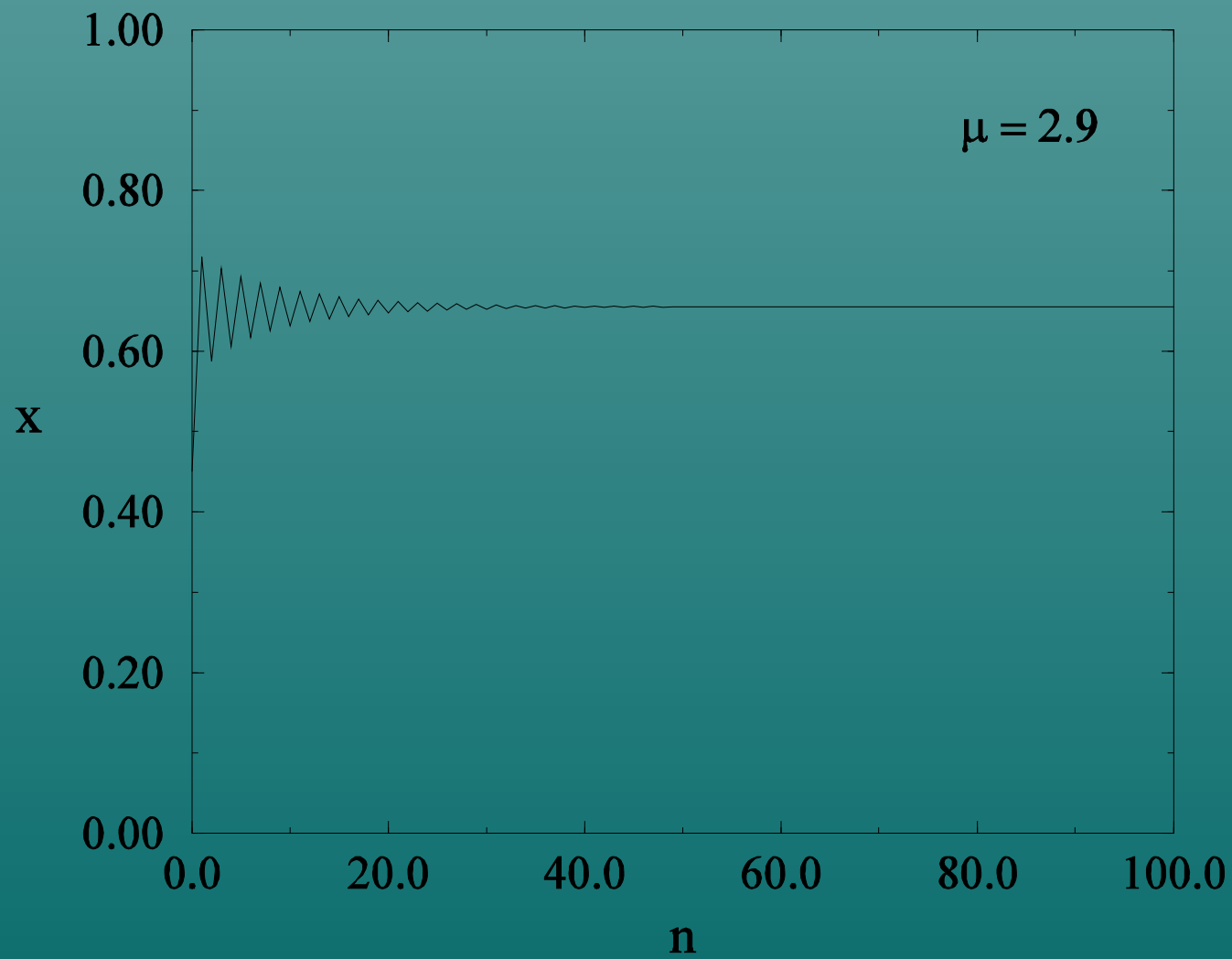
$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad 0 \leq x_n \leq 1 \quad \mu = 2.7$$

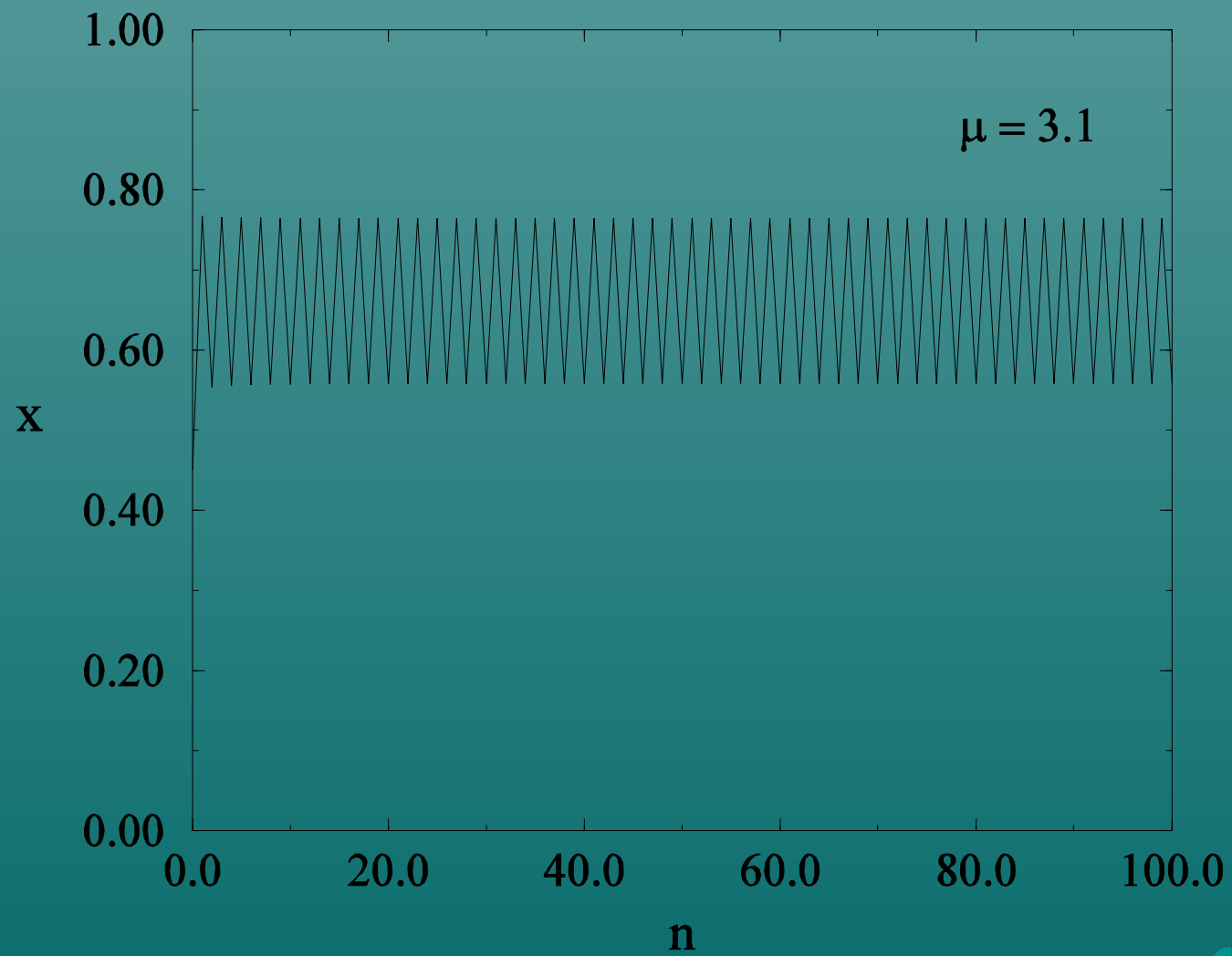
Pontos fixos: $x_{n+1} = x_n$

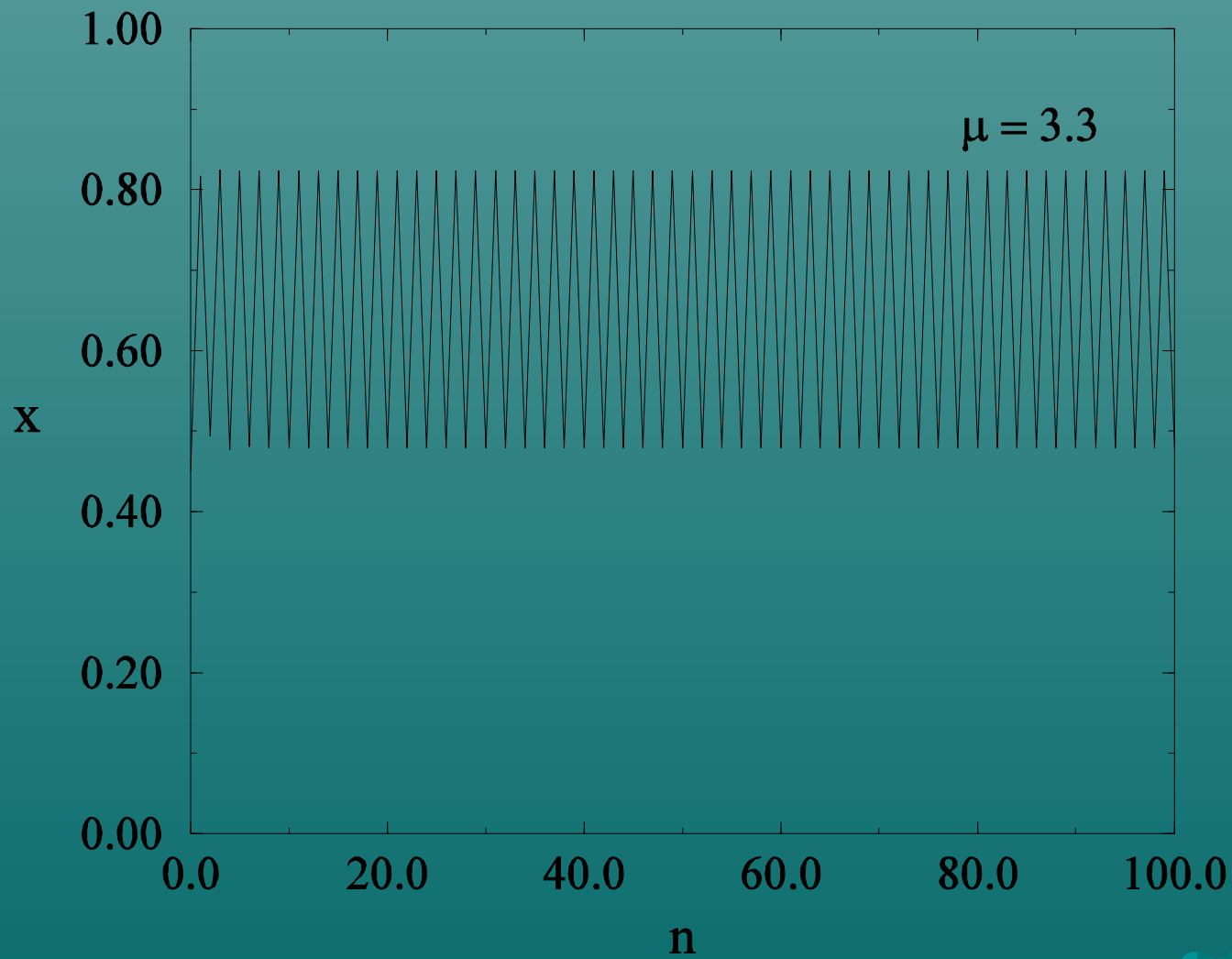
Soluções: $x=0$ e $x = (\mu-1)/\mu = 0.629...$

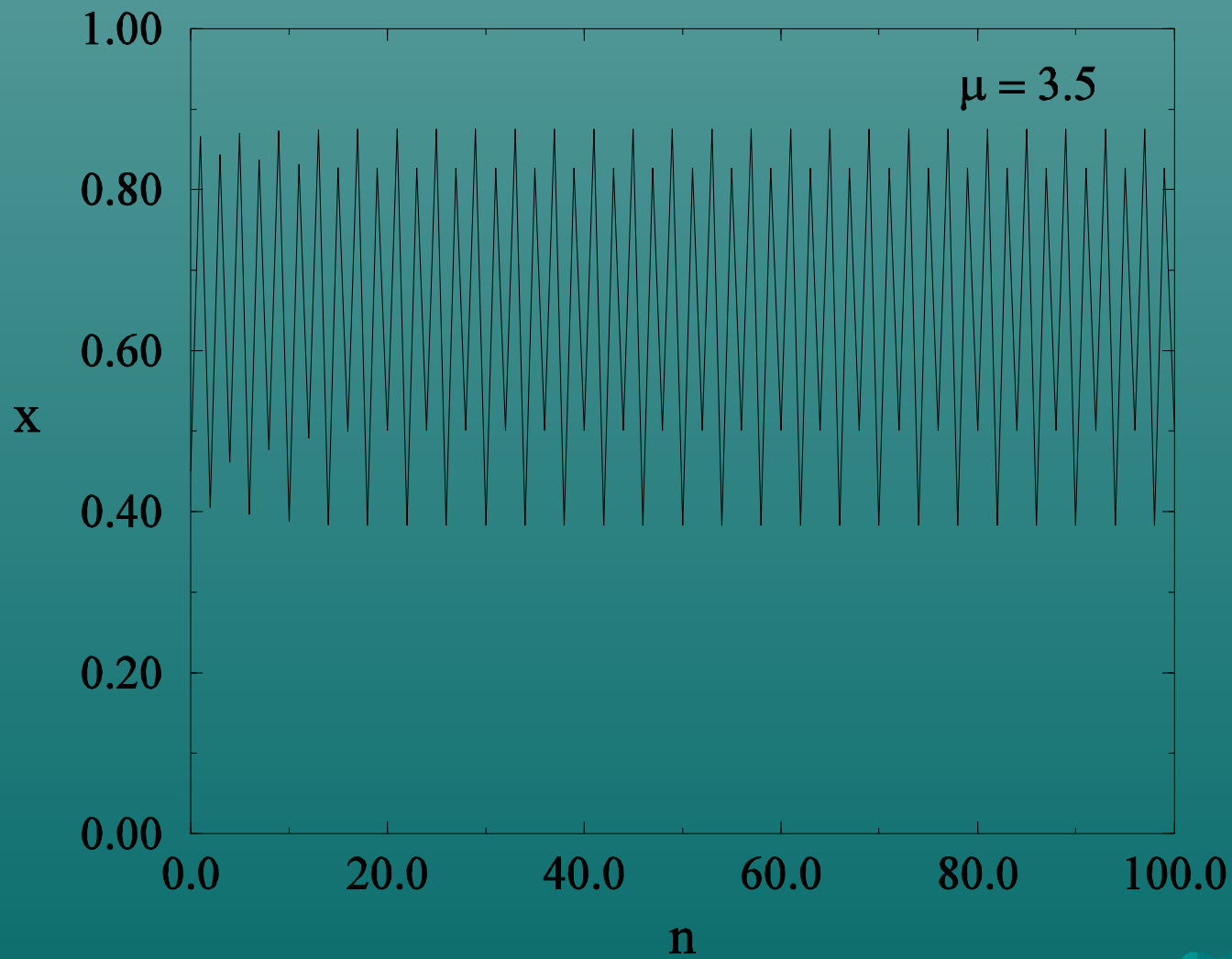
$x_0 = 0.5$
 $x_1 = 0.675$
 $x_2 = 0.597...$
 $x_3 = 0.650...$
 $x_4 = 0.615...$
 $x_5 = 0.640...$
 $x_6 = 0.622...$
 $x_7 = 0.634...$

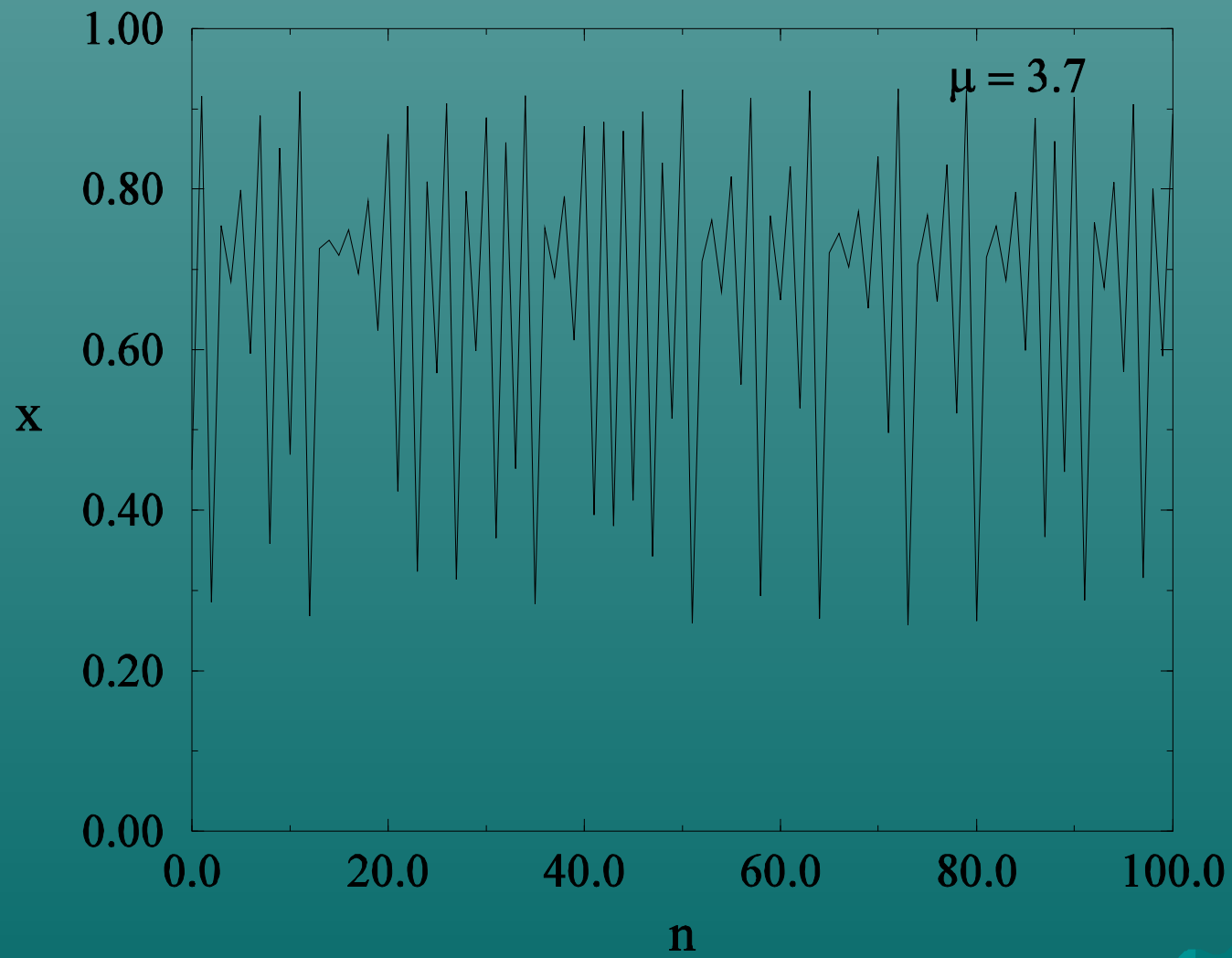


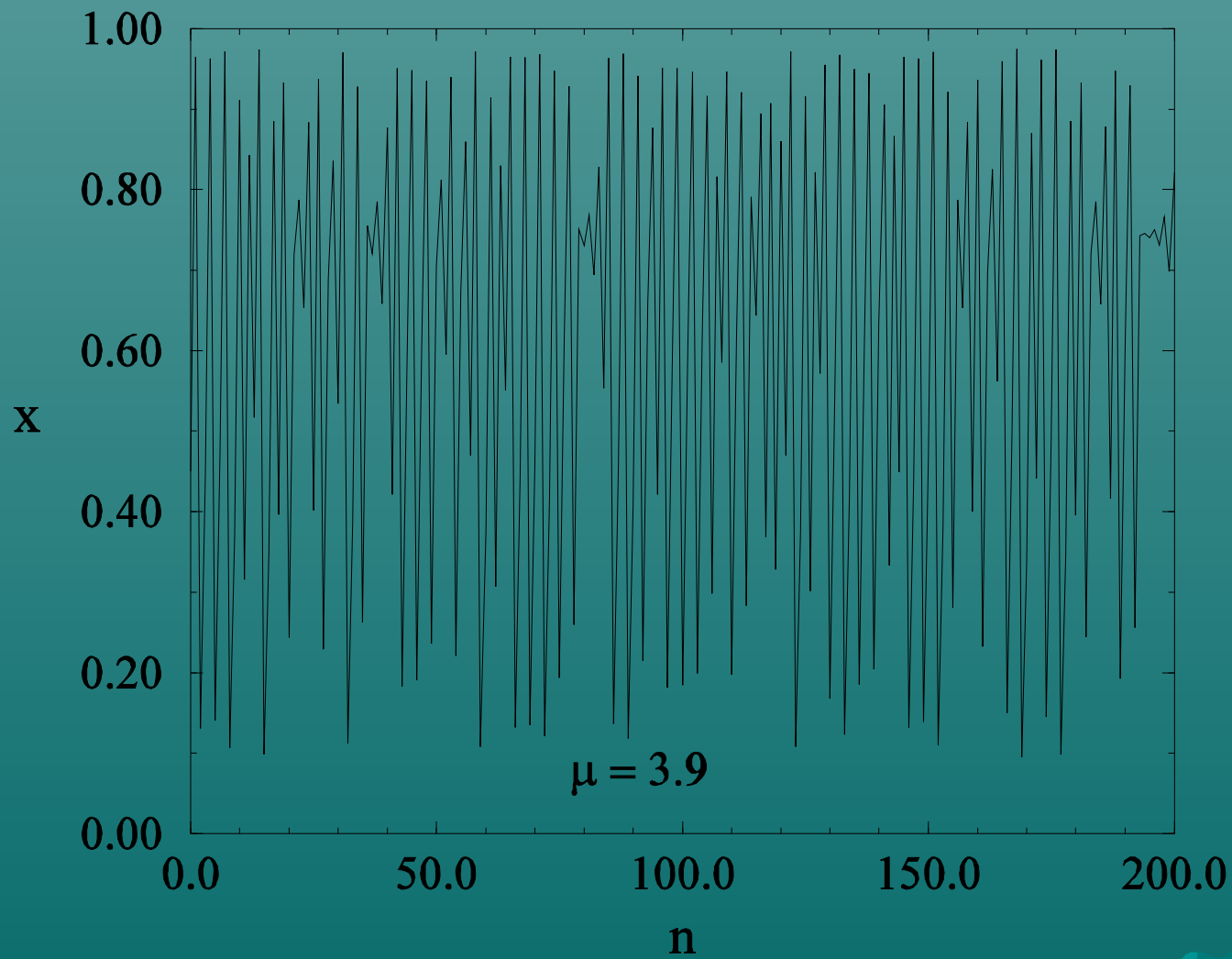




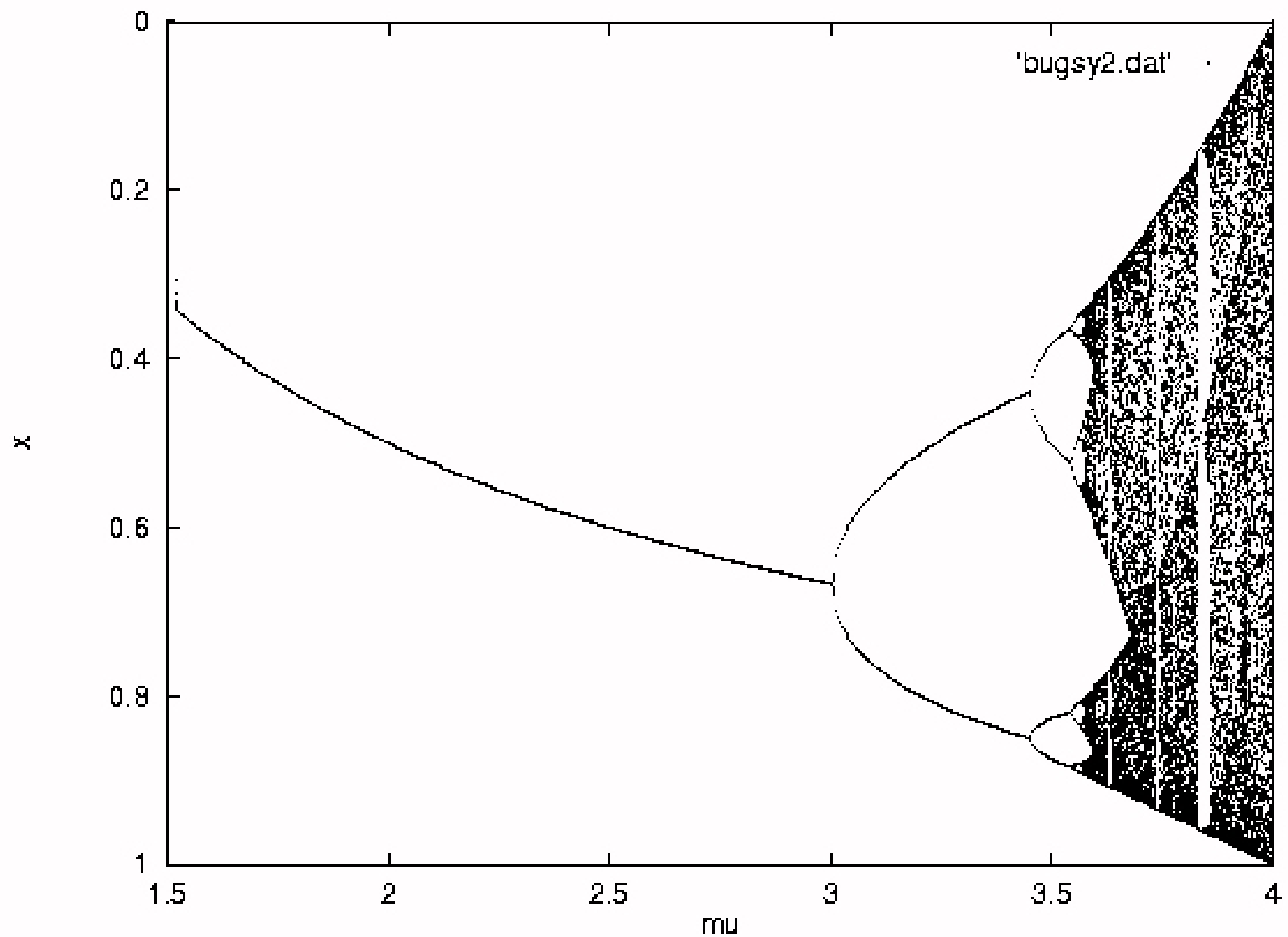




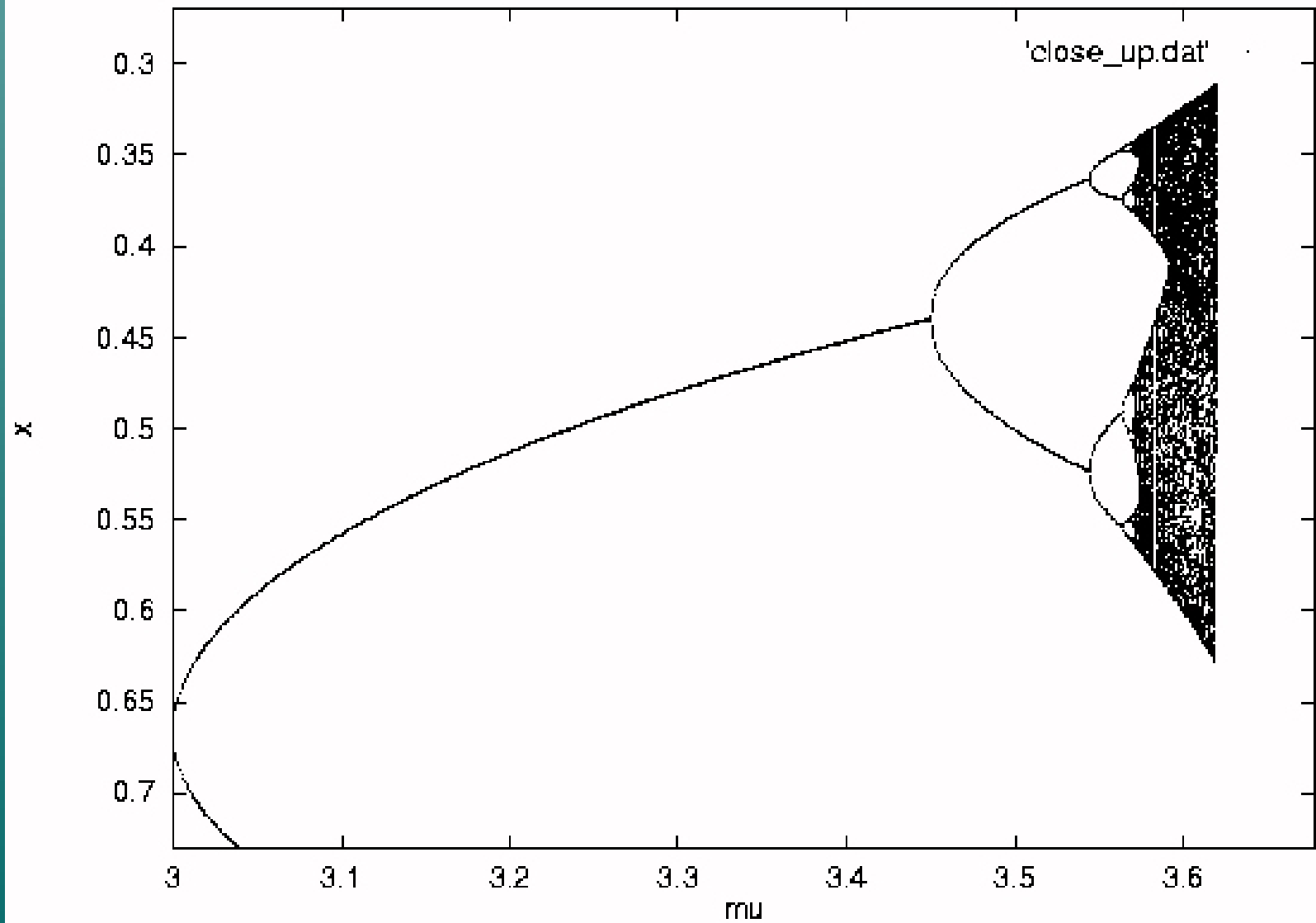




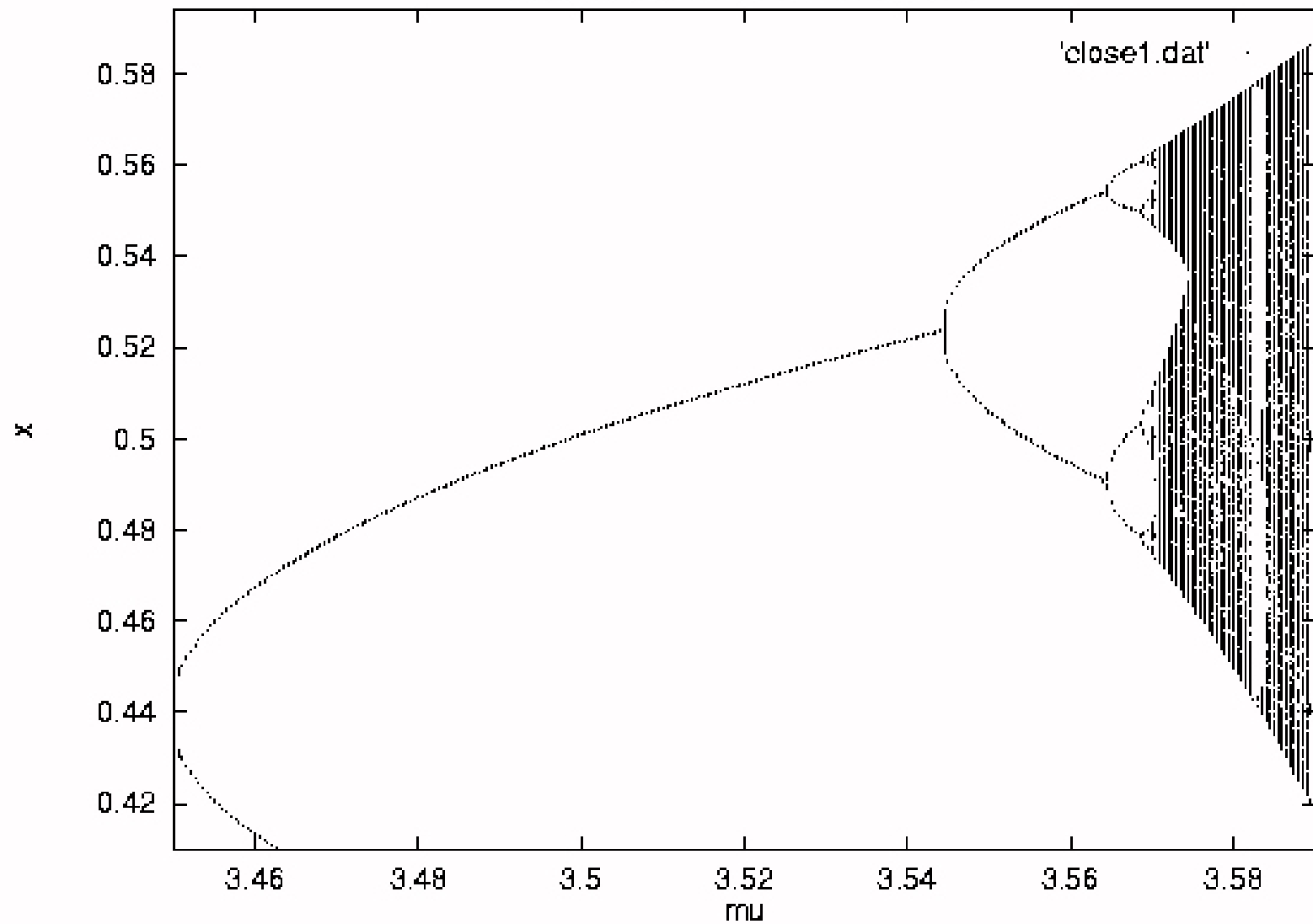
Rota para o caos por duplicação de período



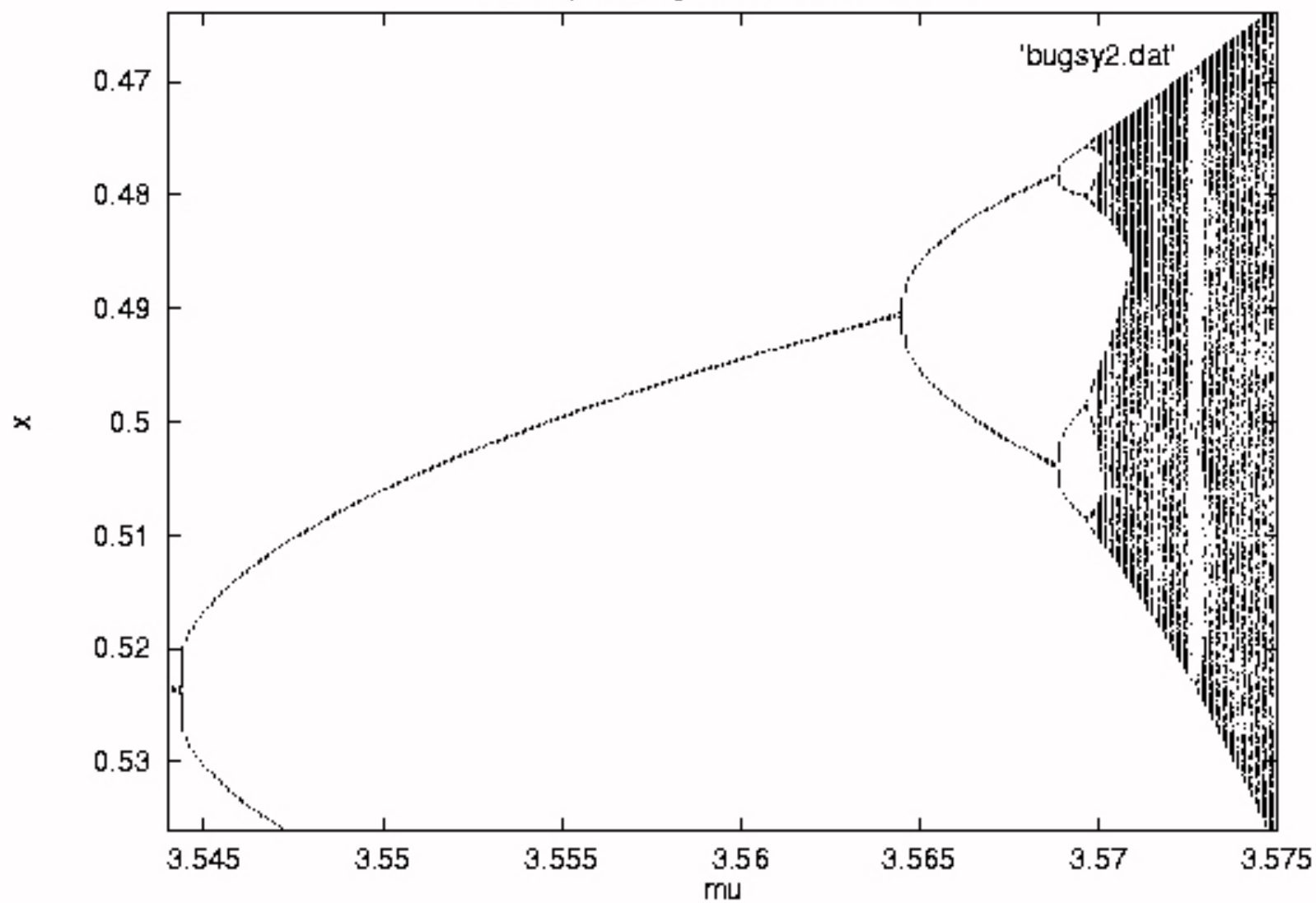
Closeup of range: $\mu = 3.0 - 3.678$

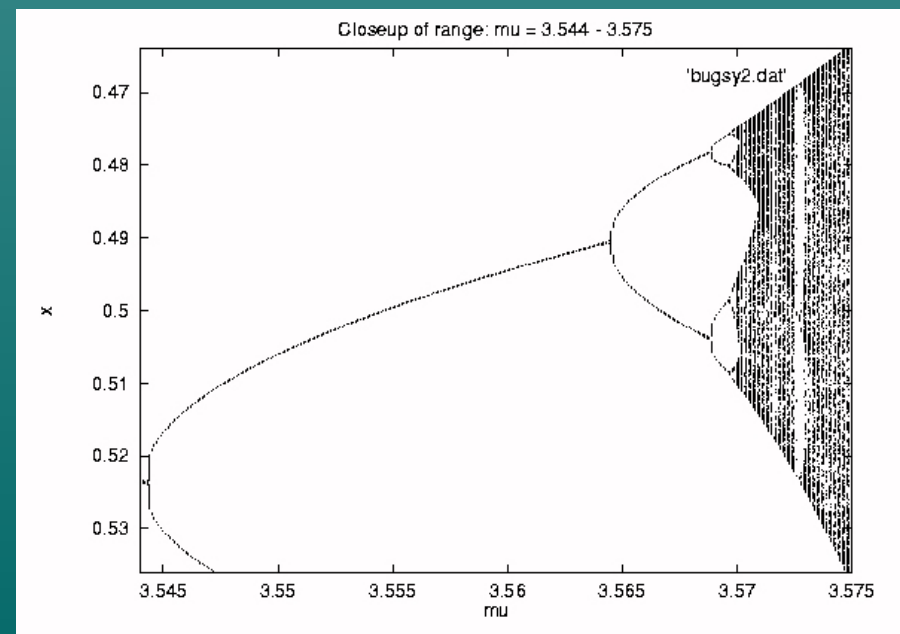
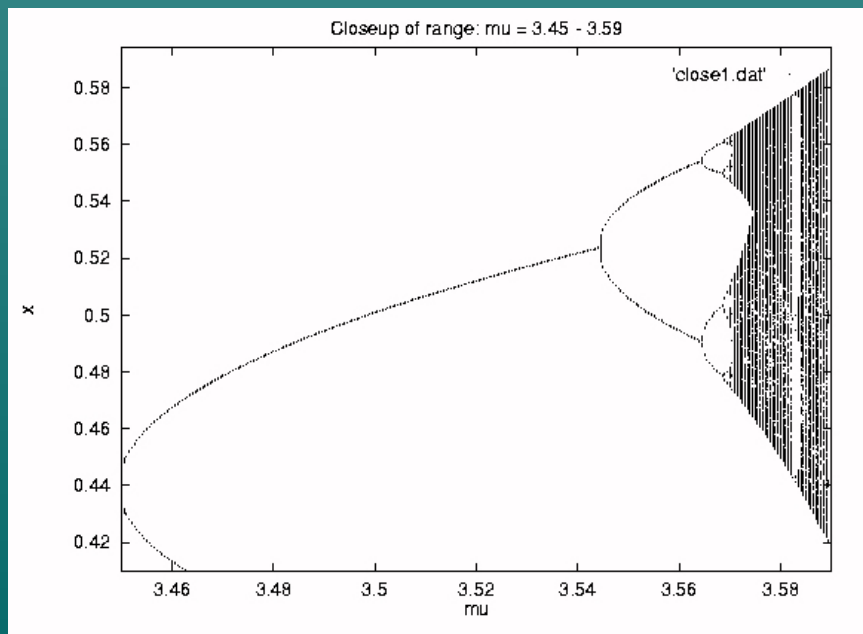
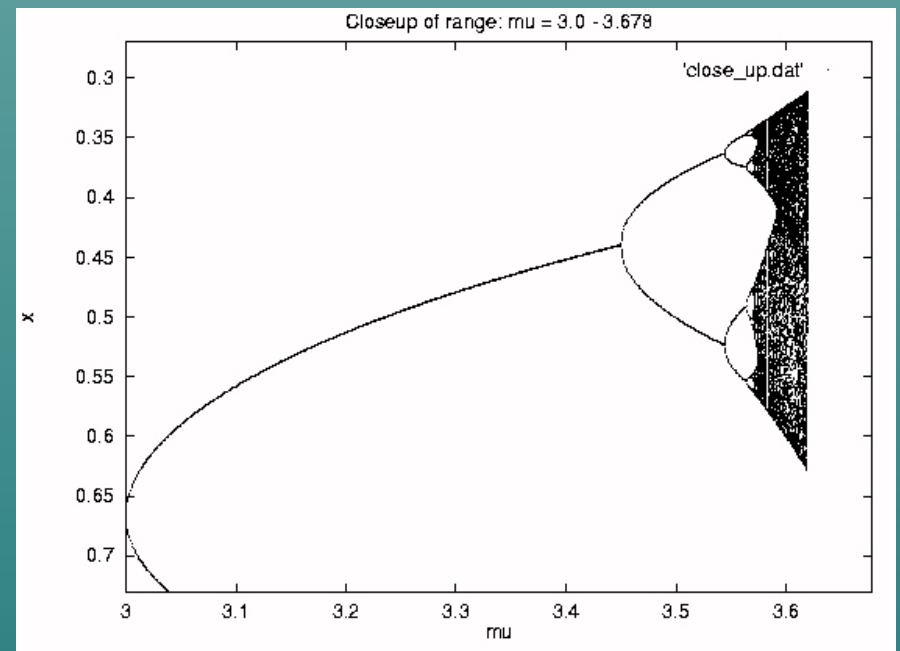
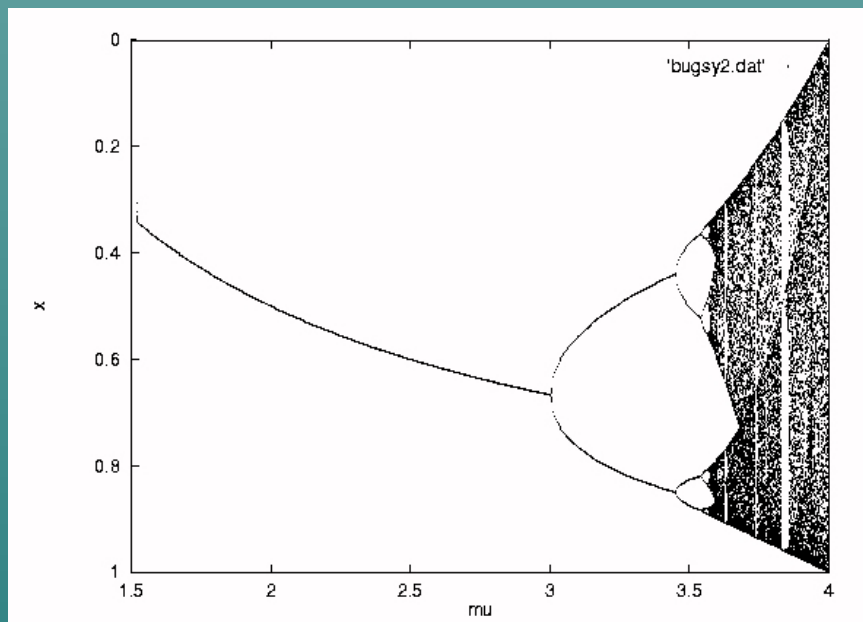


Closeup of range: $\mu = 3.45 - 3.59$



Closeup of range: $\mu = 3.544 - 3.575$





Dinâmica Auto-Similar !

Ordem no Caos!

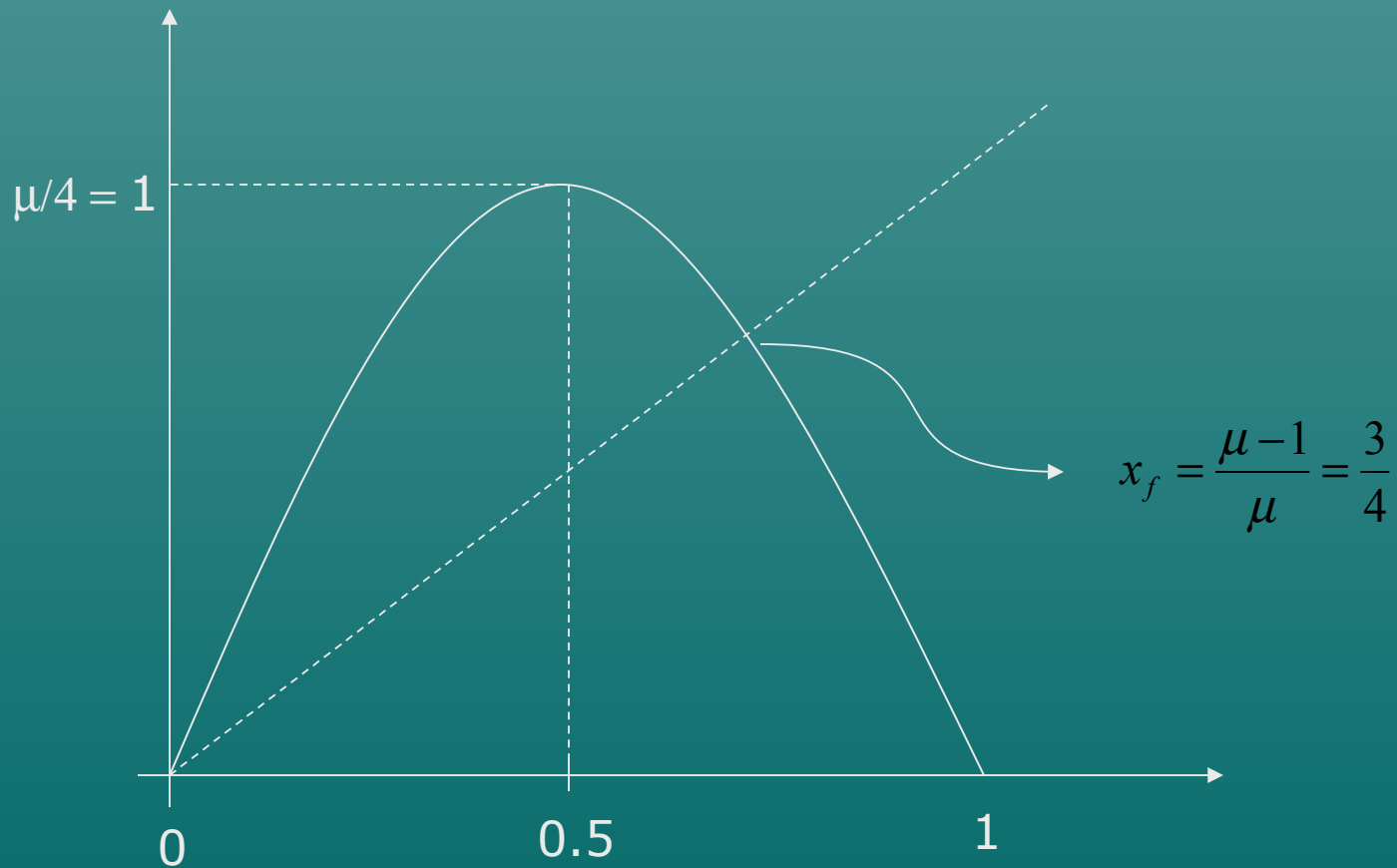


**Qual o mecanismo que leva ao
caos?**

**Para responder essa pergunta
vamos fazer uma análise
geométrica do problema.**

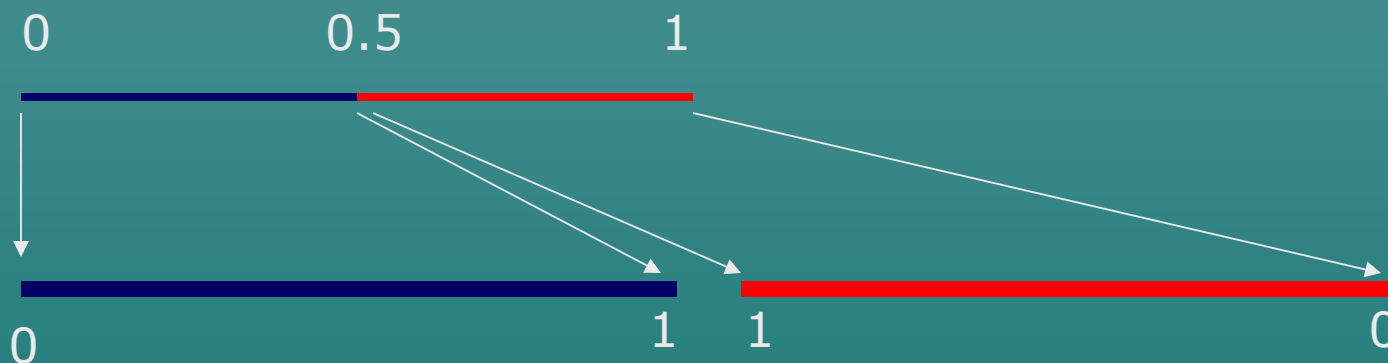
$$\mu = 4$$

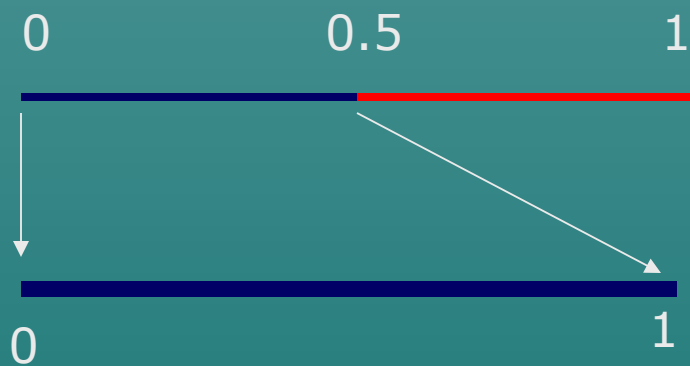
$$f(x) = 4x(1-x) \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

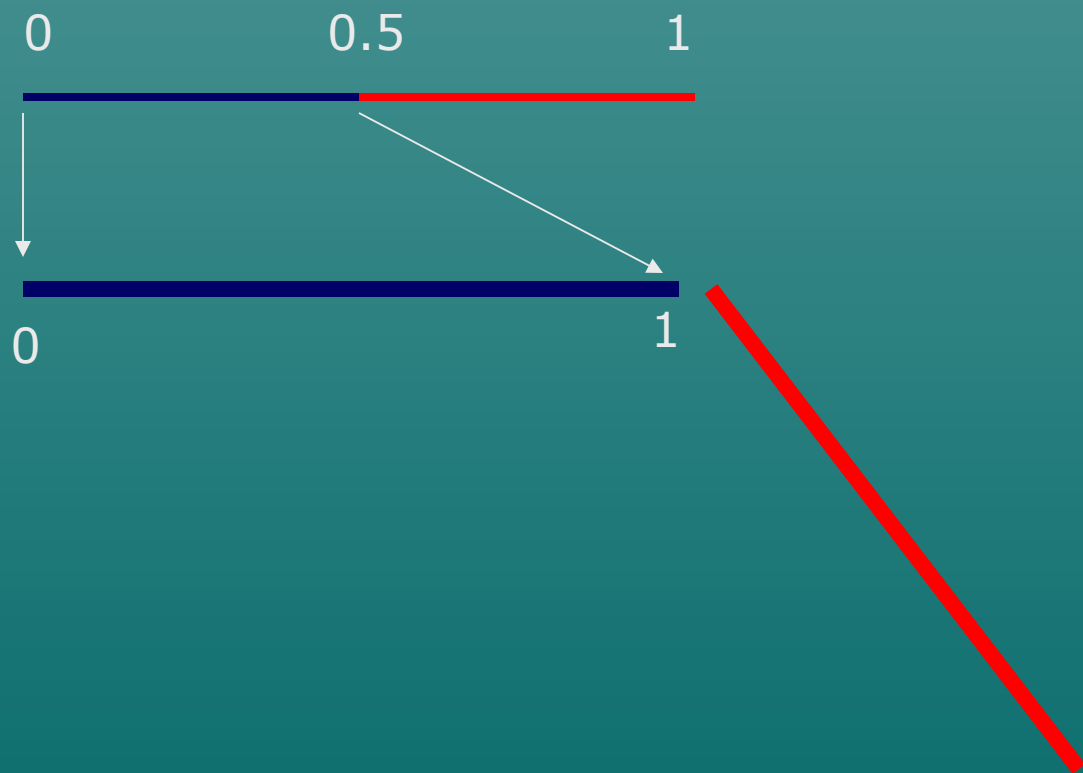


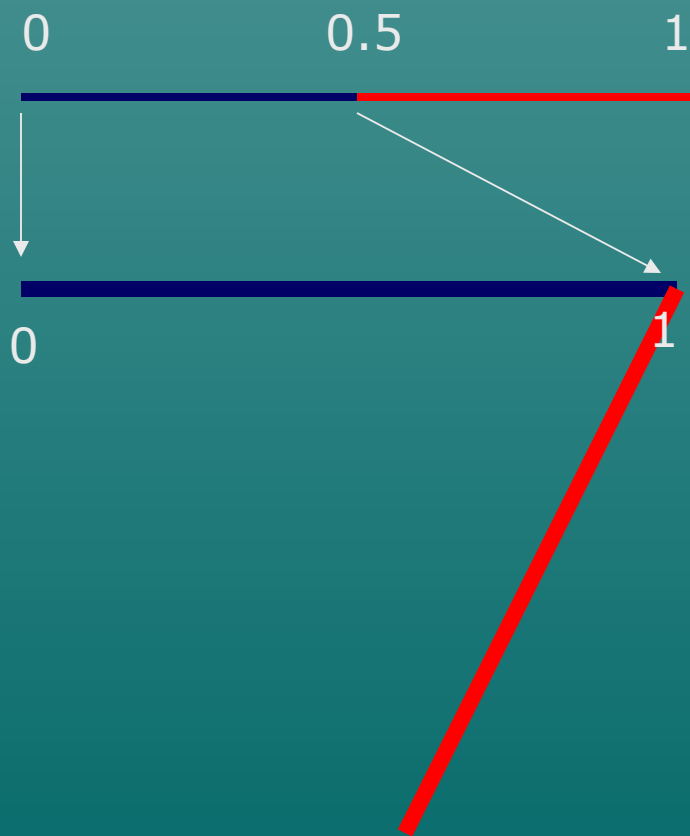
1 – O intervalo $[0, 0.5]$ é levado pelo mapa no intervalo $[0,1]$

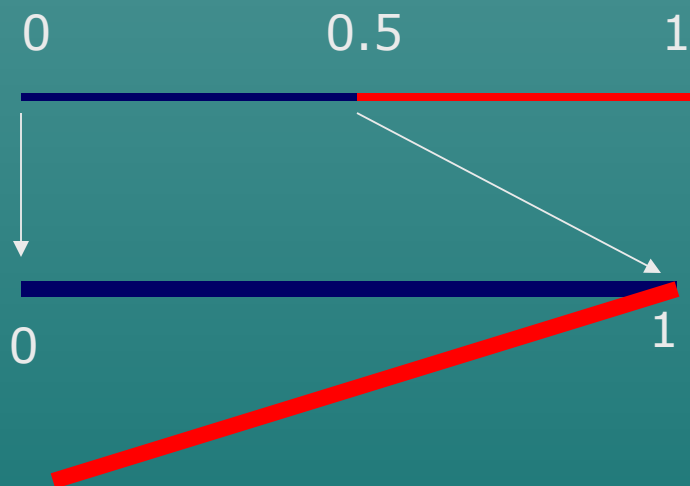
2 – O intervalo $[0.5, 1]$ é levado pelo mapa no intervalo $[1,0]$

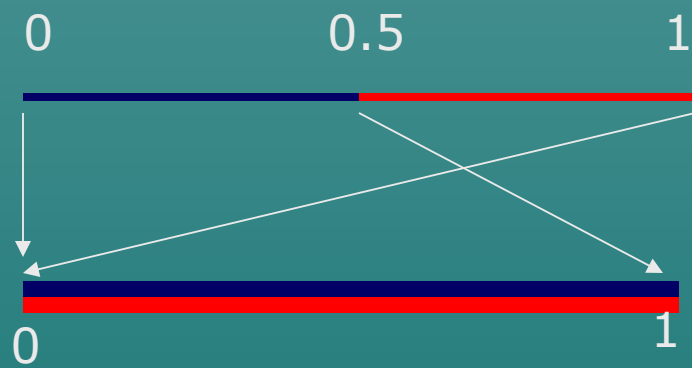






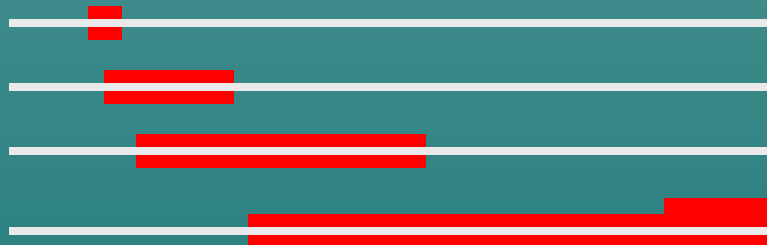






A cada passo do processo pontos inicialmente muito próximos vão se afastando devido ao esticamento.

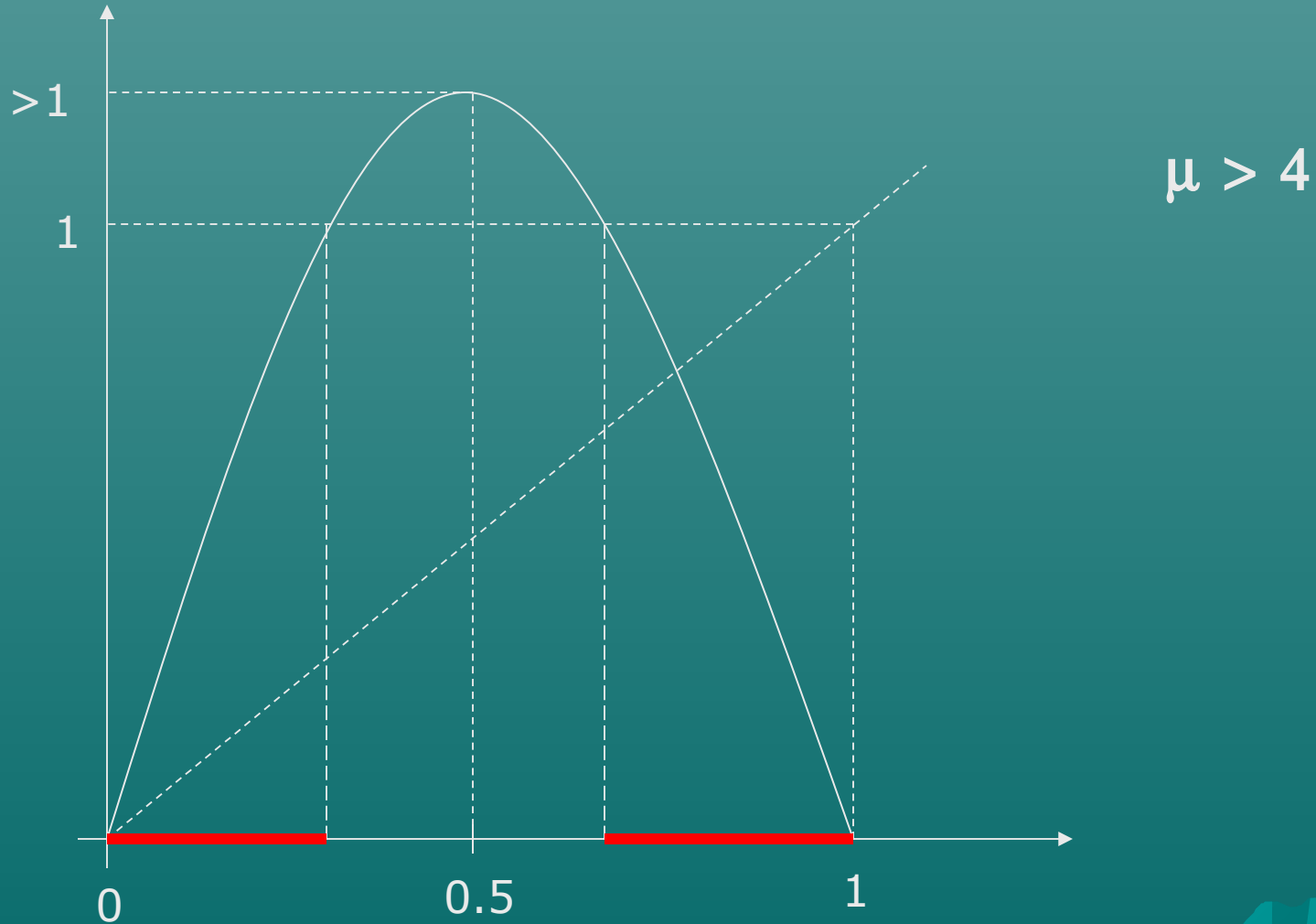
Se a distancia entre dois pontos representa um erro na condição inicial, esse erro acaba ficando do tamanho do espaço todo, e perdemos o poder de previsão:



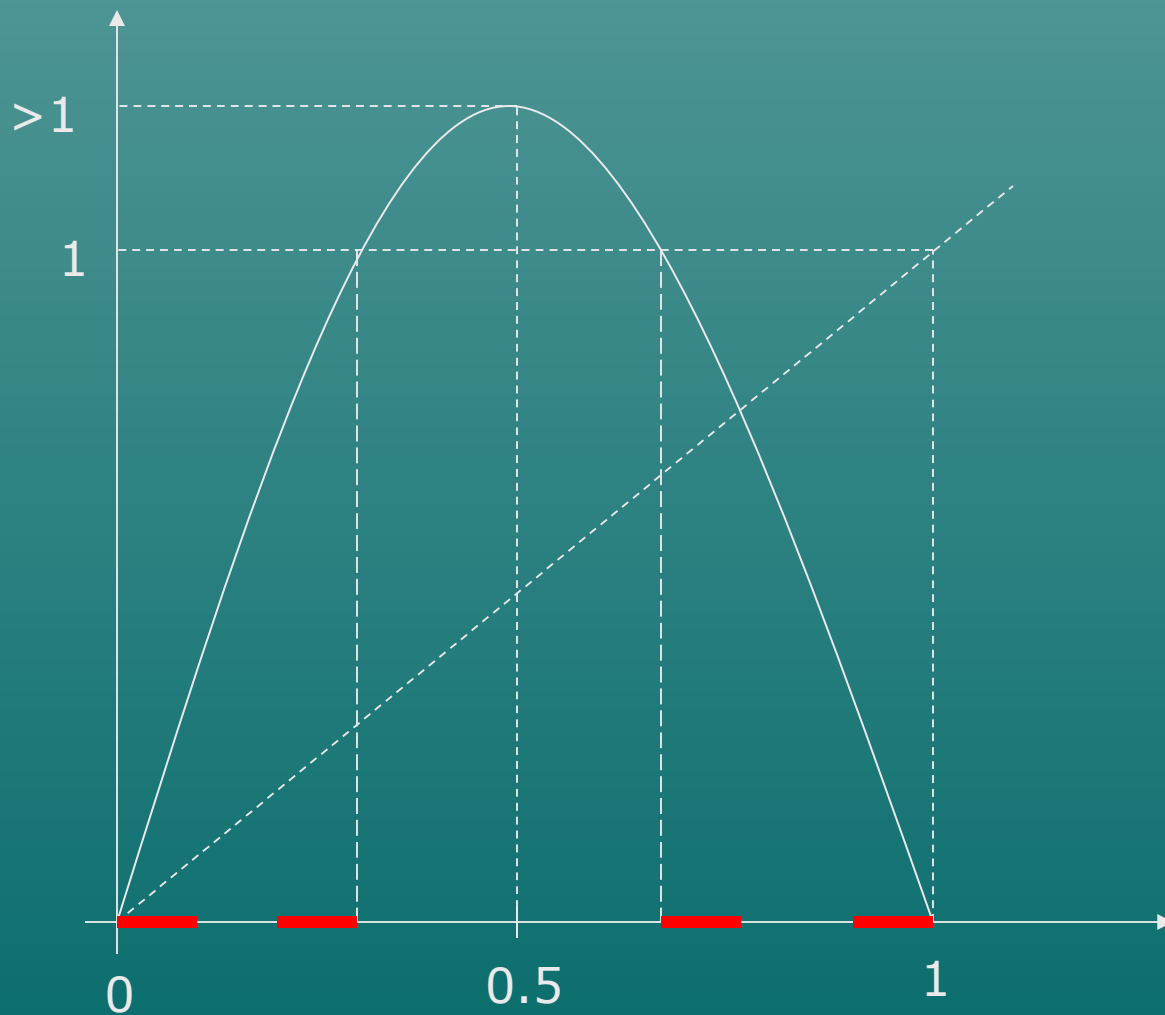
No caso da previsão do tempo, um erro de medida de 0.1 grau, por exemplo, no dia seguinte representa 0.5 grau e cinco dias depois 10 graus, perdendo totalmente o significado.

O processo de esticar e dobrar é o mecanismo fundamental da geração de caos.

Caos e Fractais



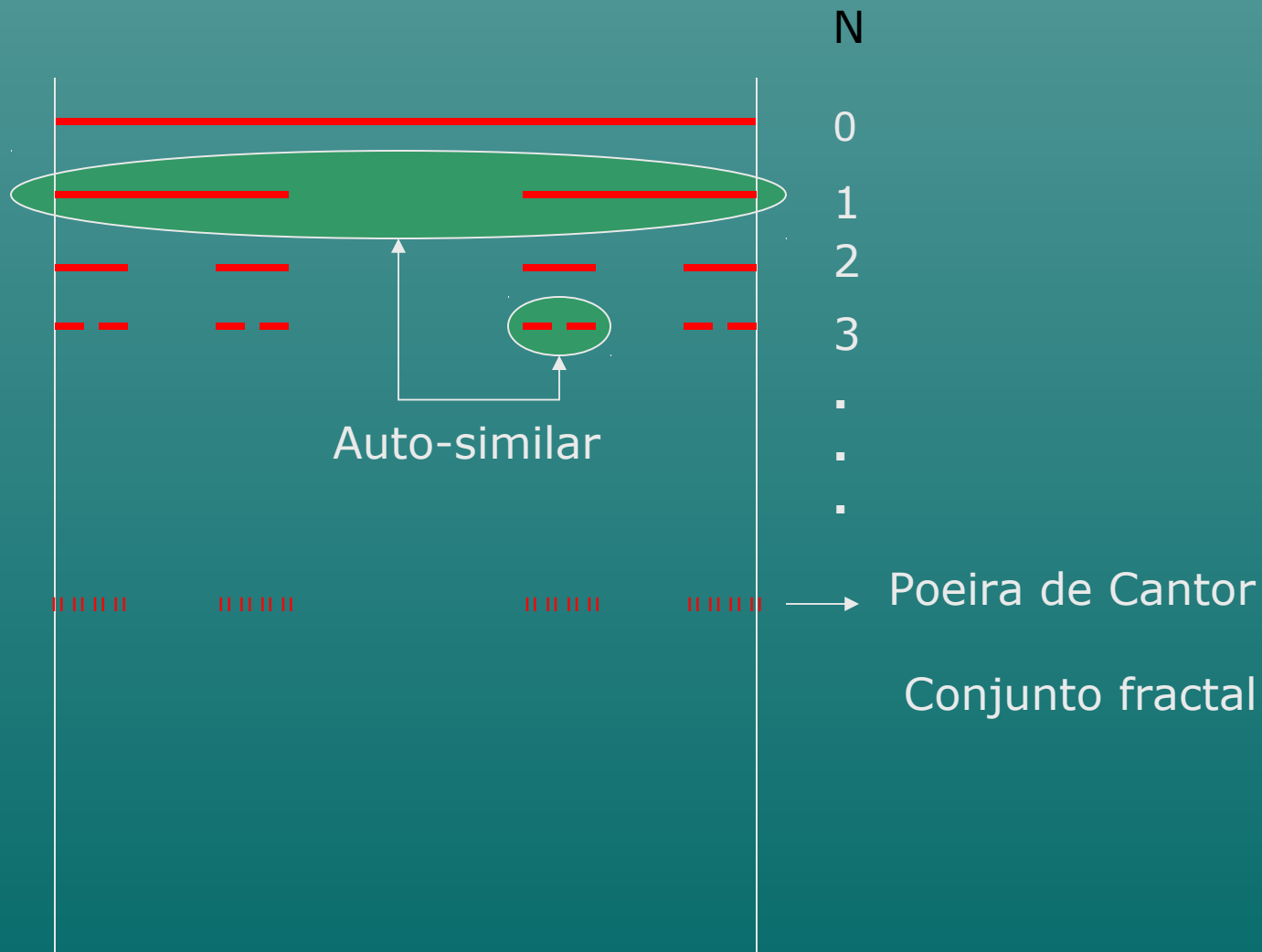
Pontos que permanecem no intervalo $[0,1]$ após uma aplicação

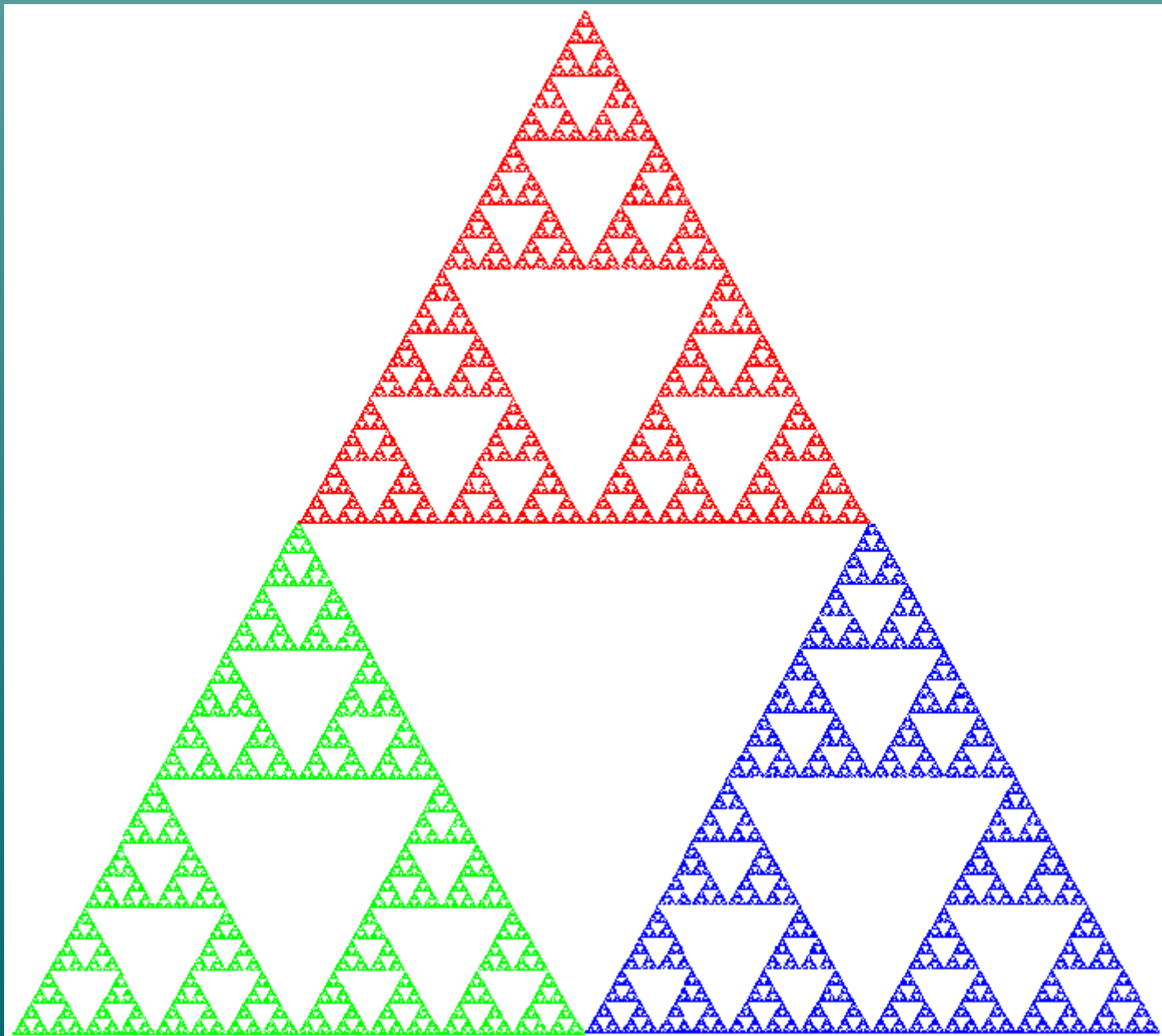


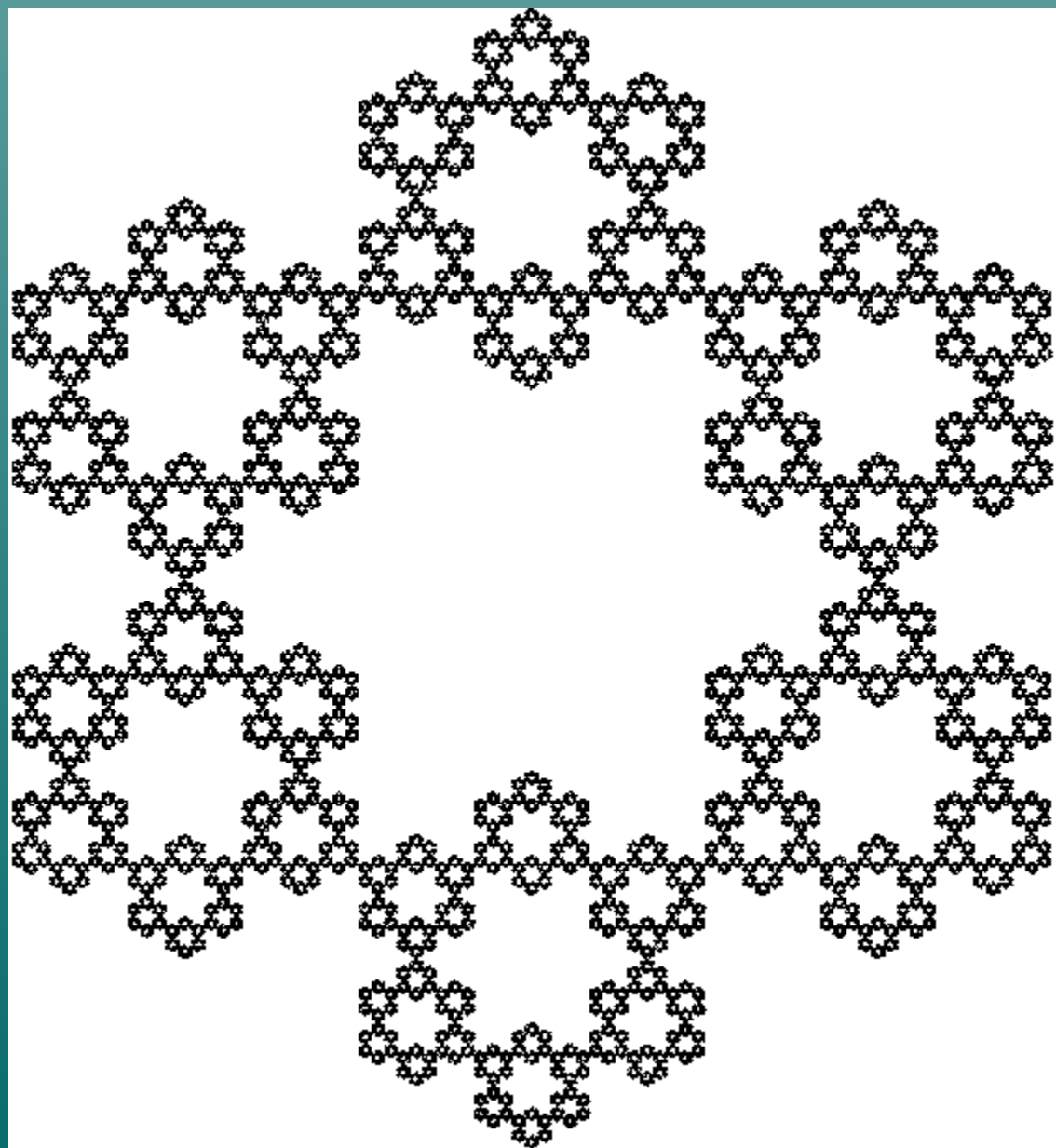
$$\mu > 4$$

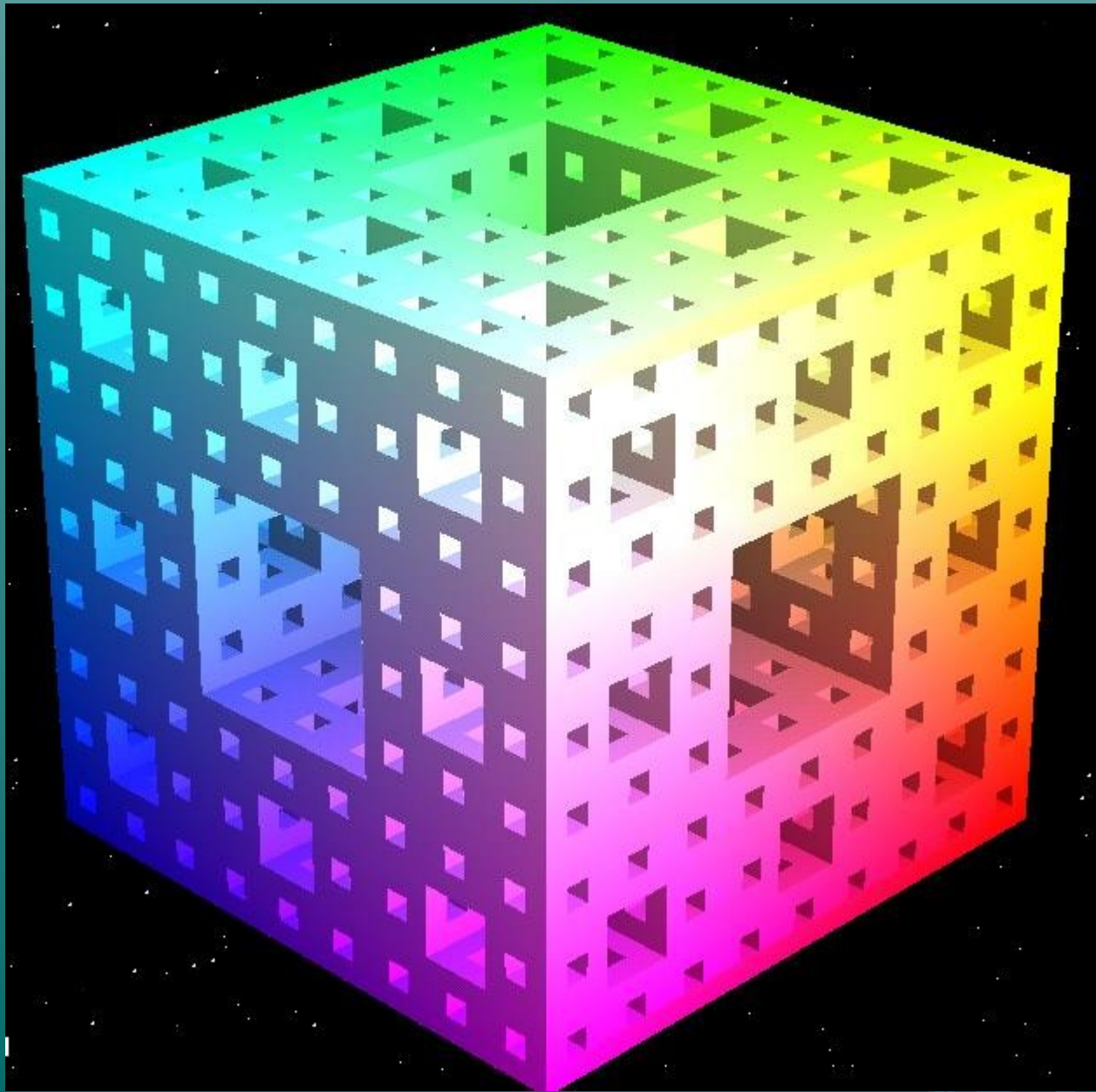
Pontos que permanecem no intervalo $[0,1]$ após duas aplicações

Pontos que permanecem no intervalo $[0,1]$ após N aplicações







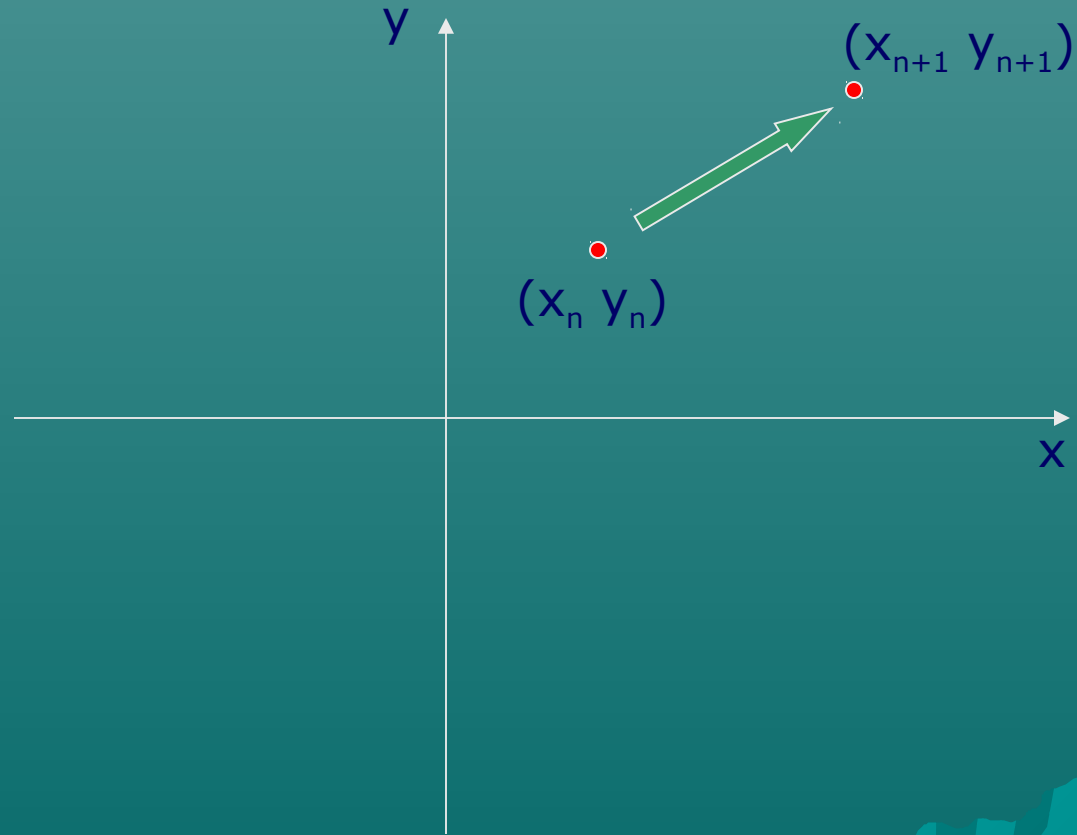


Mapas em Duas Dimensões: o conjunto de Mandelbrot

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

$$z_{n+1} = f(z_n)$$



Mapas Quadráticos

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

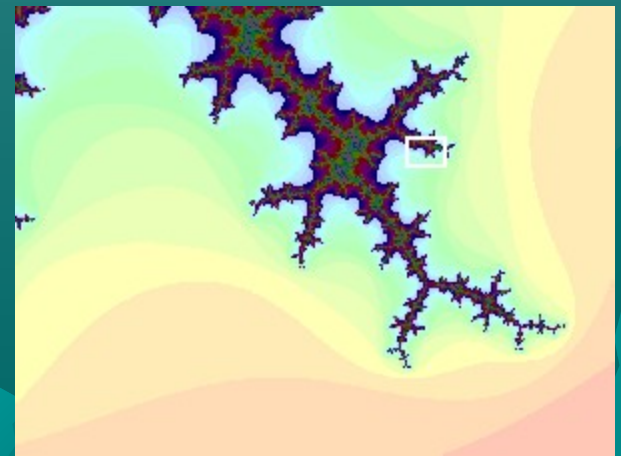
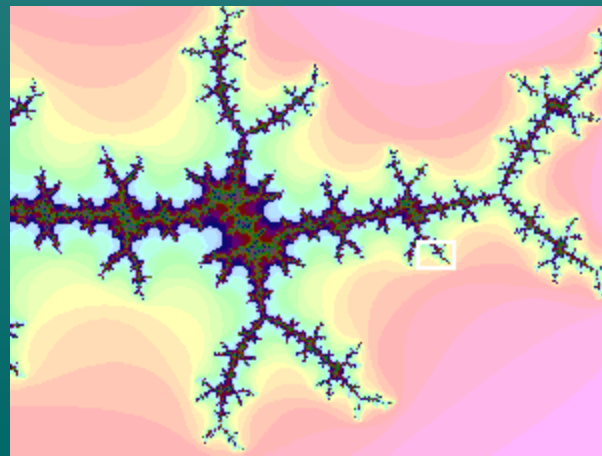
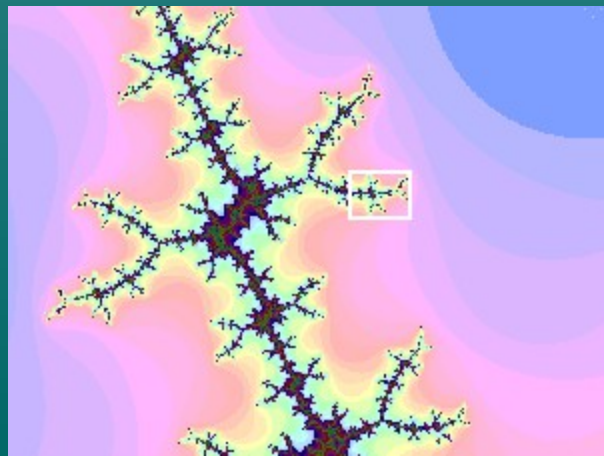
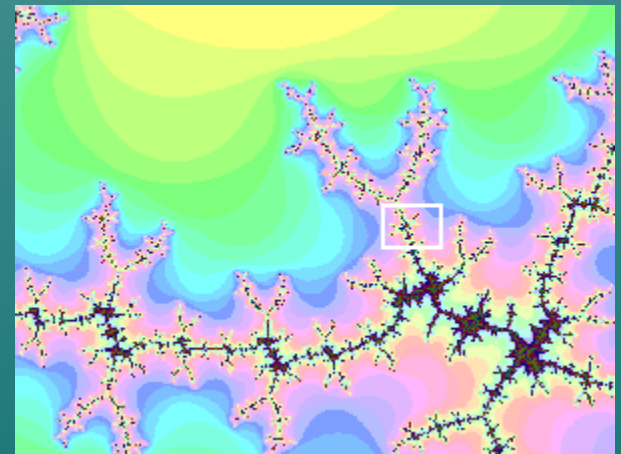
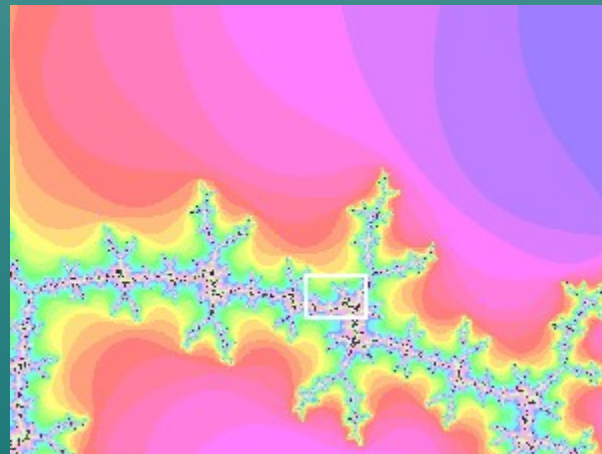
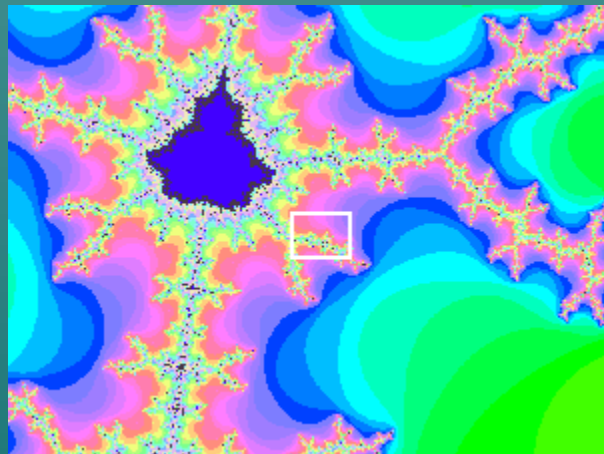
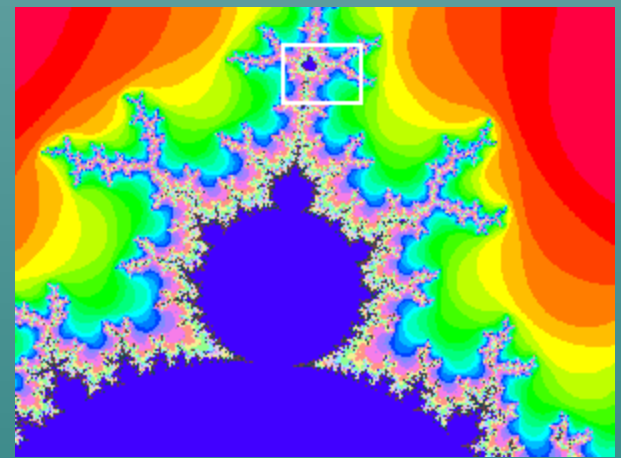
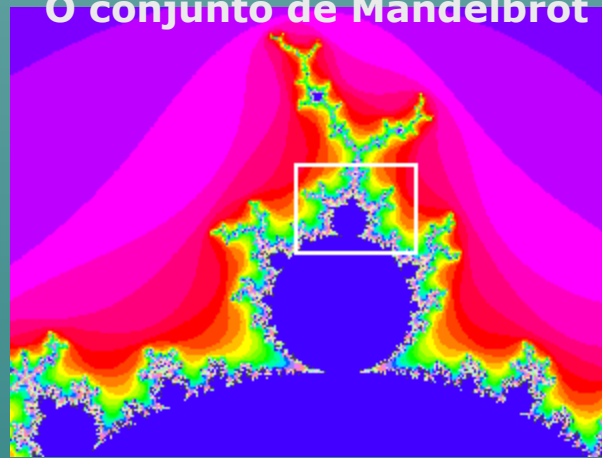
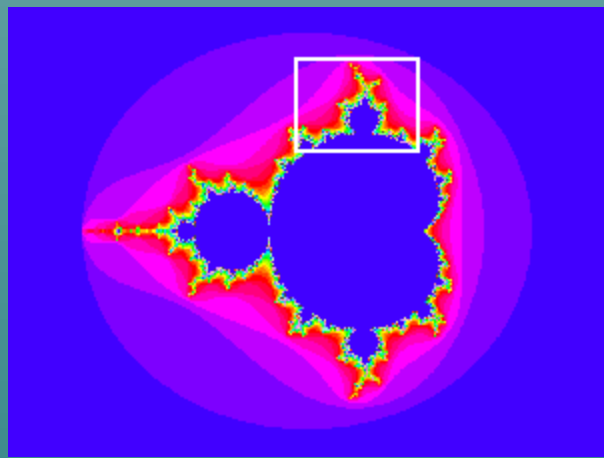
$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + c_1$$

$$y_{n+1} = 2 x_n y_n + c_2$$

Regra do jogo:

- 1 – ponto inicial é $z_0=0$ [ou $(x_0, y_0) = (0,0)$]
- 2 – para cada valor de c [ou de (c_1, c_2)] verificamos quantos passos são necessários para que $|z_n|^2 > 4$ [ou $x_n^2 + y_n^2 > 4$]
- 3 – de acordo com esse numero de passos associamos uma cor diferente ao ponto representado pela constante c . Por exemplo, vermelho de são necessários três passos, verde para quatro passos etc.

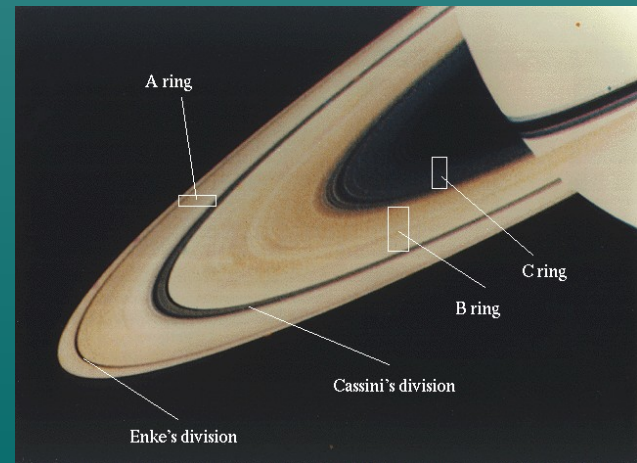
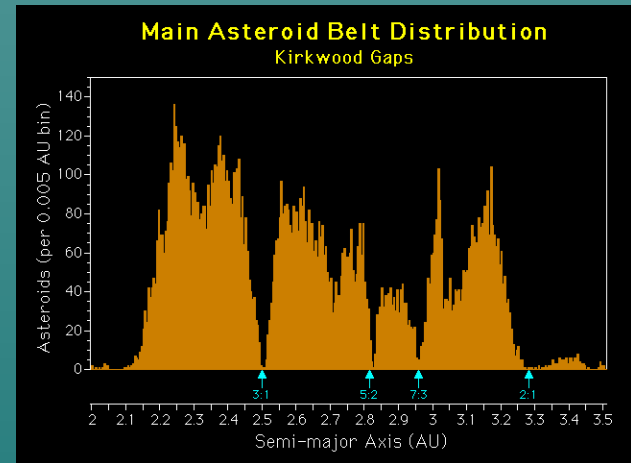
O conjunto de Mandelbrot



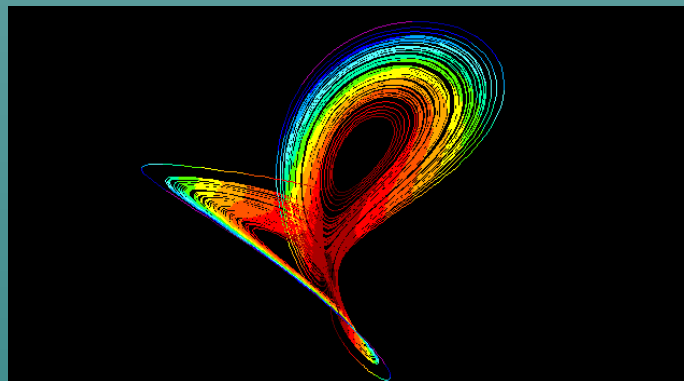
Exemplos de Sistemas com Movimento Caótico

Problemas de três corpos

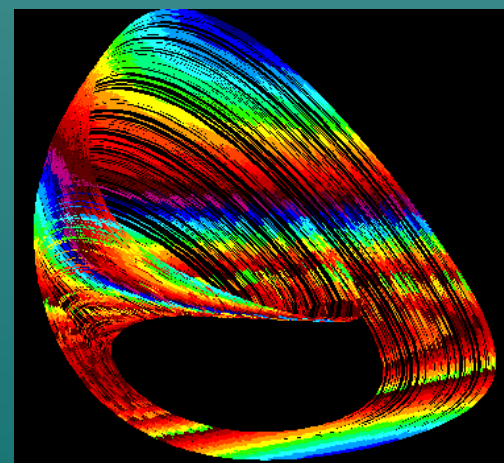
- ◆ Cinturão de asteróides entre Marte e Júpiter
- ◆ Anéis de Saturno



Meteorologia: o atrator de Lorenz



Ecologia: modelos predador-presa com 3 espécies



OUTROS EXEMPLOS:

Pêndulo duplo com hastes rígidas ou com molas

Osciladores acoplados não-lineares (redes atômicas)

Movimento de partículas em redes cristalinas

Movimento de elétrons em algumas estruturas mesoscópicas

Fluidos turbulentos

Conclusões

- ◆ **Caos = sensibilidade a condições iniciais** (efeito borboleta). Apesar do determinismo das equações de movimento nosso poder de previsão é limitado.
 - ◆ **Esticar e Dobrar** é o mecanismo dinâmico que produz caos (dinâmica do padeiro).
 - ◆ **Onde há caos há fractais.**
- 