

FM003 1S-2005

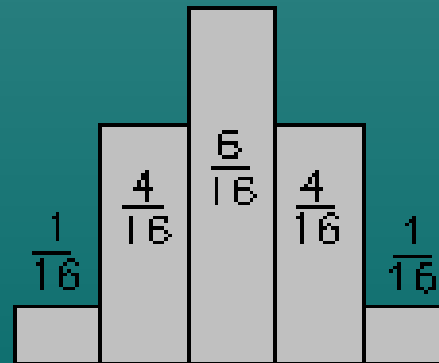
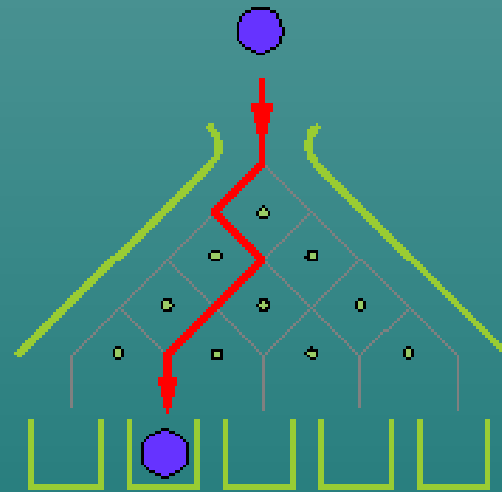
Introdução à Teoria do Caos

Marcus A.M. de Aguiar

Sumário

- ◆ 1 – Entendendo o conceito de Caos através de exemplos
 - ◆ 2 - O mecanismo universal gerador de caos
 - ◆ 3 – Exemplos
 - ◆ 4 - Rotas para o caos
- 

Caos e Determinismo

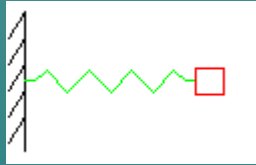


relative frequency
distribution

- ◆ As equações de Newton são determinísticas: dada uma condição inicial devemos ser capazes de determinar o movimento futuro.
- ◆ Se jogamos as bolinas sempre do mesmo modo, porque elas não caem sempre no mesmo lugar?
- ◆ J.C. Maxwell e H. Poincaré: toda causa tem um efeito, mas causas muito parecidas podem ter efeitos muito diferentes!
- ◆ Lorenz: sistemas muito simples podem ter comportamentos complexos, onde pequenas diferenças são amplificadas, levando a um comportamento aleatório. **Exemplo**

Vamos fazer um passeio do
simples ao caótico. O objetivo
dessa primeira parte do seminário é
entender o que significa caos.

Movimento Harmônico



Animação

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{m\omega} \sin(\omega t)$$

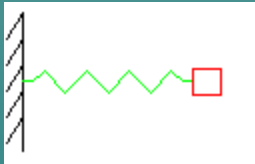
$$v(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t) + v_0 \cos(\omega t)$$

Conceito importante: o espaço de estados (x, v)

1.4

Outros exemplos de sistemas regulares:

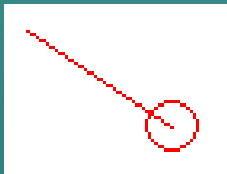
1)



Sistema massa-mola

$$F(x) = -kx \quad V(x) = \frac{kx^2}{2}$$

2)



Pêndulo simples

$$\tau_\theta = -mgl \sin(\theta) \quad v(\theta) = -mgl \cos(\theta)$$

3)

Oscilador anarmônico

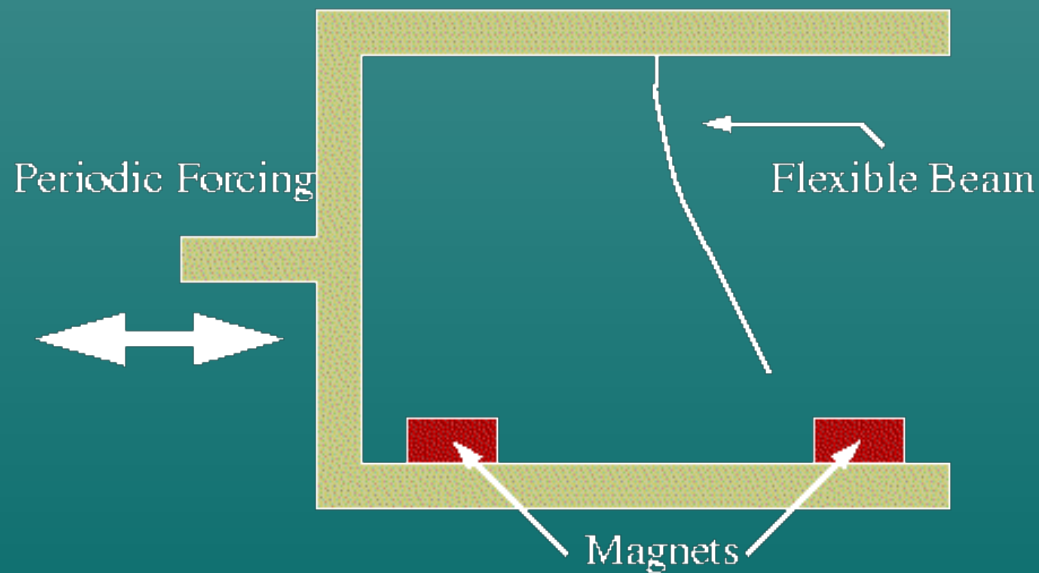
$$F(x) = kx - \lambda x^3 \quad V(x) = \frac{\lambda x^4}{4} - \frac{kx^2}{2}$$

4)

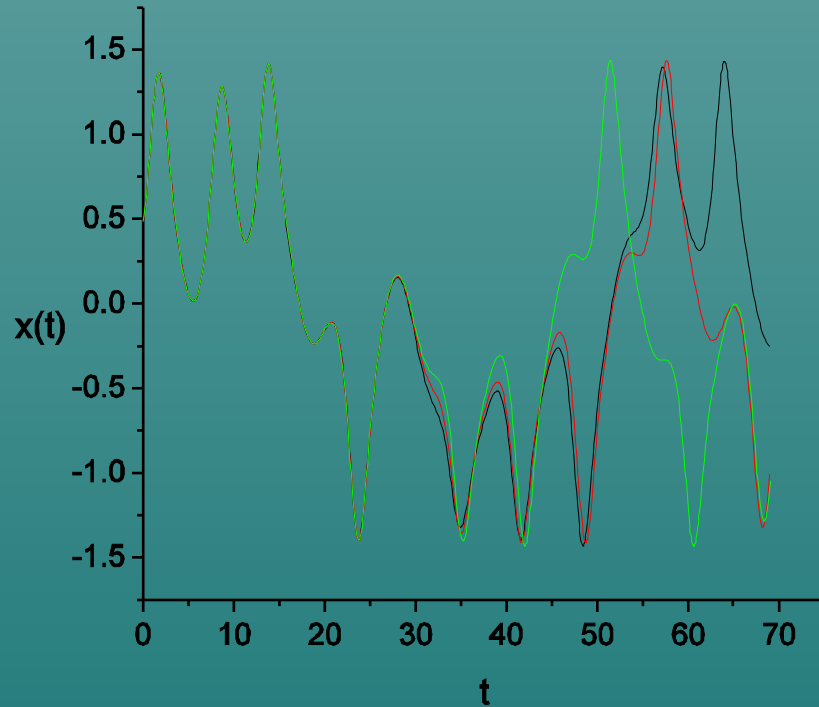
Sistema Terra-Sol

Um sistema caótico: O oscilador de Duffing

$$\ddot{x} = kx - x^3 - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega_0 t)$$



1.8



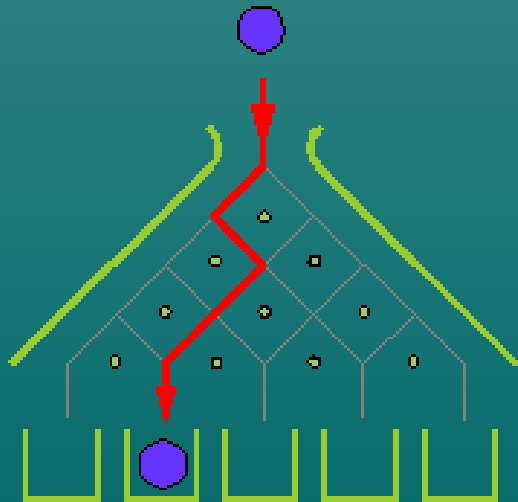
Preto:	$x(0)=0.480$	$v(0)=0.355$
Vermelho:	$x(0)=0.481$	$v(0)=0.355$
Verde:	$x(0)=0.482$	$v(0)=0.355$

O movimento é tão complicado que torna-se imprevisível!

CAOS = sensibilidade à condições iniciais
=
imprevisibilidade

Resumo

- ◆ Caos = sensibilidade à condições iniciais
- ◆ Sistemas determinísticos muito simples podem ser imprevisíveis a tempos longos

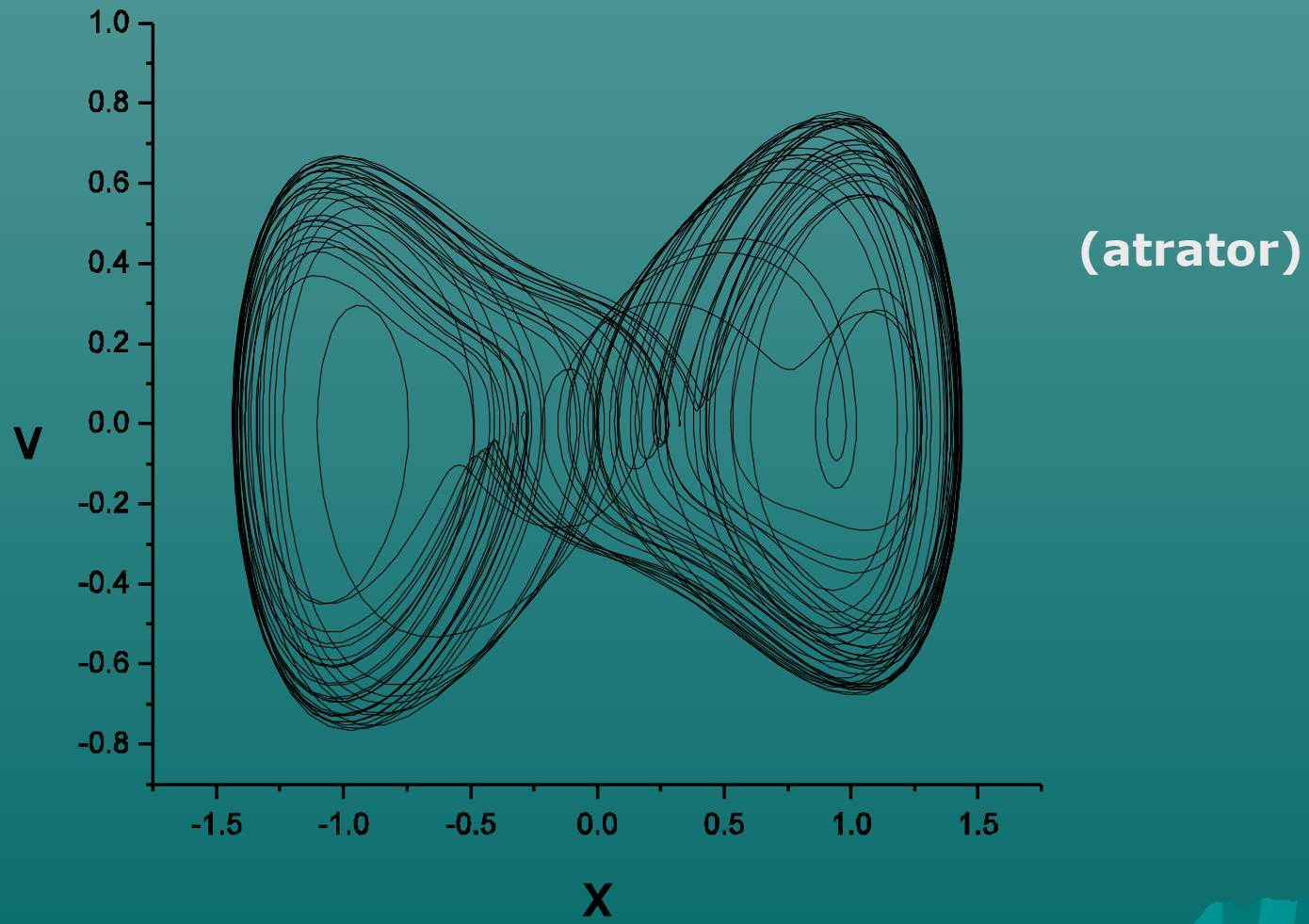


Condições iniciais muito próximas
separam-se rapidamente:
efeito borboleta

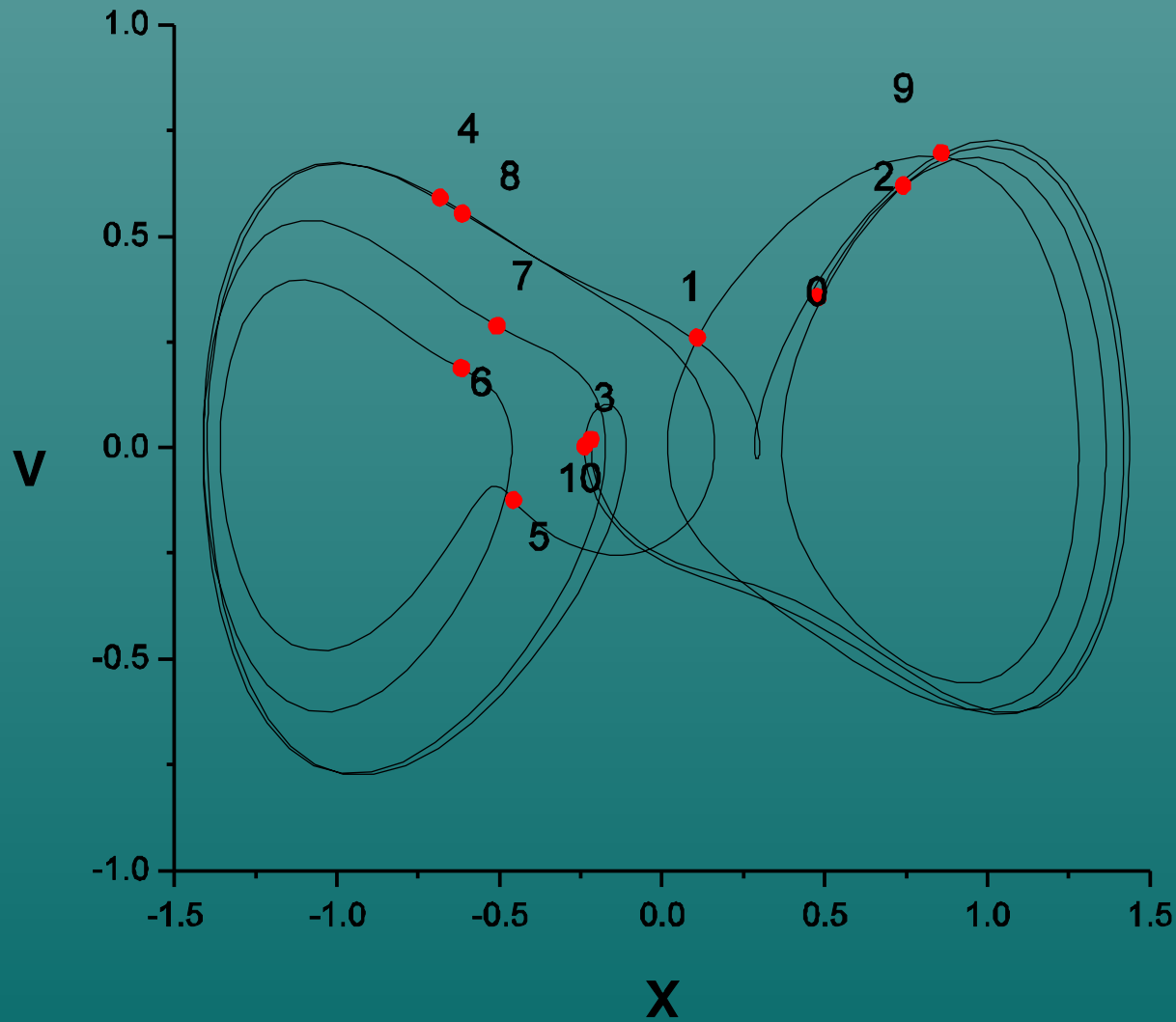
**Qual o mecanismo que leva ao
caos?**

**Para responder essa pergunta
vamos fazer uma análise
geométrica do problema.**

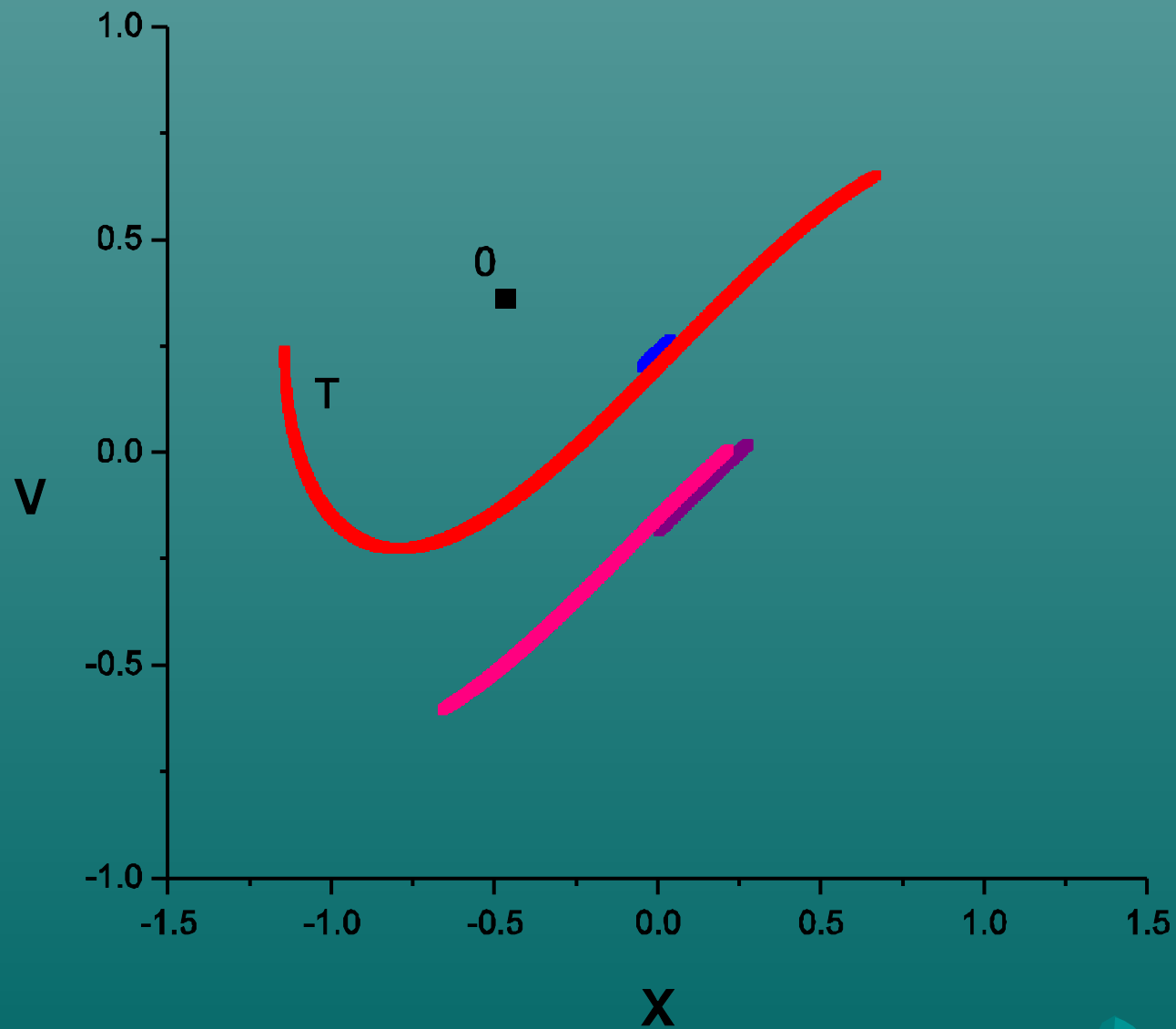
Trajetória típica do Oscilador de Duffing



Visão estroboscópica da mesma trajetória



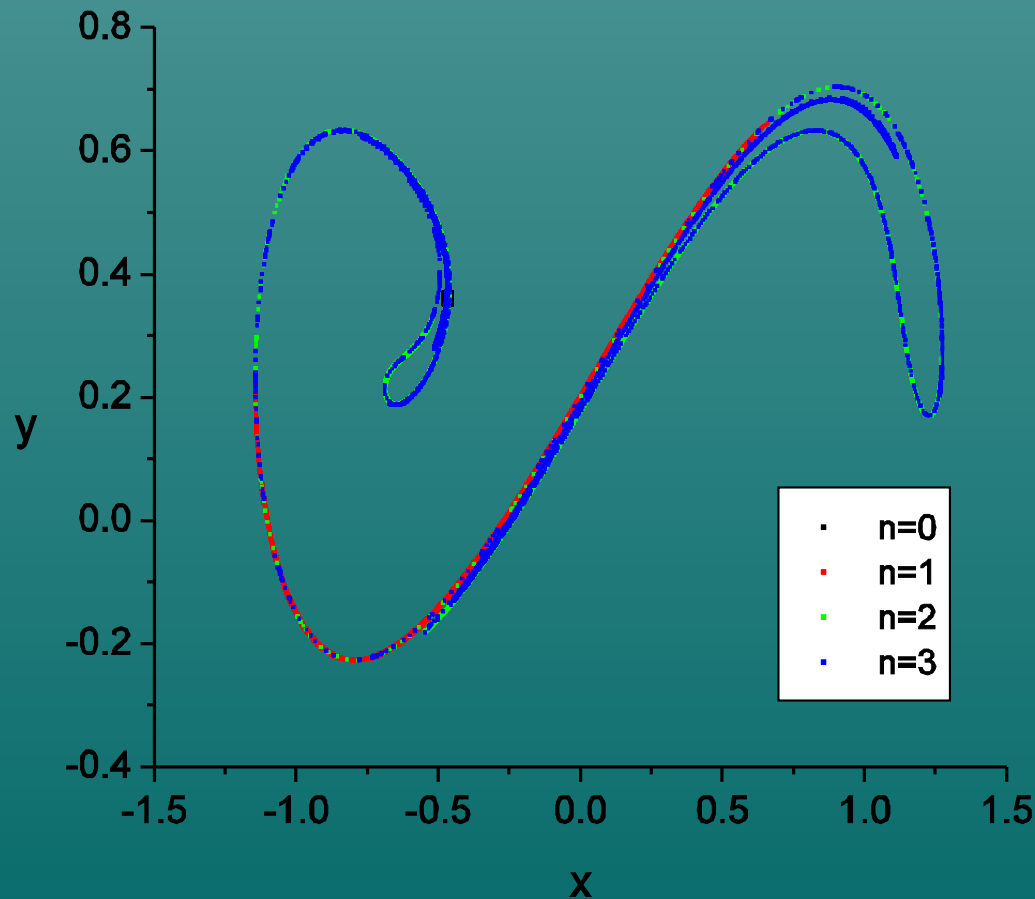
Visão estroboscópica de um grupo de trajetórias



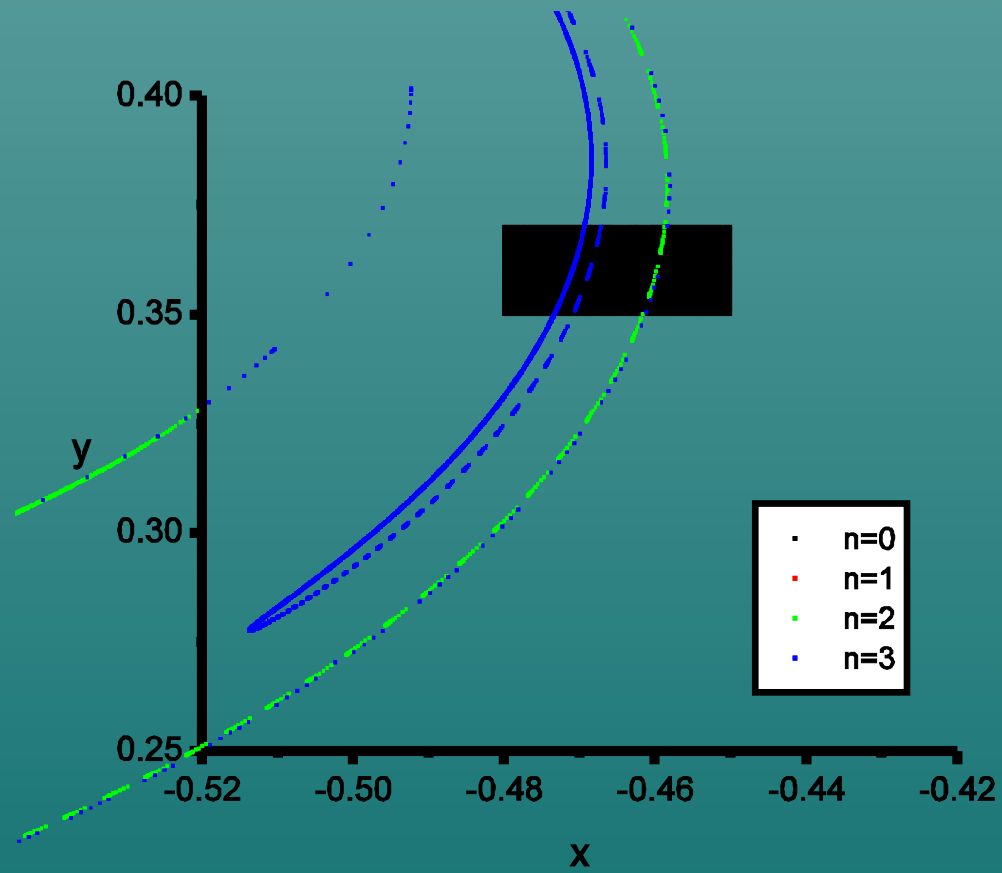
O mapa estroboscópico

Definimos o mapa estroboscópico como a observação do estado do sistema apenas nos instantes $0, T, 2T, 3T, \dots$. Perdemos alguma informação, mas ganhamos poder de análise.

Mapa Estroboscópico para Oscilador de Duffing



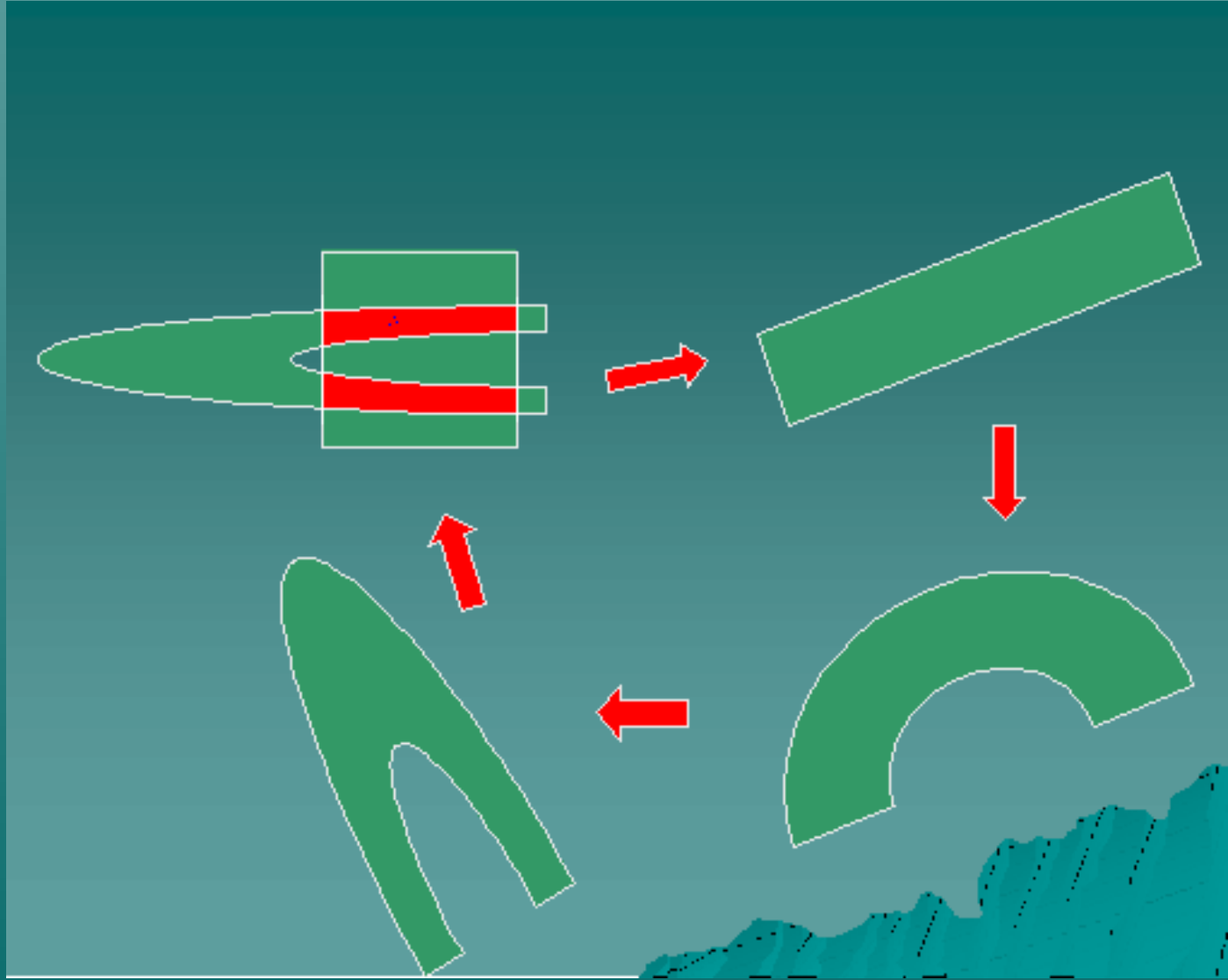
2.3

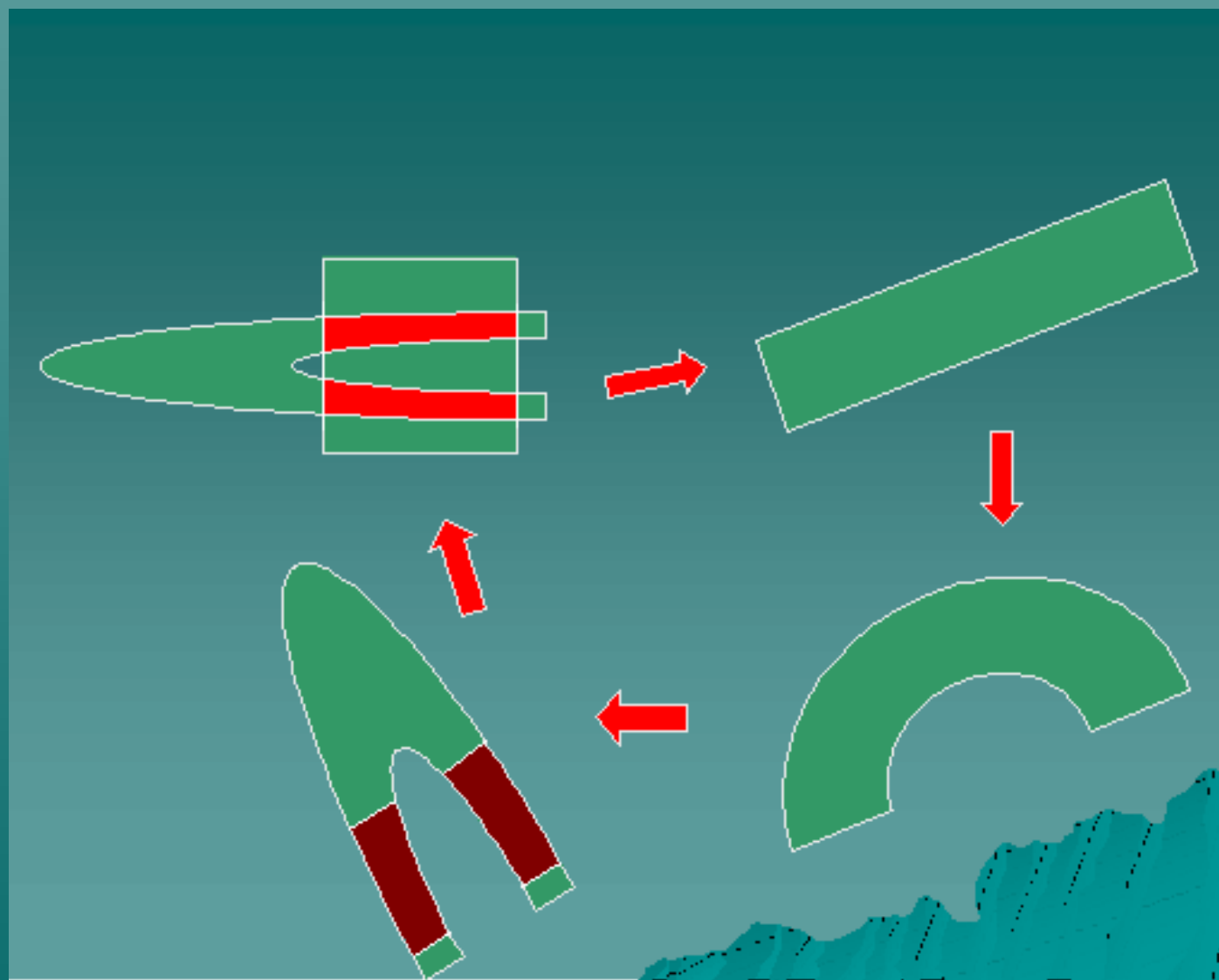


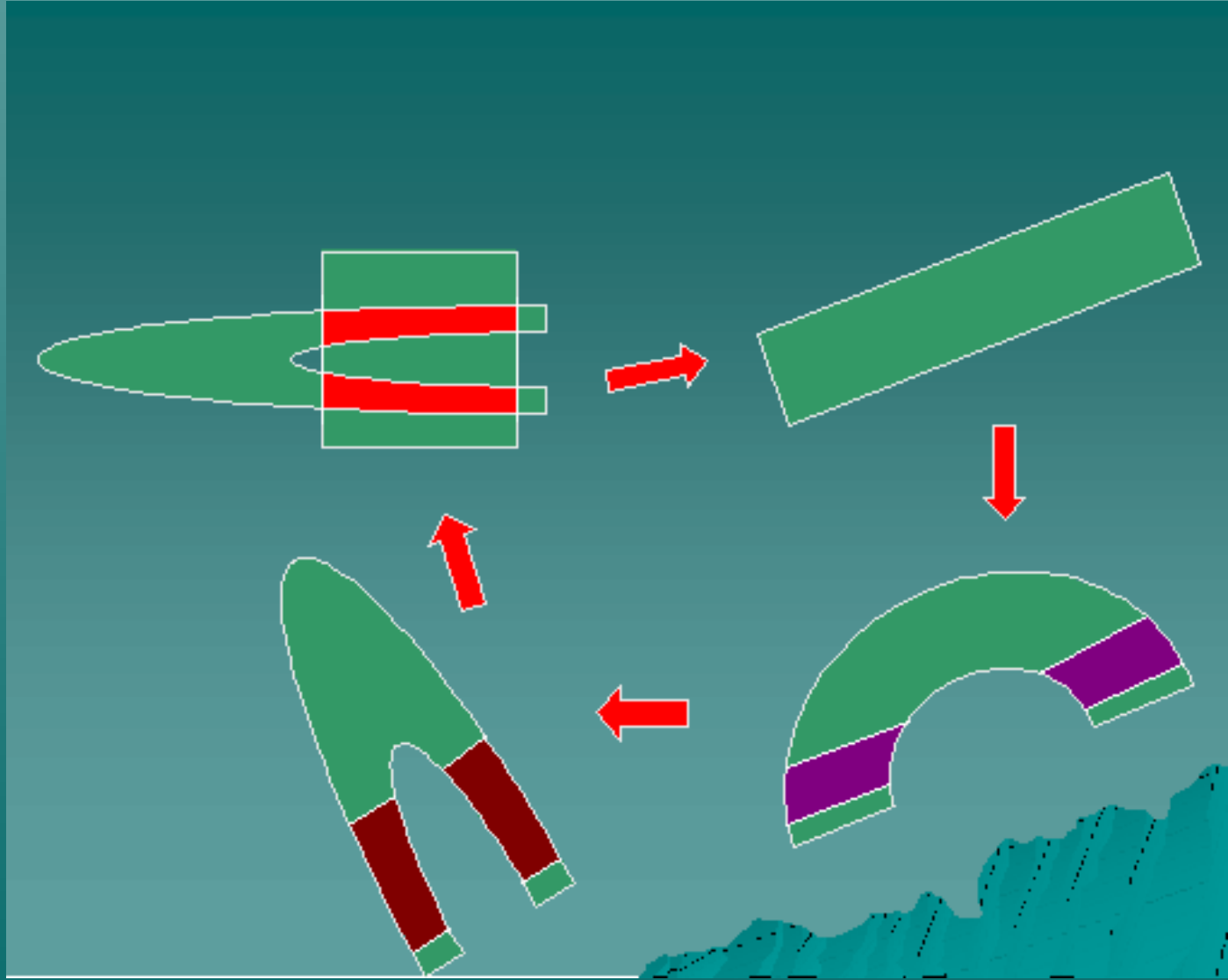
Modelo Simplificado: a dinâmica do estica-e-dobra

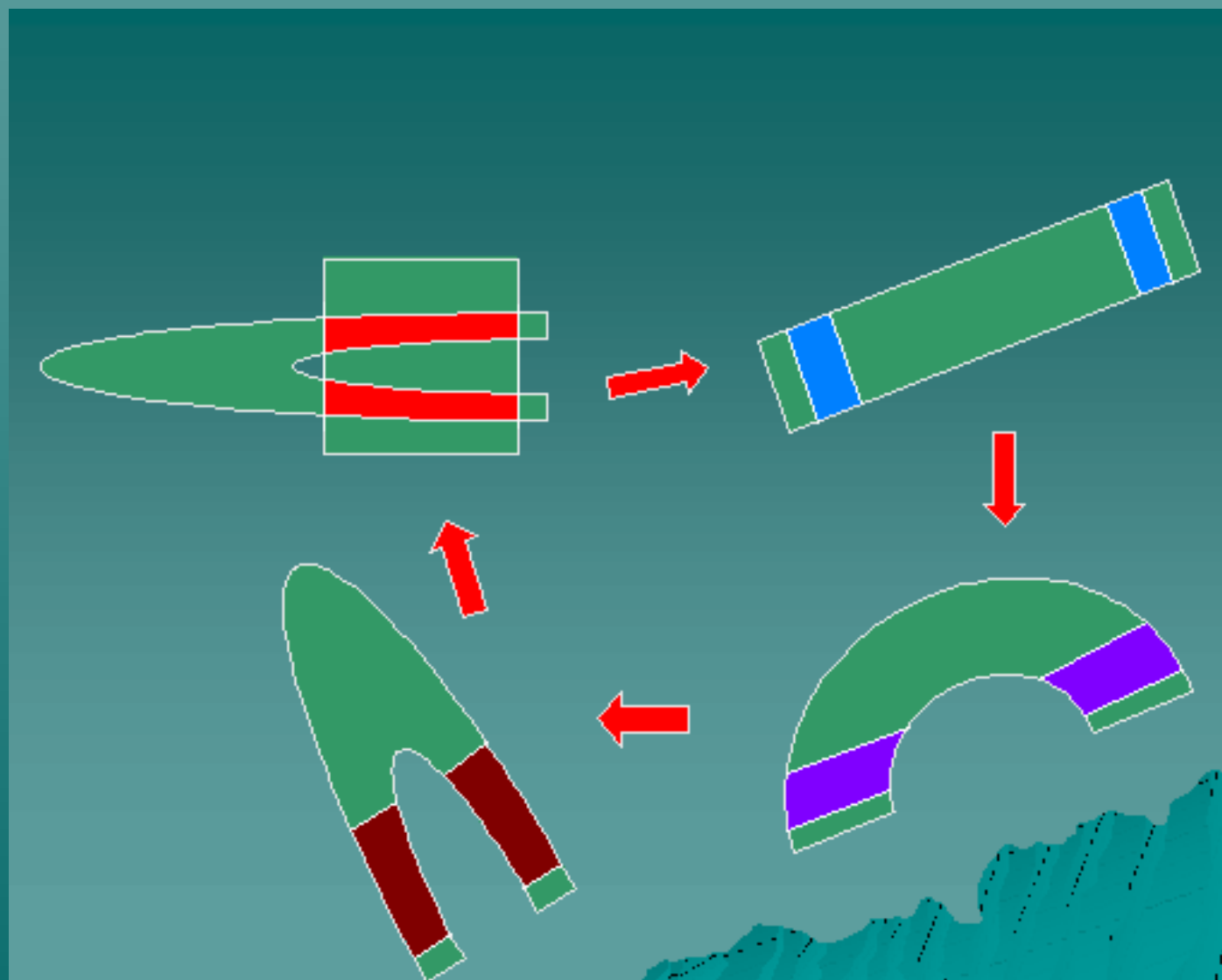


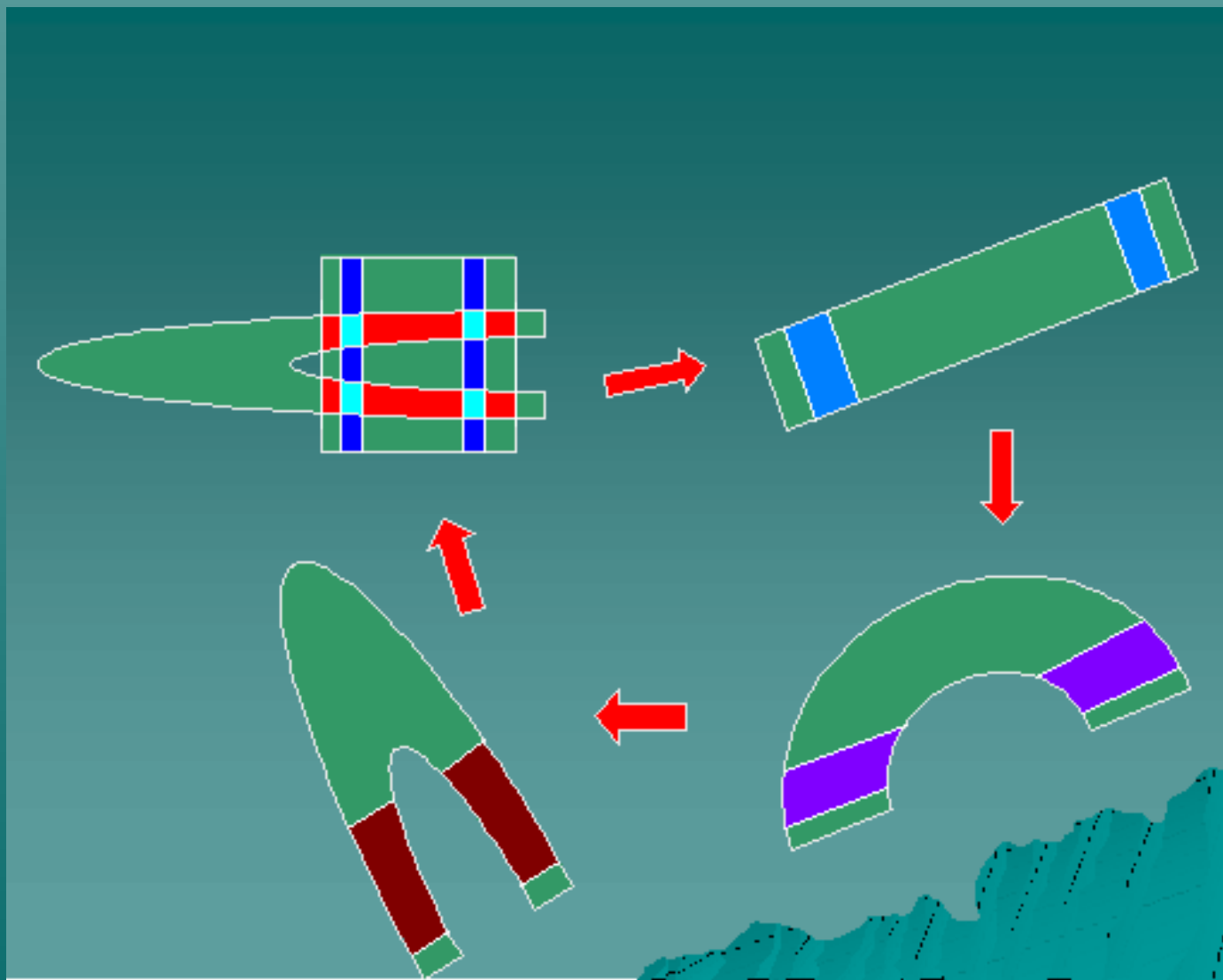
Quais são os pontos que
retornaram próximos aos seus
estados iniciais?



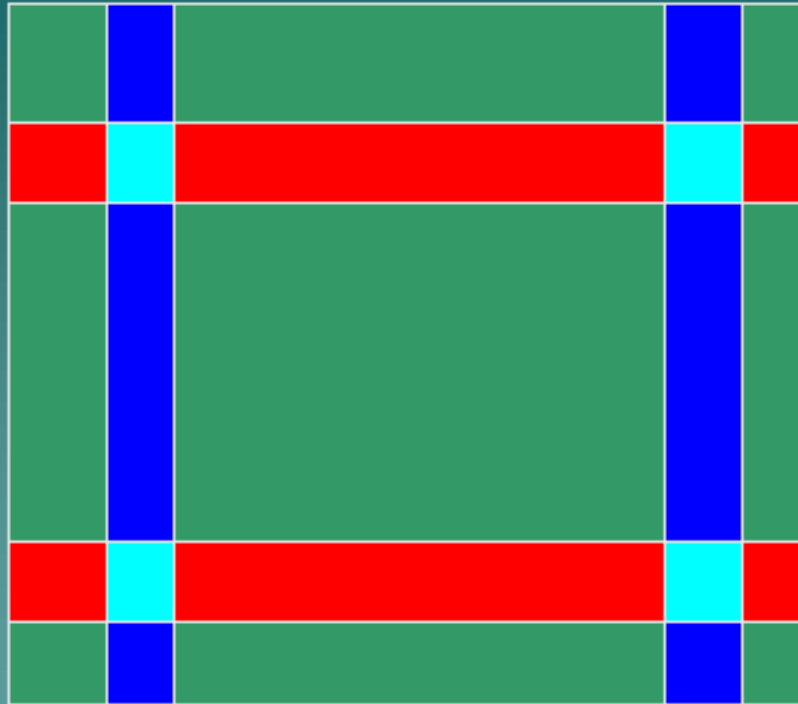


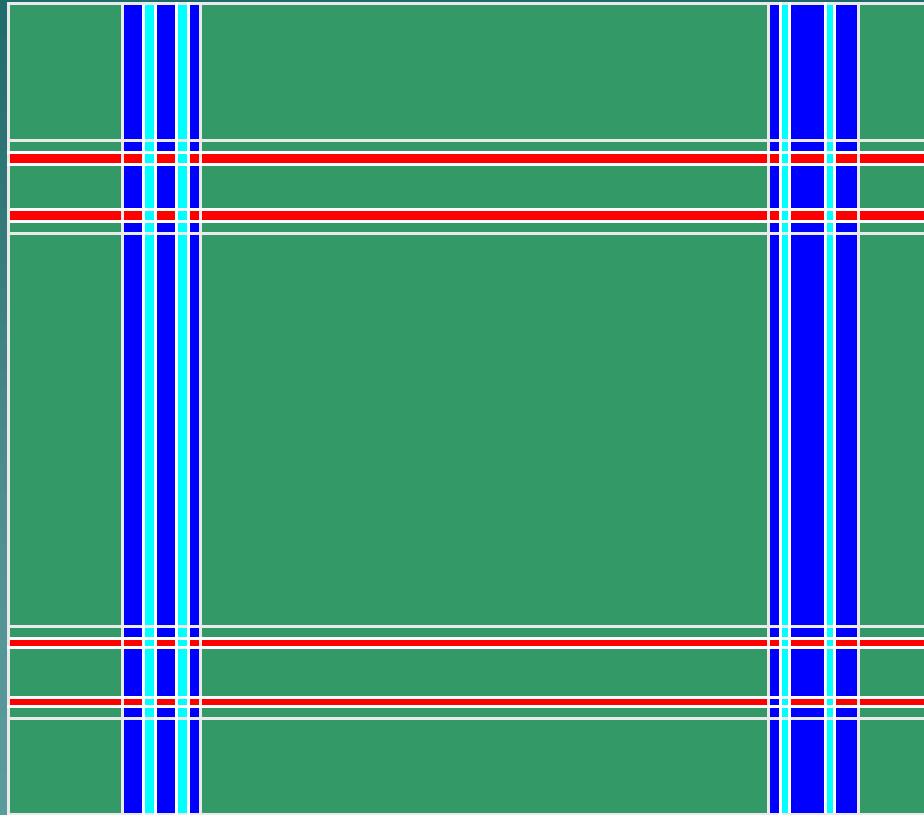






2.10



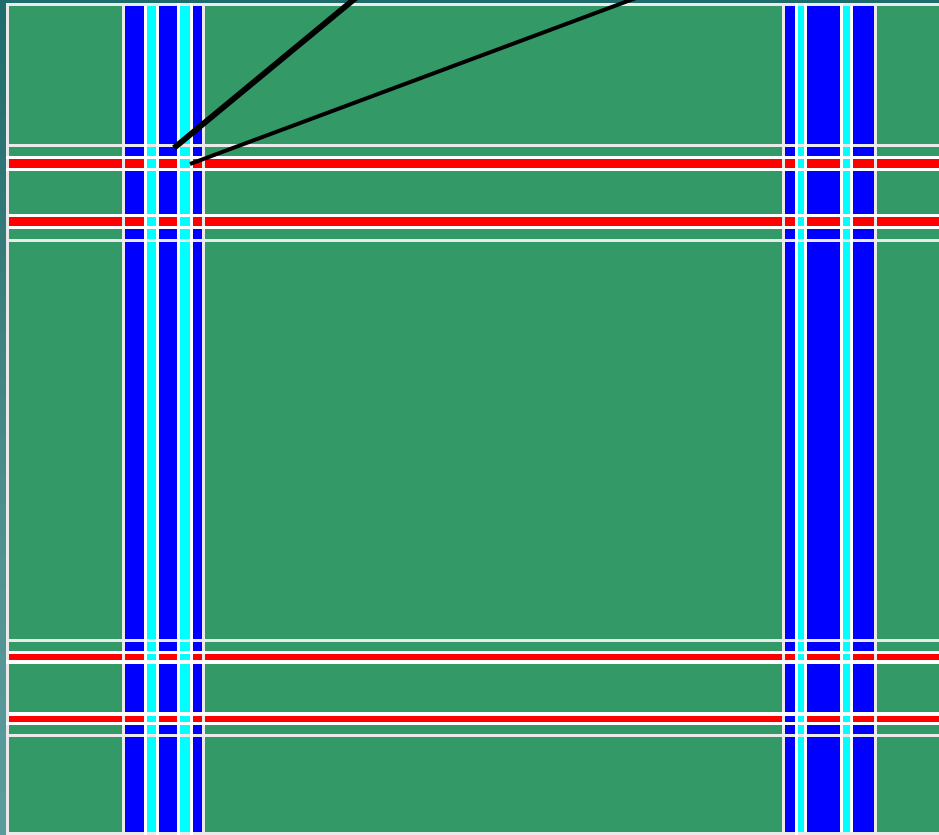


O conjunto de pontos que retorna ao quadrado N vezes é composto por 2^N faixas verticais cujo limite é um fractal

2.12 Sensibilidade à condições iniciais = caos

Ponto retorna ao quadrado apenas uma vez

Ponto retorna ao quadrado 237 vezes!



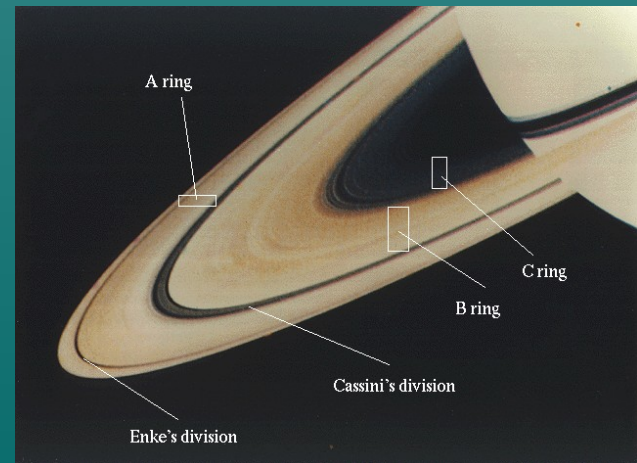
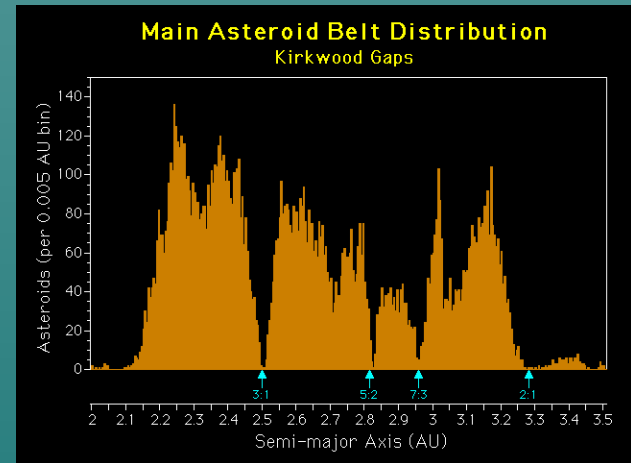
O processo de esticar e dobrar é o mecanismo fundamental da geração de caos.

- ◆ O processo de levar o quadrado esticado e dobrado sobre si mesmo é chamado de *Mapa da Ferradura*.
- ◆ Todo sistema onde pode-se identificar um mapa da ferradura apresenta caos. Além disso, **todo sistema caótico tem um fractal associado** a ele.
- ◆ O paradigma de um sistema caótico é o processo de fazer pão, onde a massa é esticada e dobrada várias vezes!

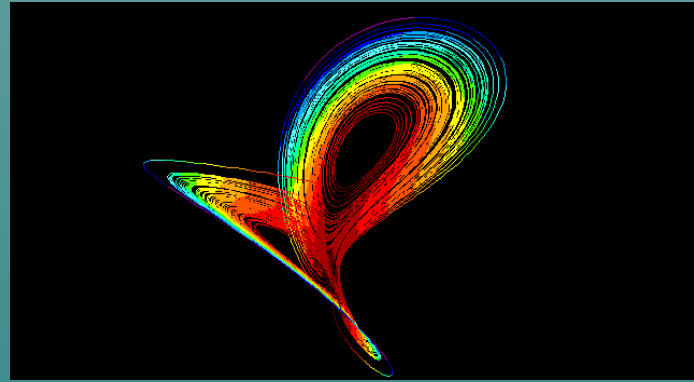
Exemplos de Sistemas com Movimento Caótico

Problemas de três corpos

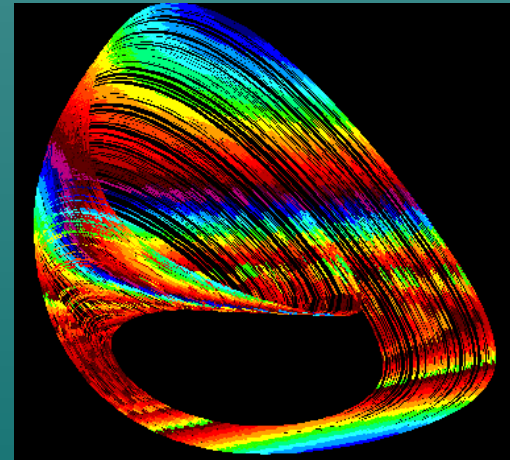
- ◆ Cinturão de asteróides entre Marte e Júpiter
- ◆ Anéis de Saturno



Meteorologia: o atrator de Lorenz



Ecologia: modelos predador-presa com 3 espécies



OUTROS EXEMPLOS:

Pêndulo duplo com hastes rígidas ou com molas

Pêndulo simples com mola

Osciladores acoplados não-lineares (redes atômicas)

Movimento de partículas em redes cristalinas

Movimento de partículas em semi-condutores

Fluidos turbulentos

Rotas para o Caos

O oscilador de Duffing : $\ddot{x} = kx - x^3 - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega_0 t)$

se $F_0 = 0$ o sistema é regular

Conforme F_0 aumenta o sistema passa a exibir movimento caótico:

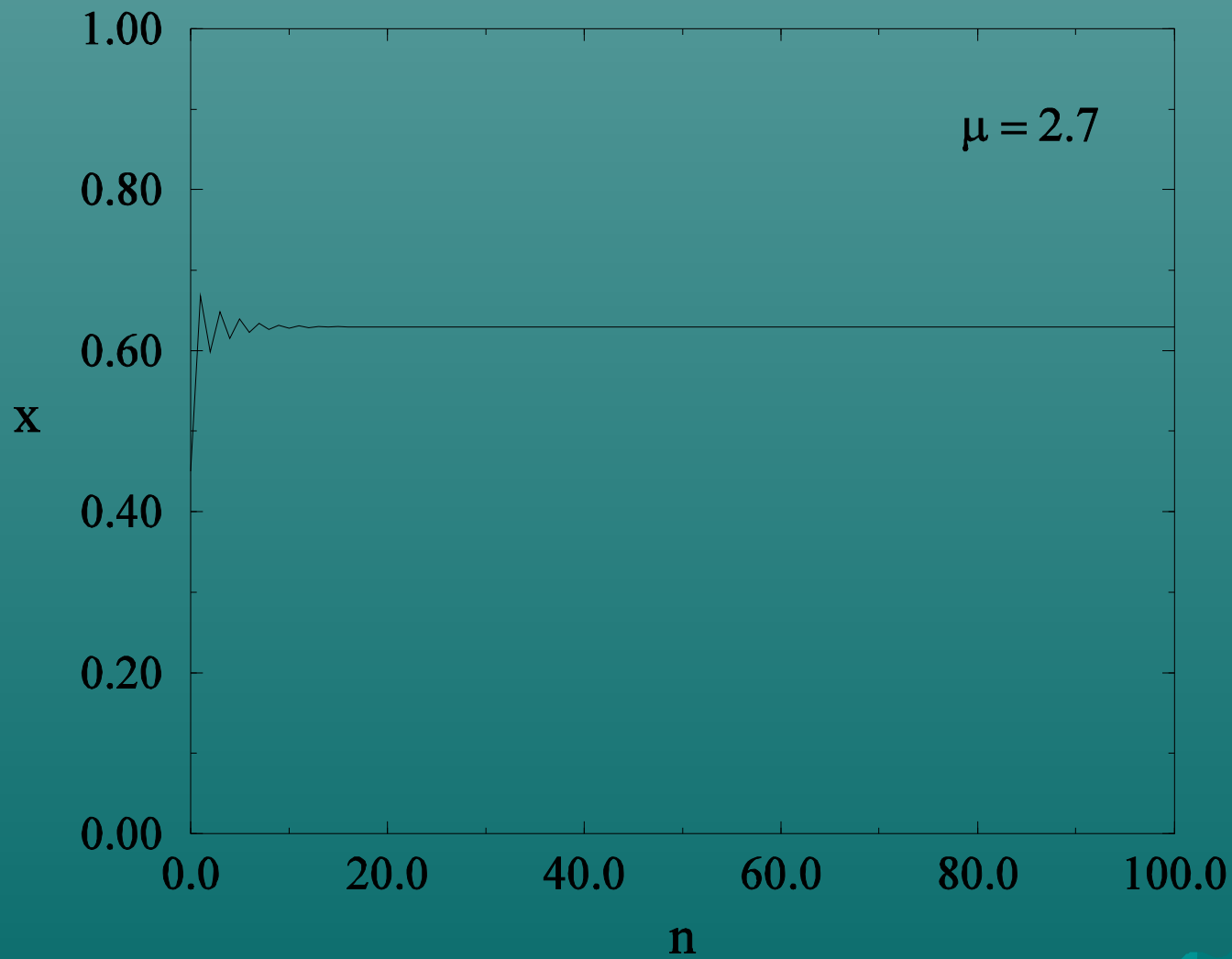
como se dá a transição?

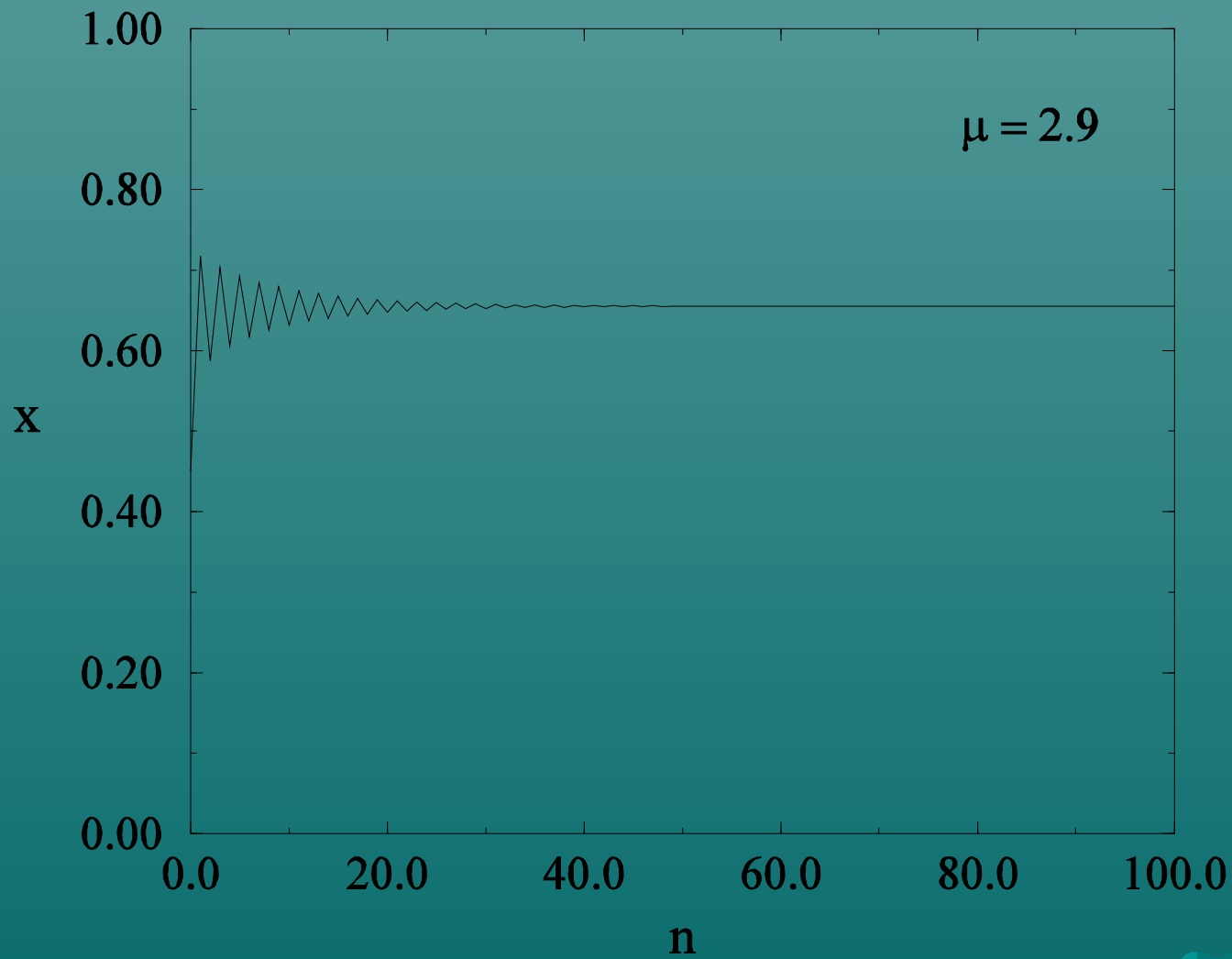
Modelo Simplificado: O mapa logístico

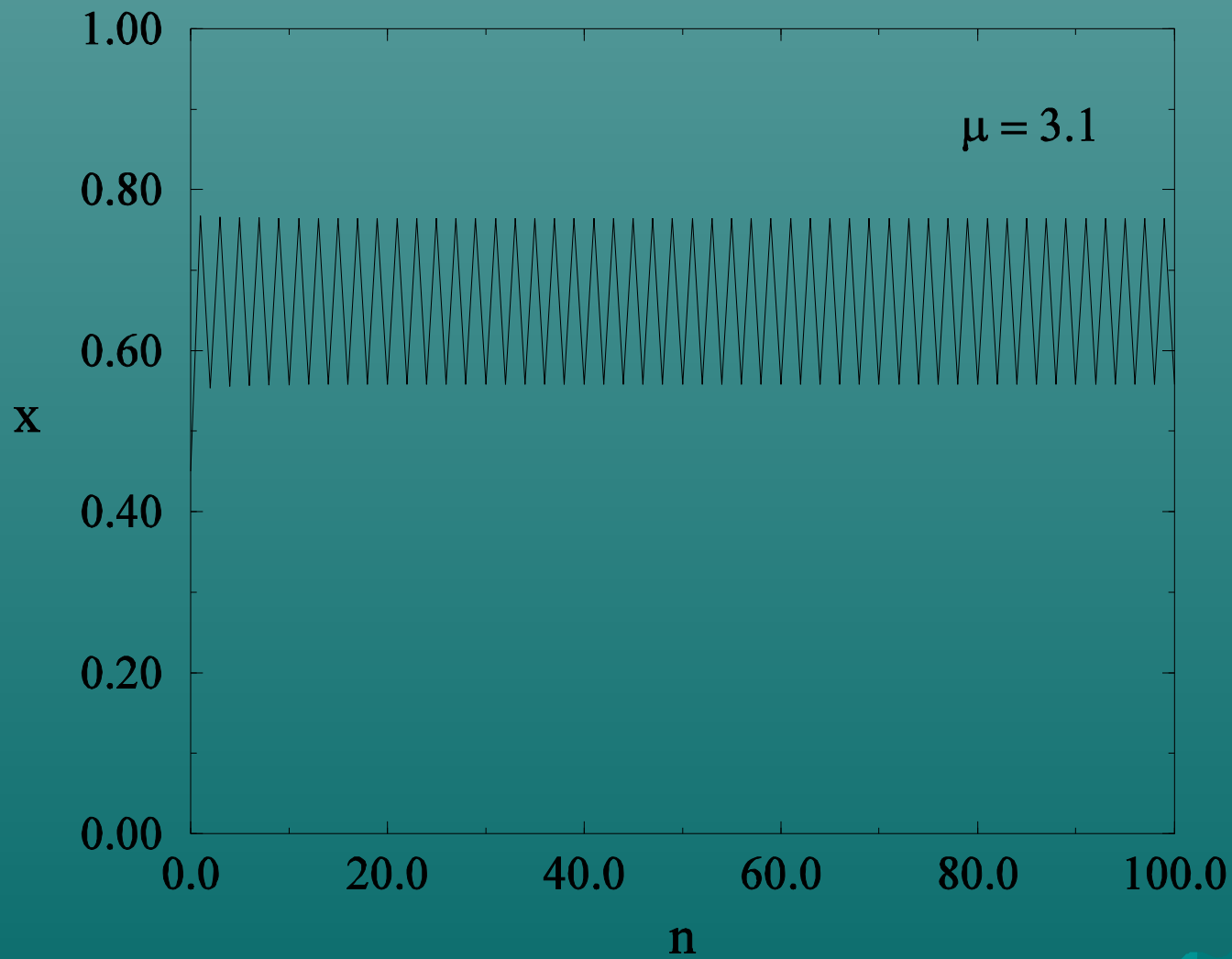
- ◆ Olhamos apenas a variável x
- ◆ Construimos o mapa estroboscópico diretamente :

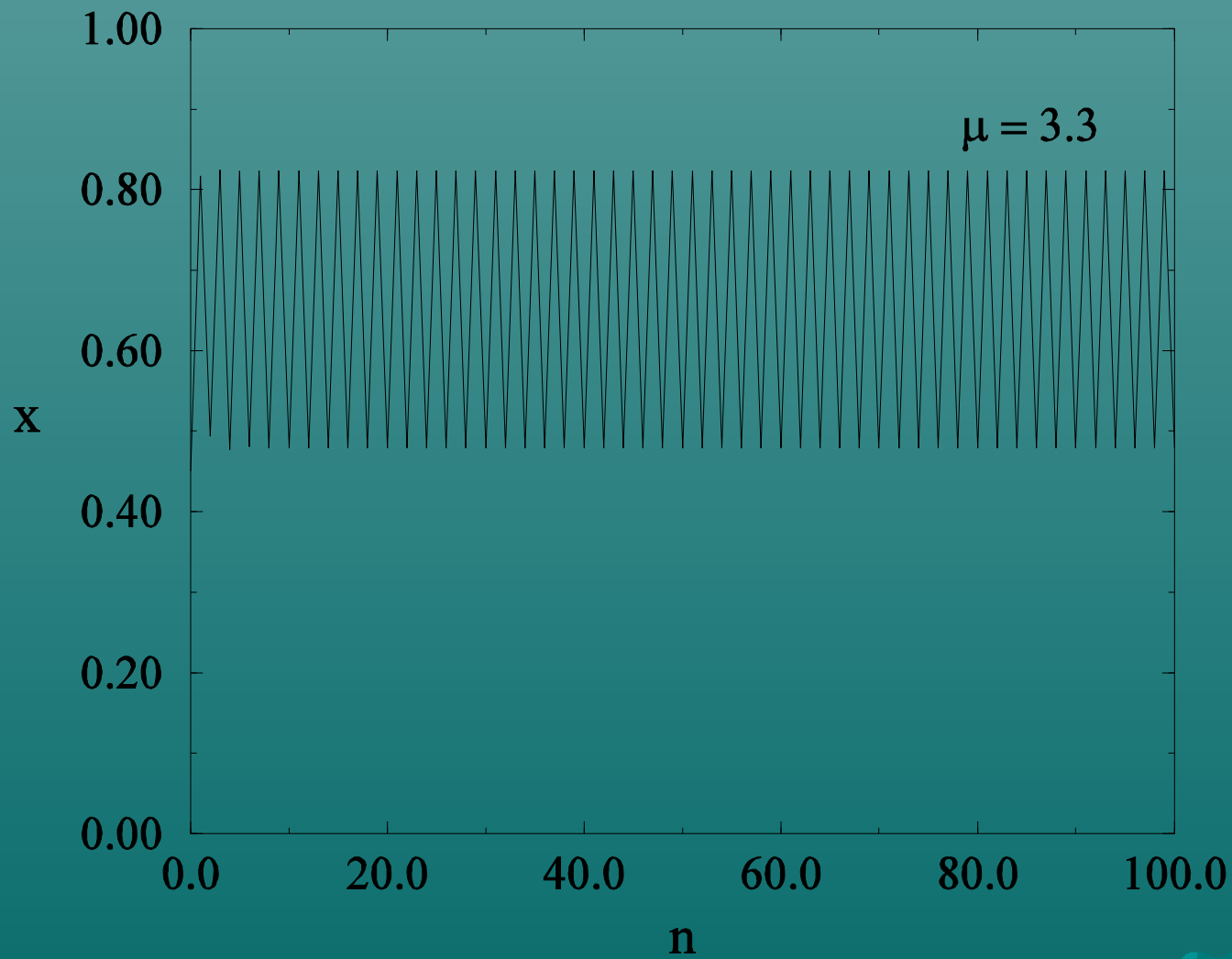
$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

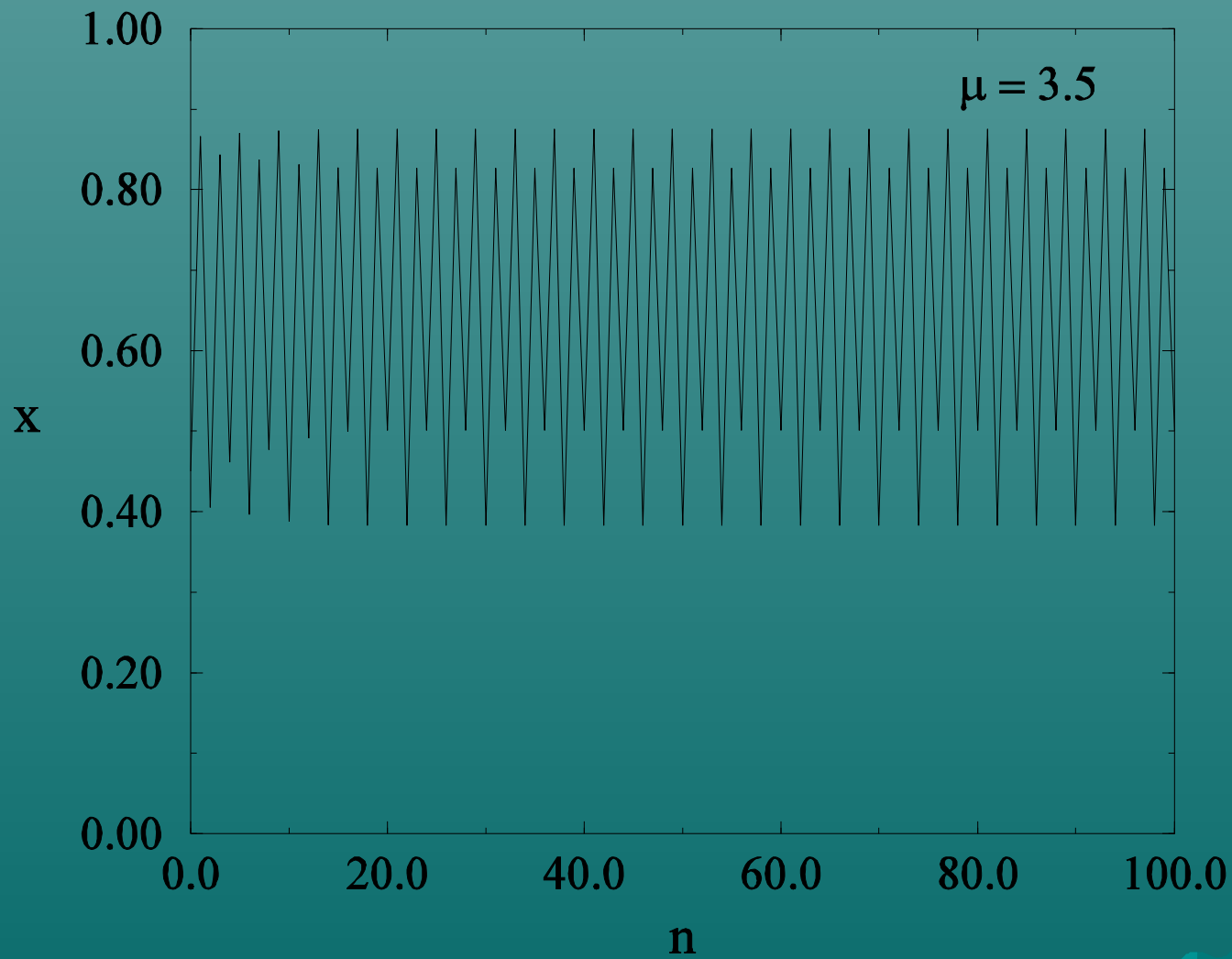
- ◆ O parâmetro μ faz o papel de
- ◆ $x=0$ é ponto de equilíbrio instável F_0
- ◆ $x=(\mu-1)/\mu$ é ponto de equilíbrio estável se $\mu < 3$

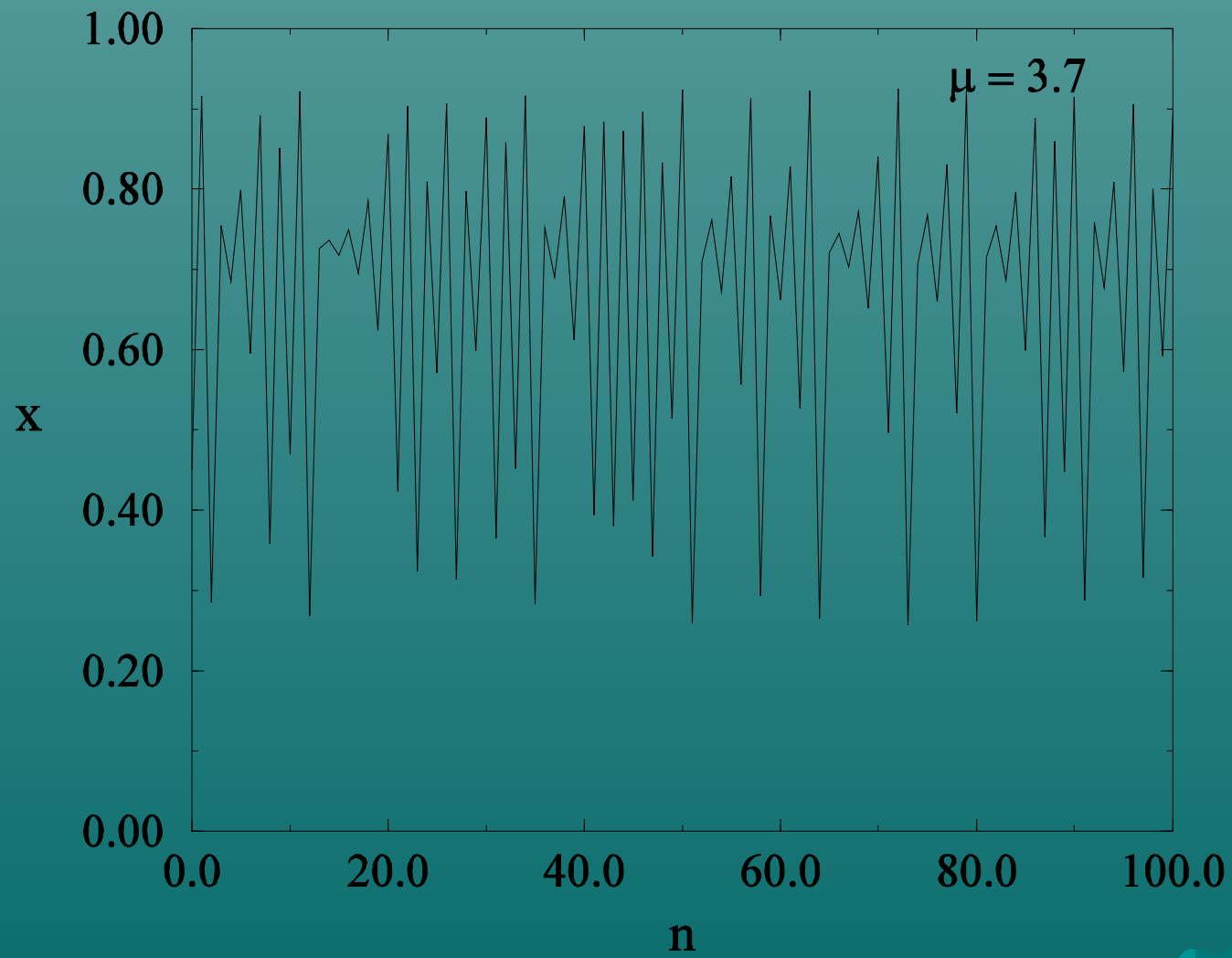


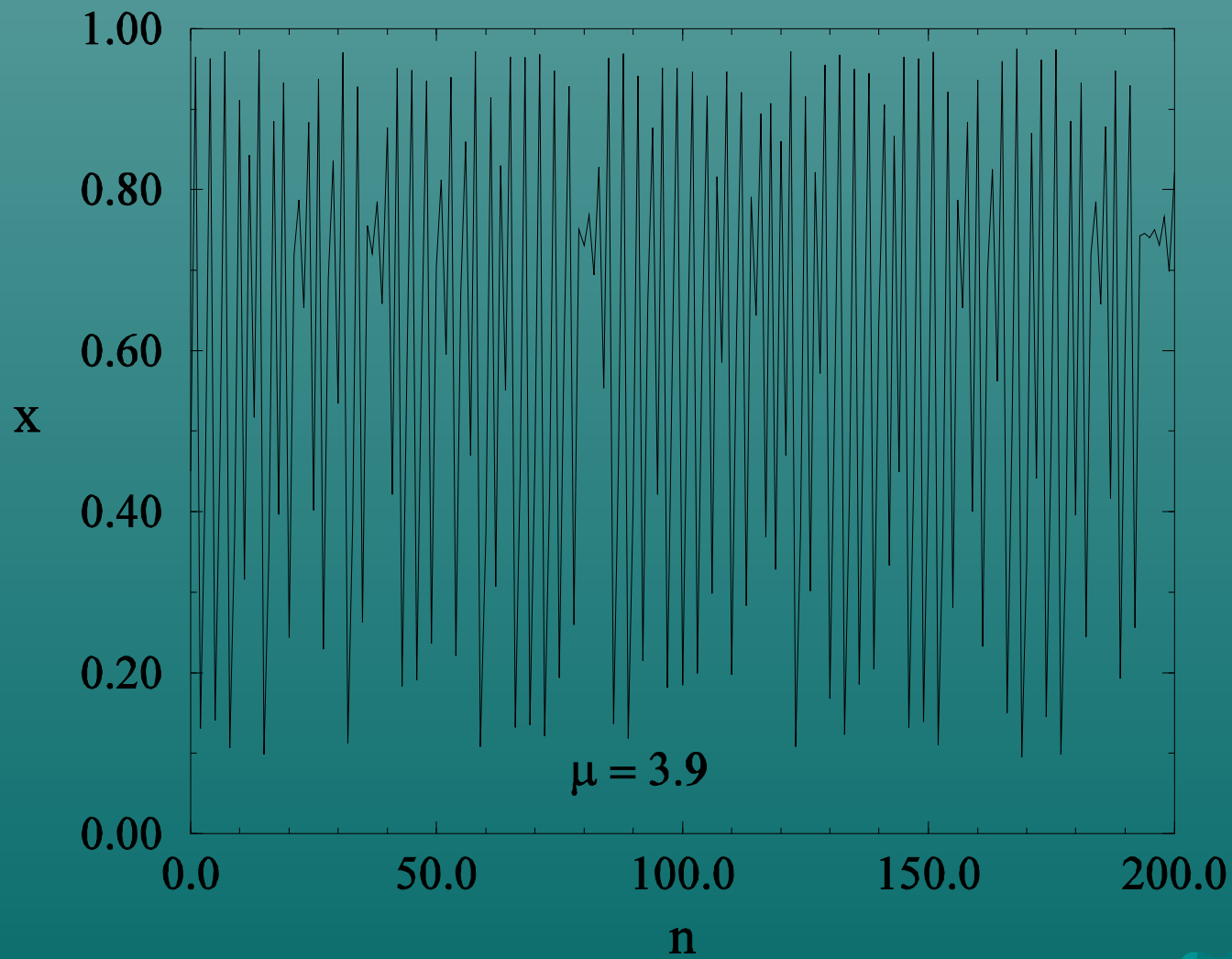




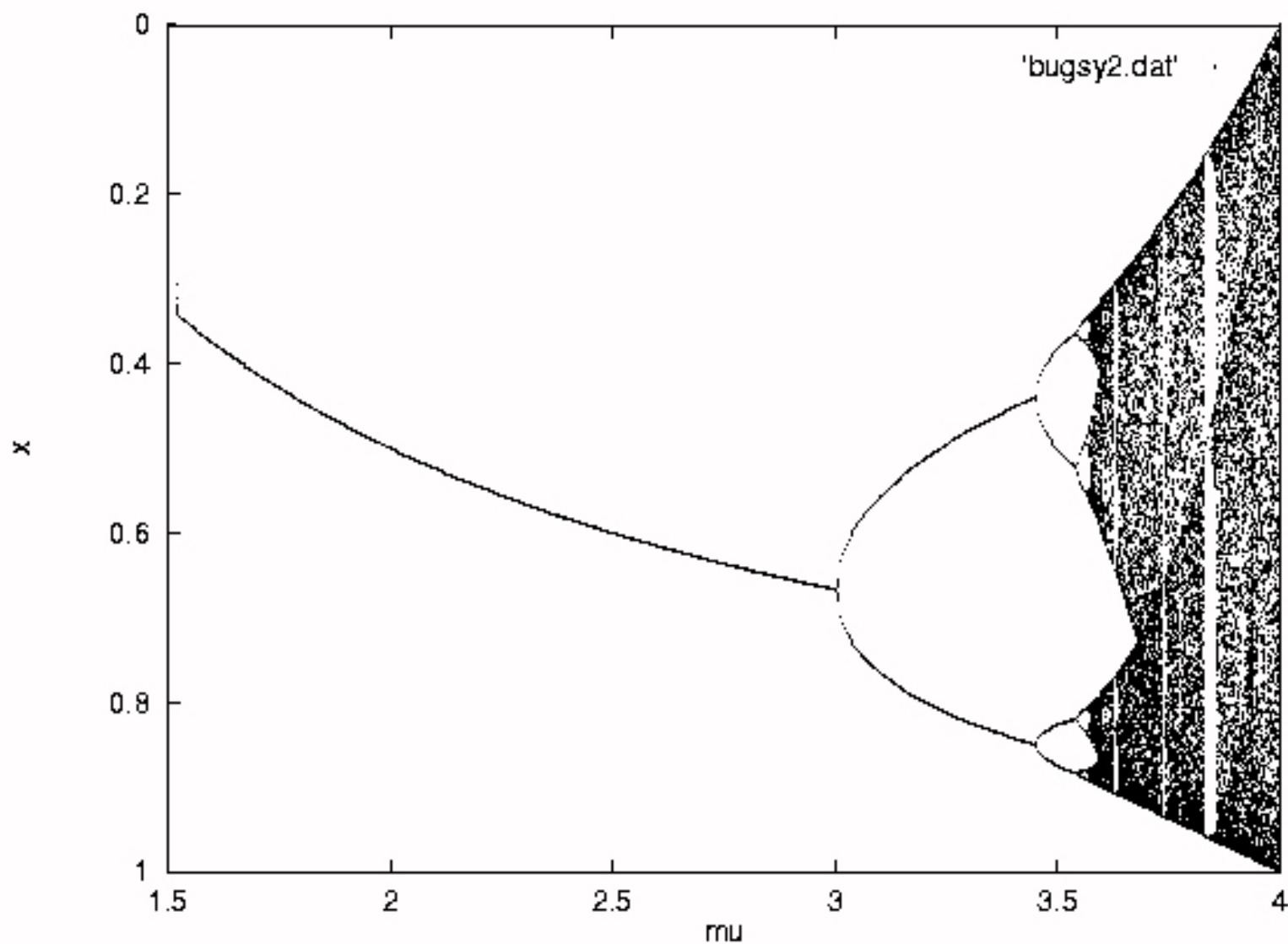


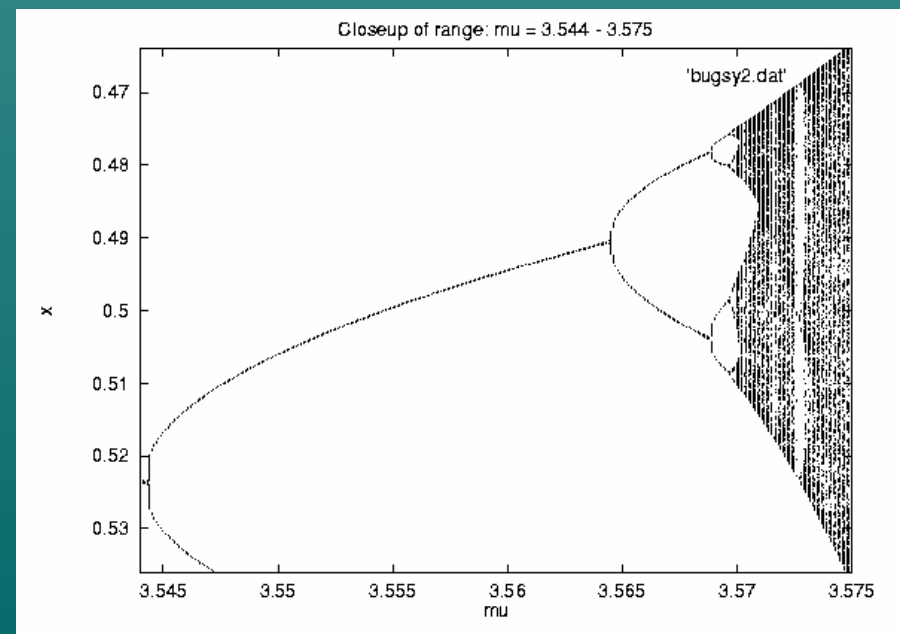
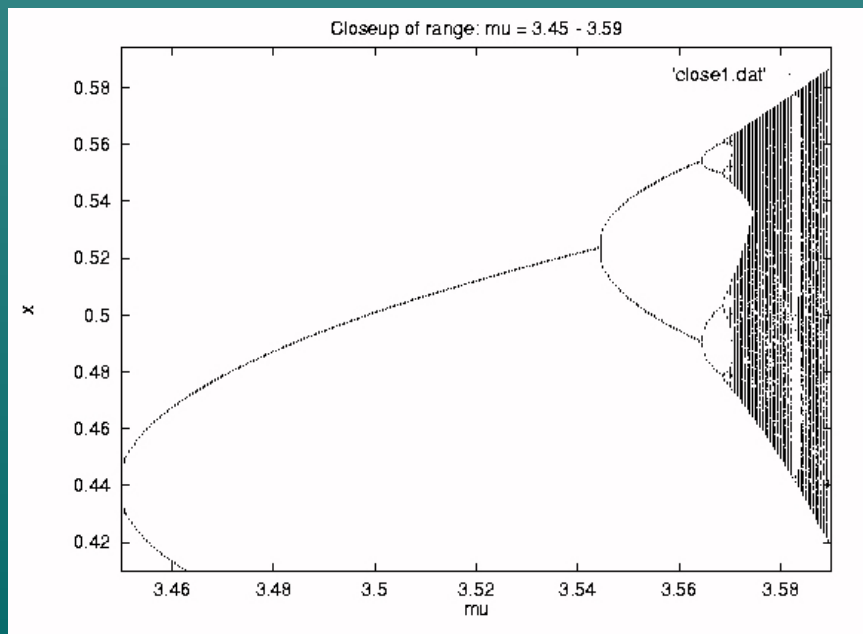
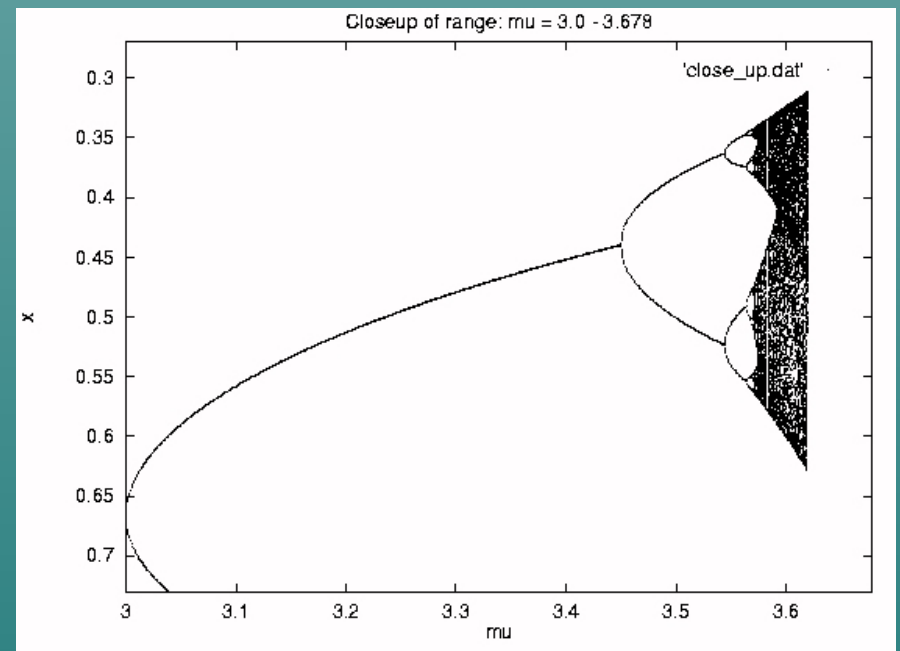
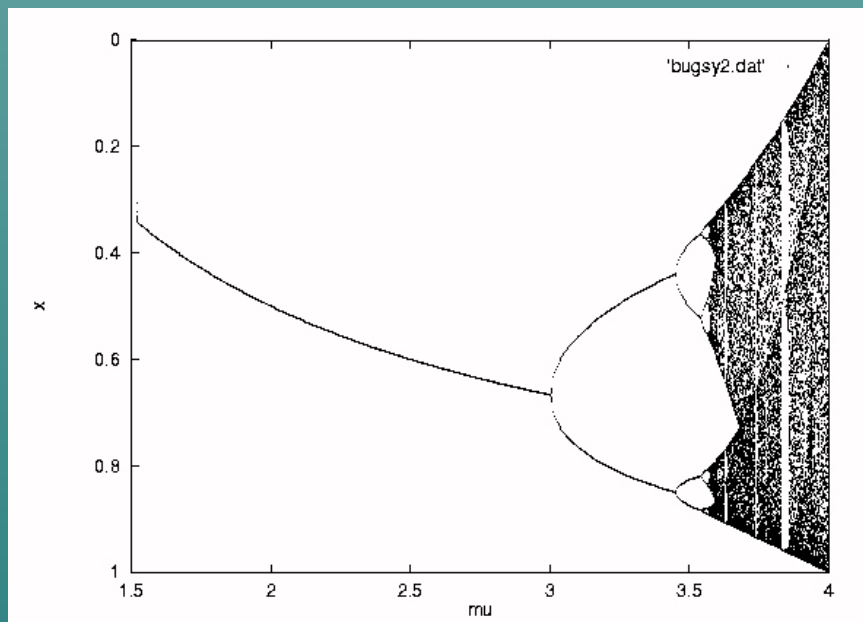






Rota para o caos por duplicação de período





Conclusões

- ◆ **Caos = sensibilidade a condições iniciais** (efeito borboleta). Apesar do determinismo das equações de movimento nosso poder de previsão é limitado.
- ◆ **Esticar e Dobrar** é o mecanismo dinâmico que produz caos (dinâmica do padeiro).

- ◆ Onde há caos há fractais.
- ◆ Condições mínimas para existência de caos: pelo menos 3 variáveis e equações não-lineares.