FM003 1S-2006

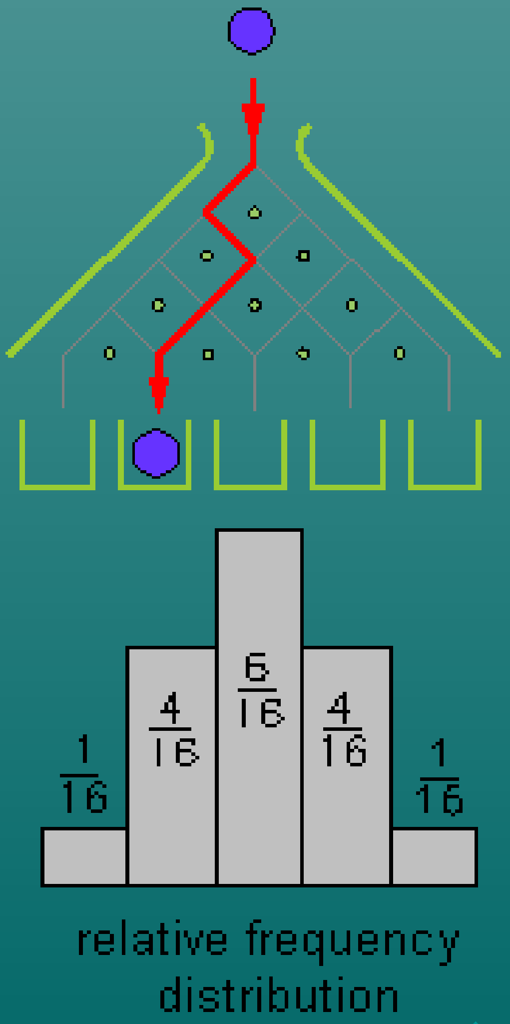
Introdução à Teoria do Caos

Marcus A.M. de Aguiar

Resumo

- 1 – O que é Caos
- 2 - O mecanismo universal gerador de caos
- 3 – Exemplos
- 4 - Rotas para o caos

Caos e Determinismo



- As equações de Newton são determinísticas: dada uma condição inicial devemos ser capazes de determinar o movimento futuro.

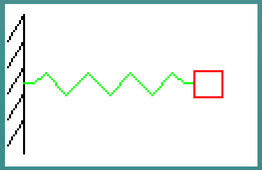
- Se jogamos as bolinas sempre do mesmo modo, porque elas não caem sempre no mesmo lugar?

- J.C. Maxwell e H. Poincaré: toda causa tem um efeito, mas causas muito parecidas podem ter efeitos muito diferentes!

- Lorenz: sistemas muito simples podem ter comportamentos complexos, onde pequenas diferenças são amplificadas, levando a um comportamento aleatório.

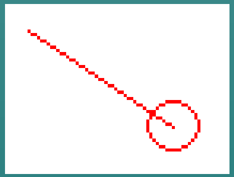
Vamos fazer um passeio do *simples* ao *caótico*. O objetivo dessa primeira parte do seminário é entender o que significa caos.

Exemplos de sistemas regulares:

1) 

Sistema massa-mola

$$F(x) = -kx \quad V(x) = \frac{kx^2}{2}$$

2) 

Pêndulo simples

$$\tau_\theta = -mgl\sin(\theta) \quad v(\theta) = -mgl\cos(\theta)$$

3) Oscilador anarmônico

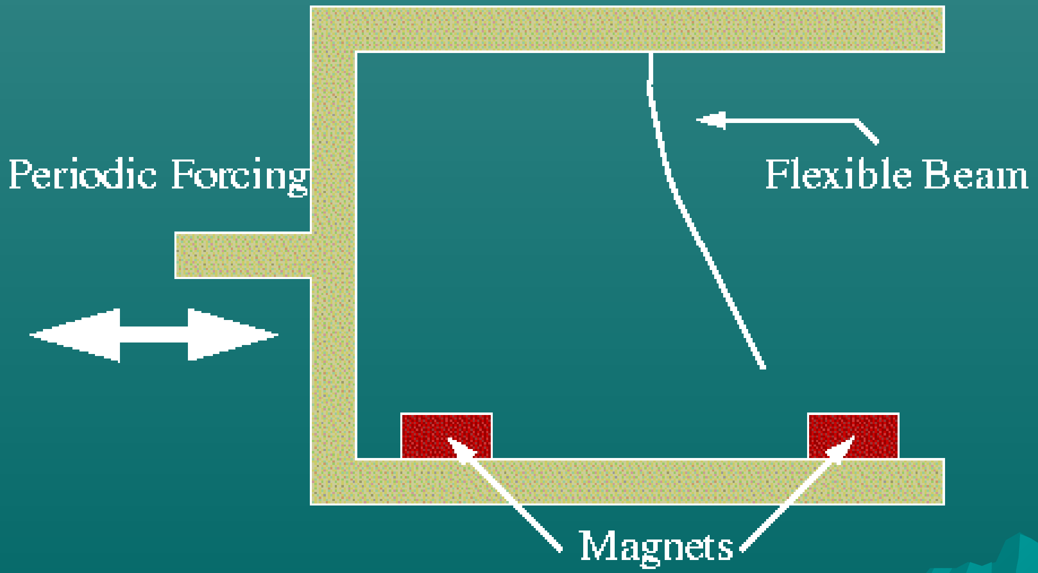
$$F(x) = kx - \lambda x^3 \quad V(x) = \frac{\lambda x^4}{4} - \frac{kx^2}{2}$$

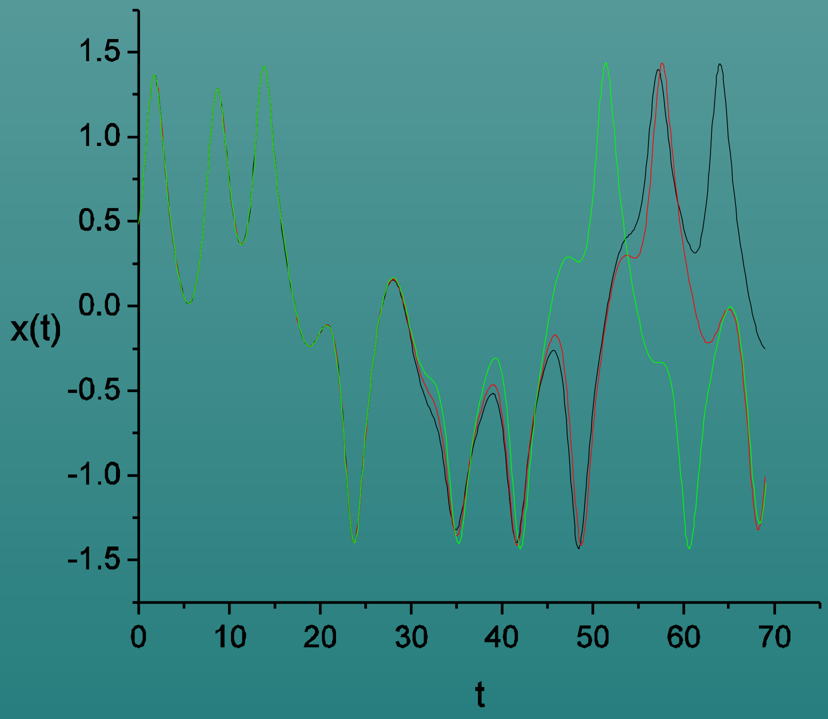
4) Sistema Terra-Sol

Sistema caóticos:

Pêndulo duplo com molas

O oscilador de Duffing $$\ddot{x} = kx - x^3 - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega_0 t)$$





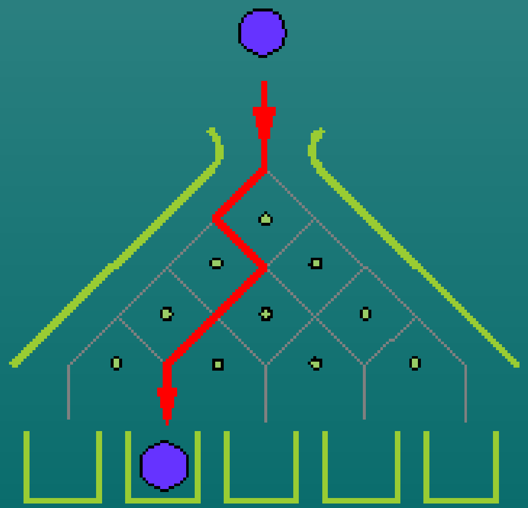
Preto: $x(0)=0.480$ $v(0)=0.355$
Vermelho: $x(0)=0.481$ $v(0)=0.355$
Verde: $x(0)=0.482$ $v(0)=0.355$

O movimento é tão complicado que torna-se imprevisível!

CAOS = sensibilidade à condições iniciais
=
imprevisibilidade

Resumo

- Caos = sensibilidade à condições iniciais
- Sistemas determinísticos muito simples podem ser imprevisíveis a tempos longos

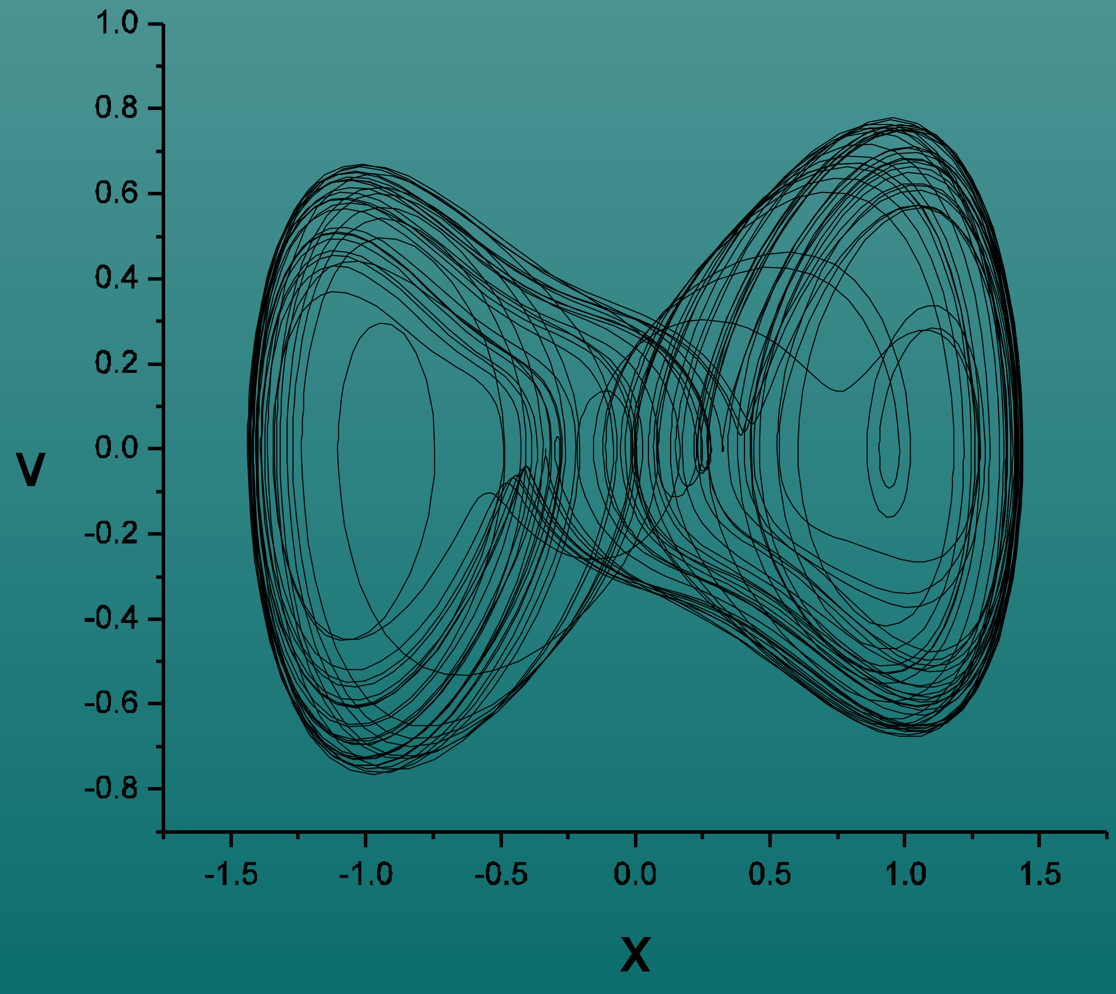


Condições iniciais muito próximas separam-se rapidamente: efeito borboleta

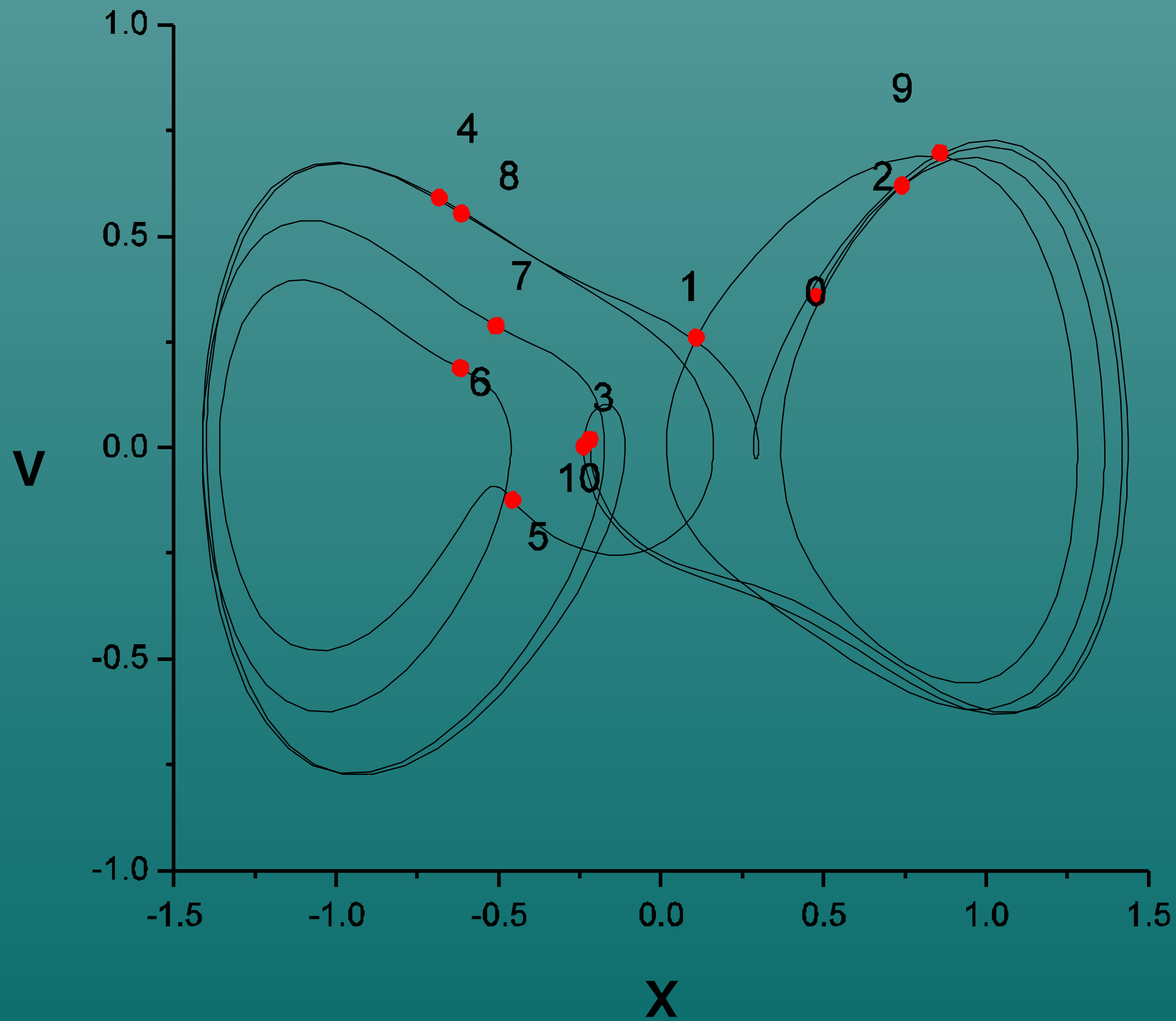
Qual o mecanismo que leva ao caos?

Para responder essa pergunta vamos fazer uma análise geométrica do problema.

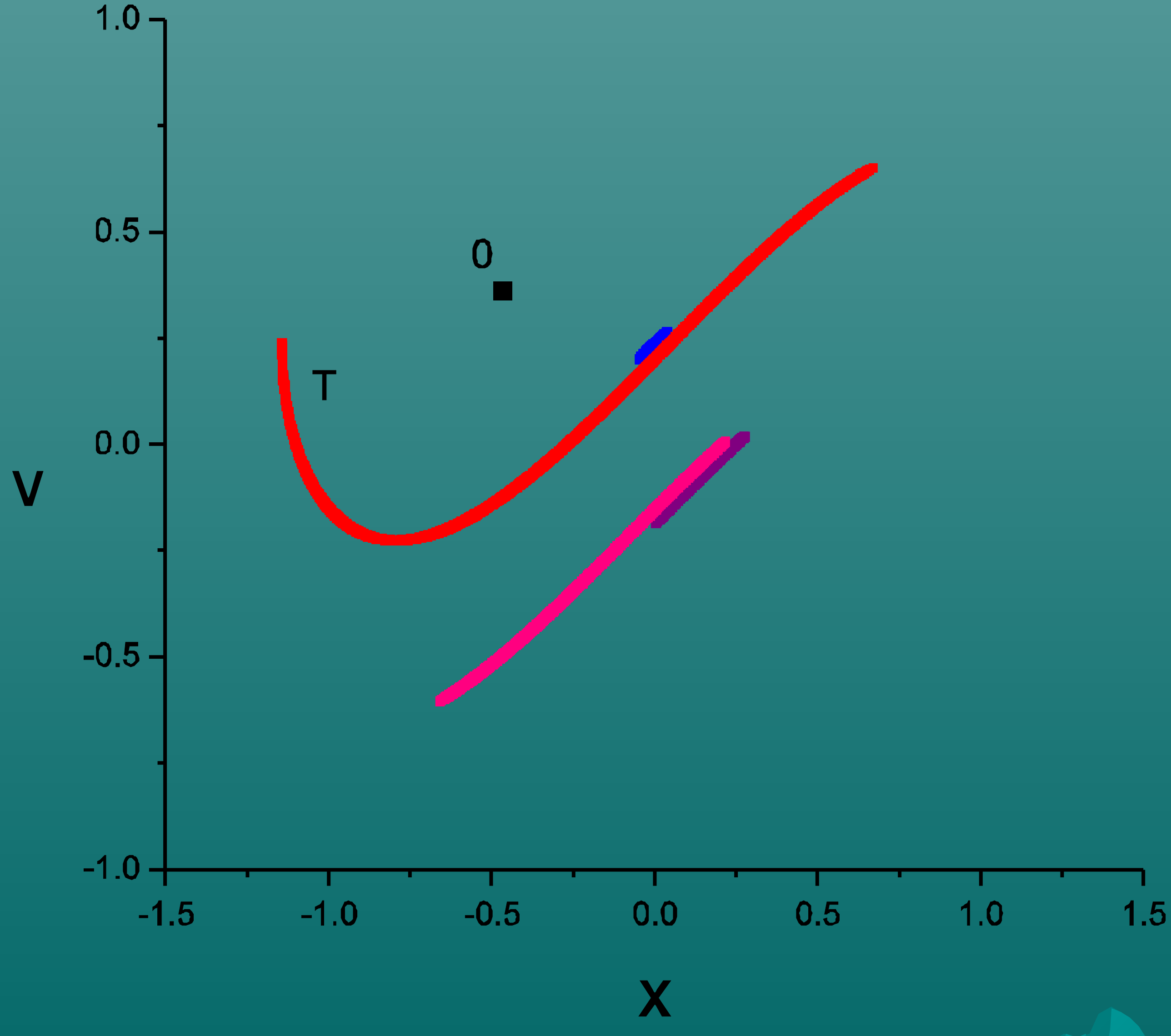
Trajetória típica do Oscilador de Duffing



Visão estroboscópica da mesma trajetória



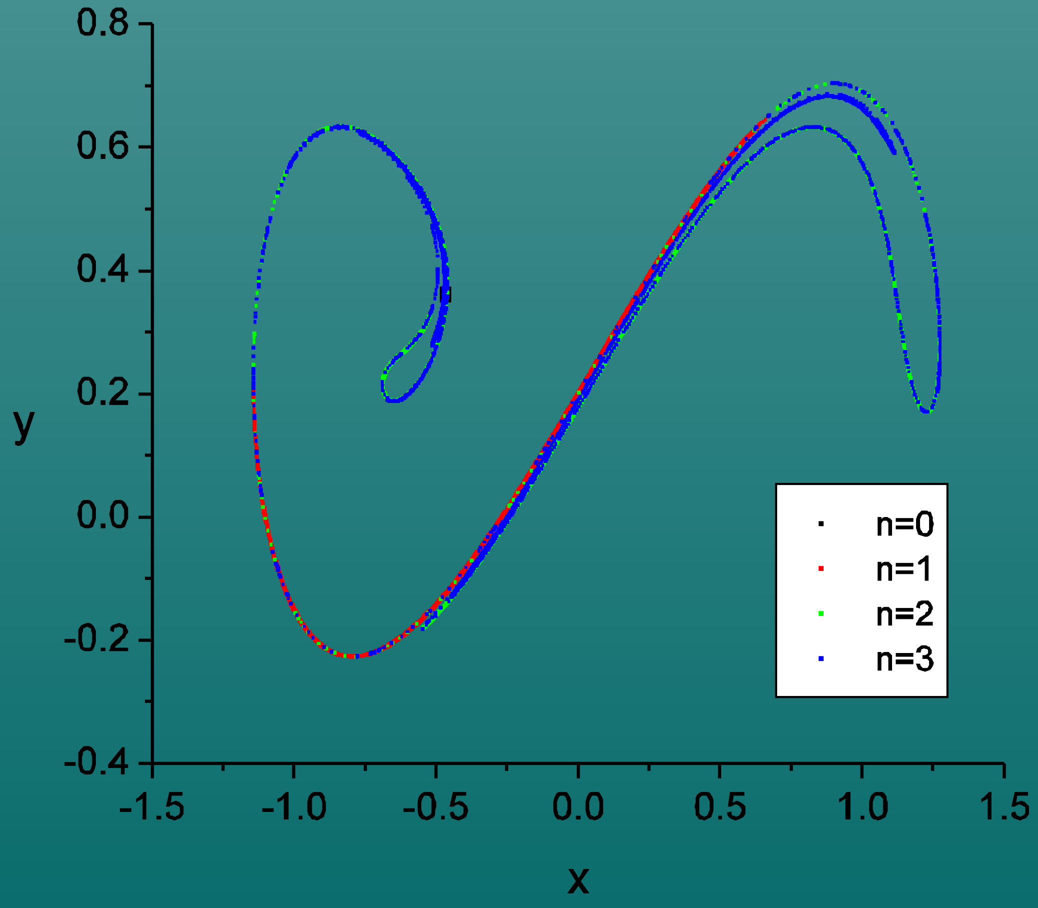
Visão estroboscópica de um grupo de trajetórias

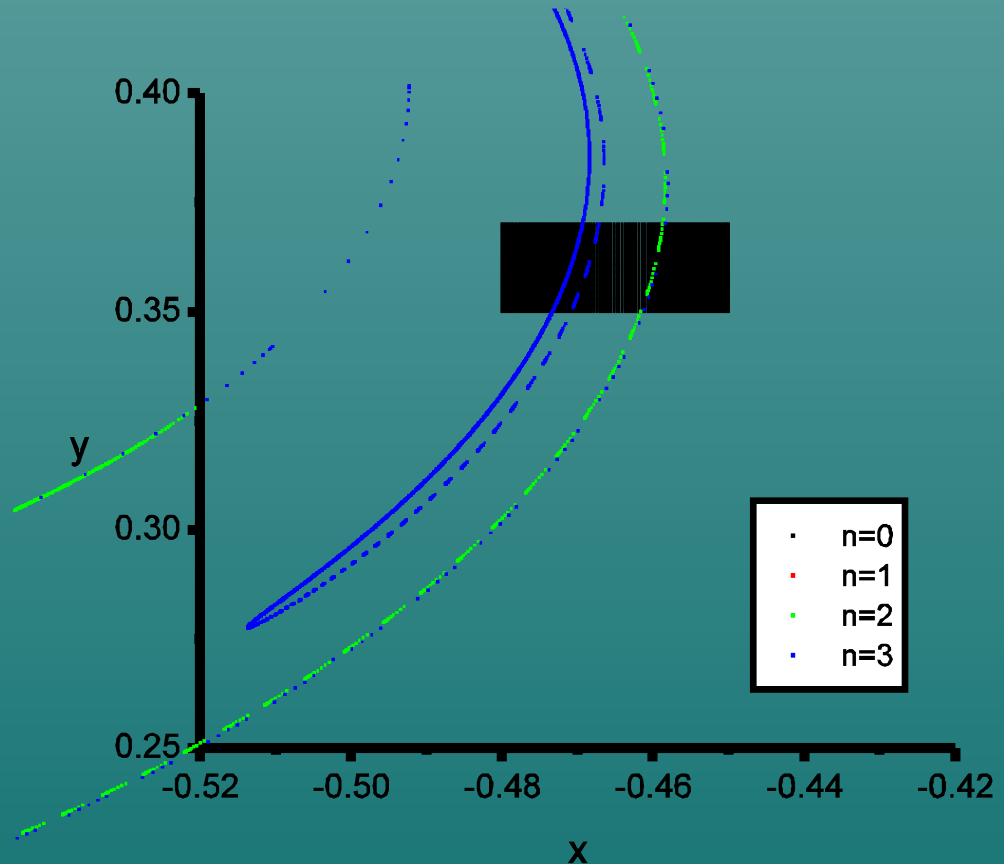


O mapa estroboscópico

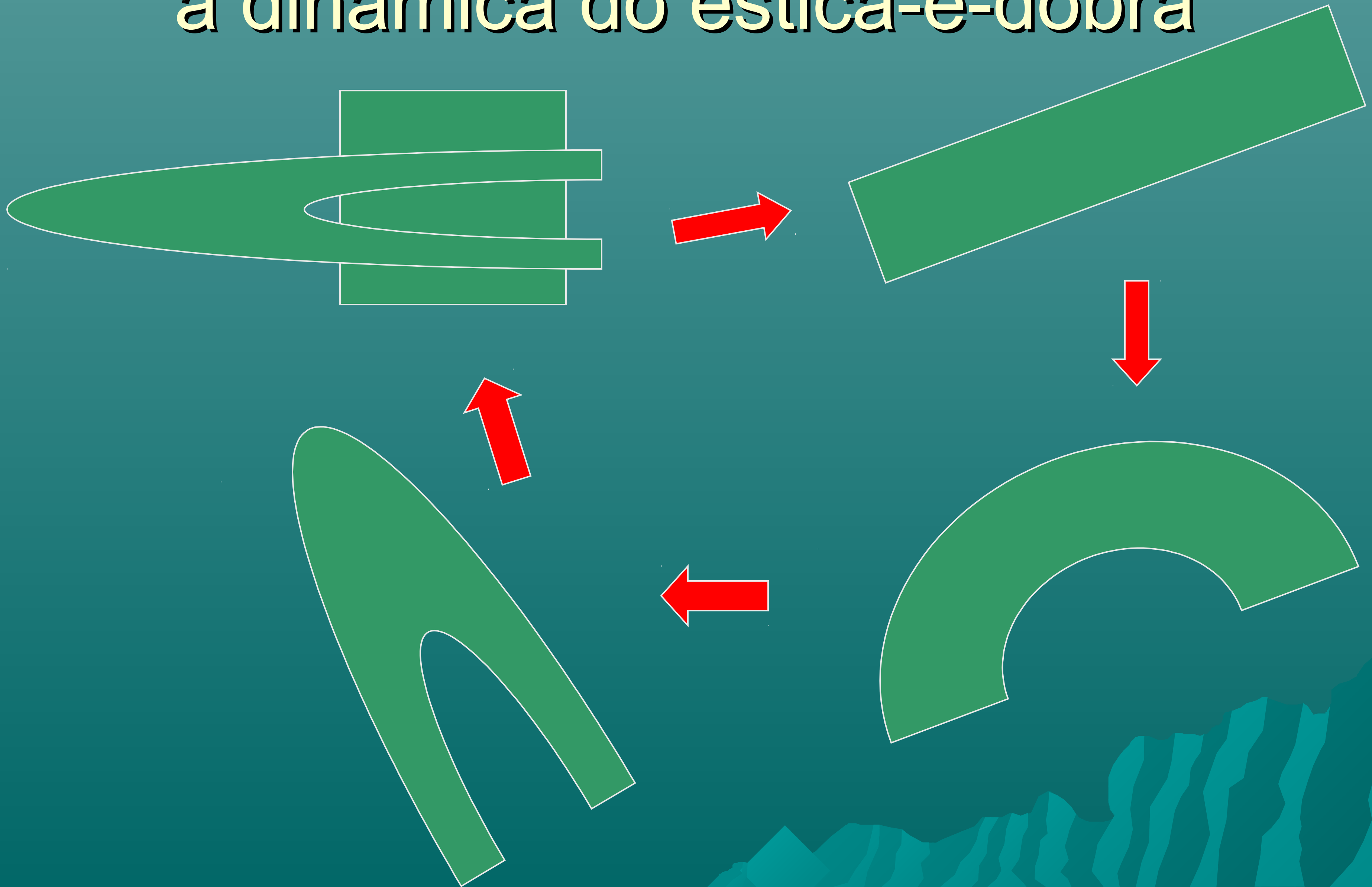
Definimos o mapa estroboscópico como a observação do estado do sistema apenas nos instantes 0, T, 2T, 3T, ... Perdemos alguma informação, mas ganhamos poder de análise.

Mapa Estroboscópico para Oscilador de Duffing

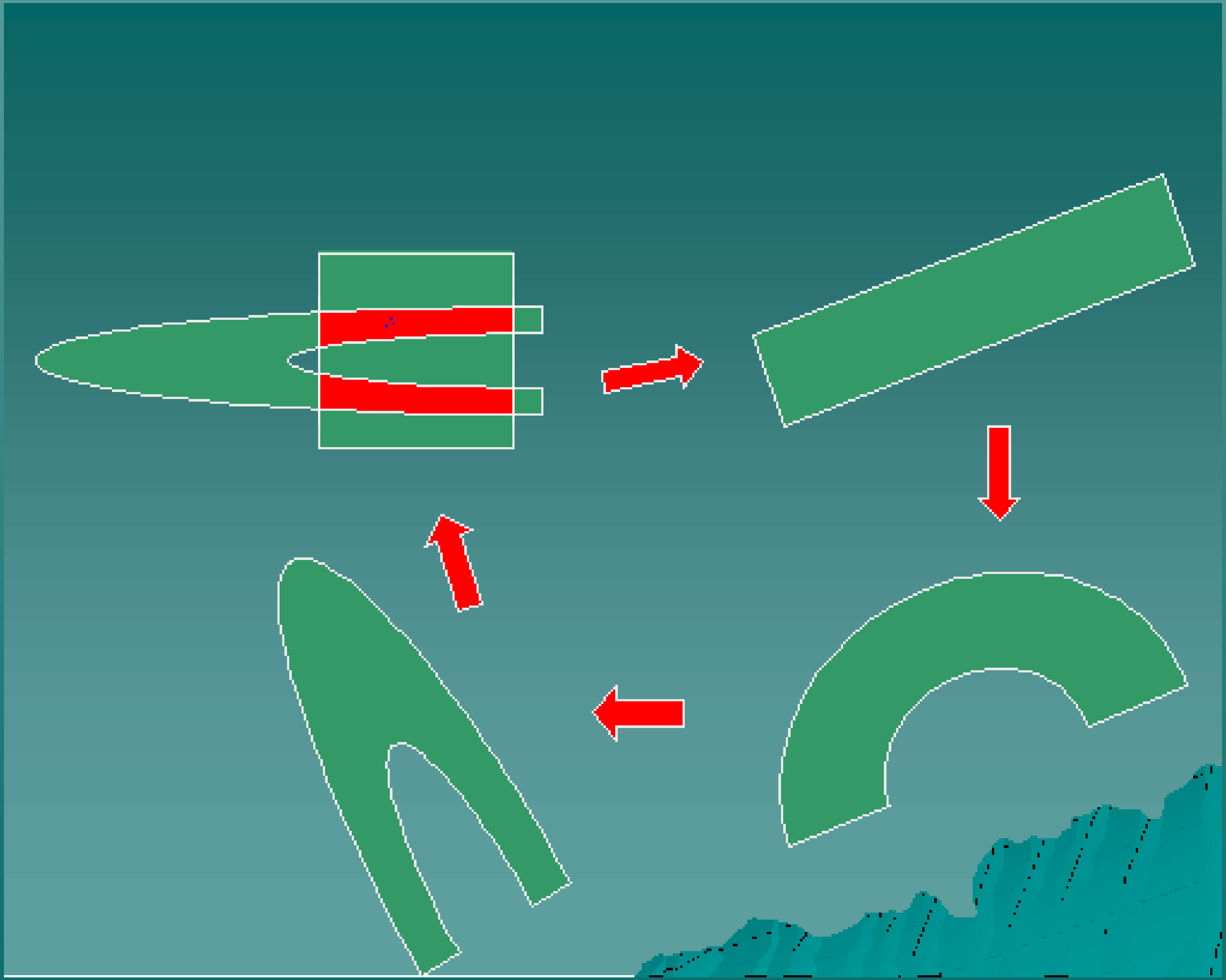


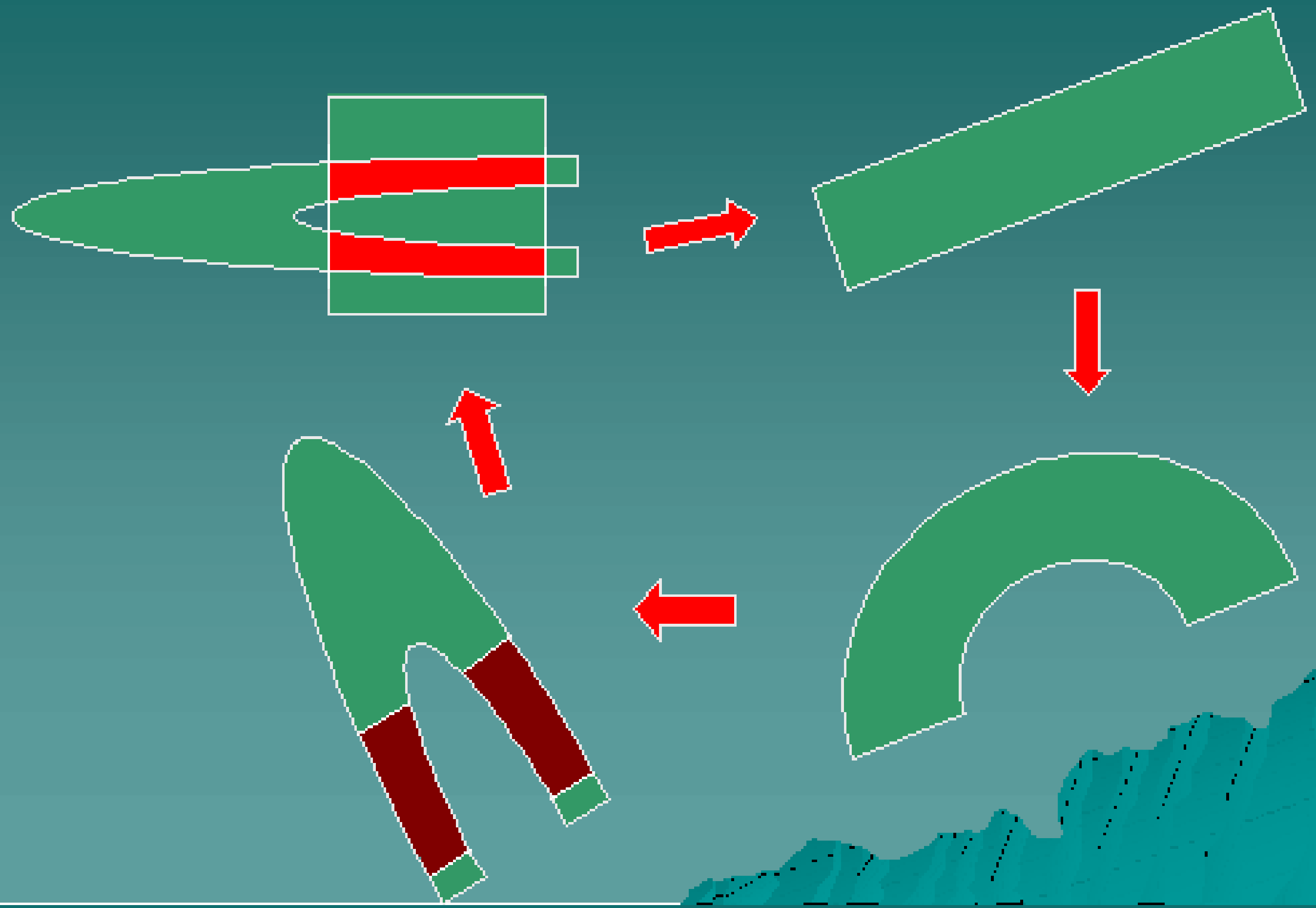

0.40
0.35
0.30
0.25
y
-0.52
-0.50
-0.48
-0.46
-0.44
-0.42
x
n=0
n=1
n=2
n=3

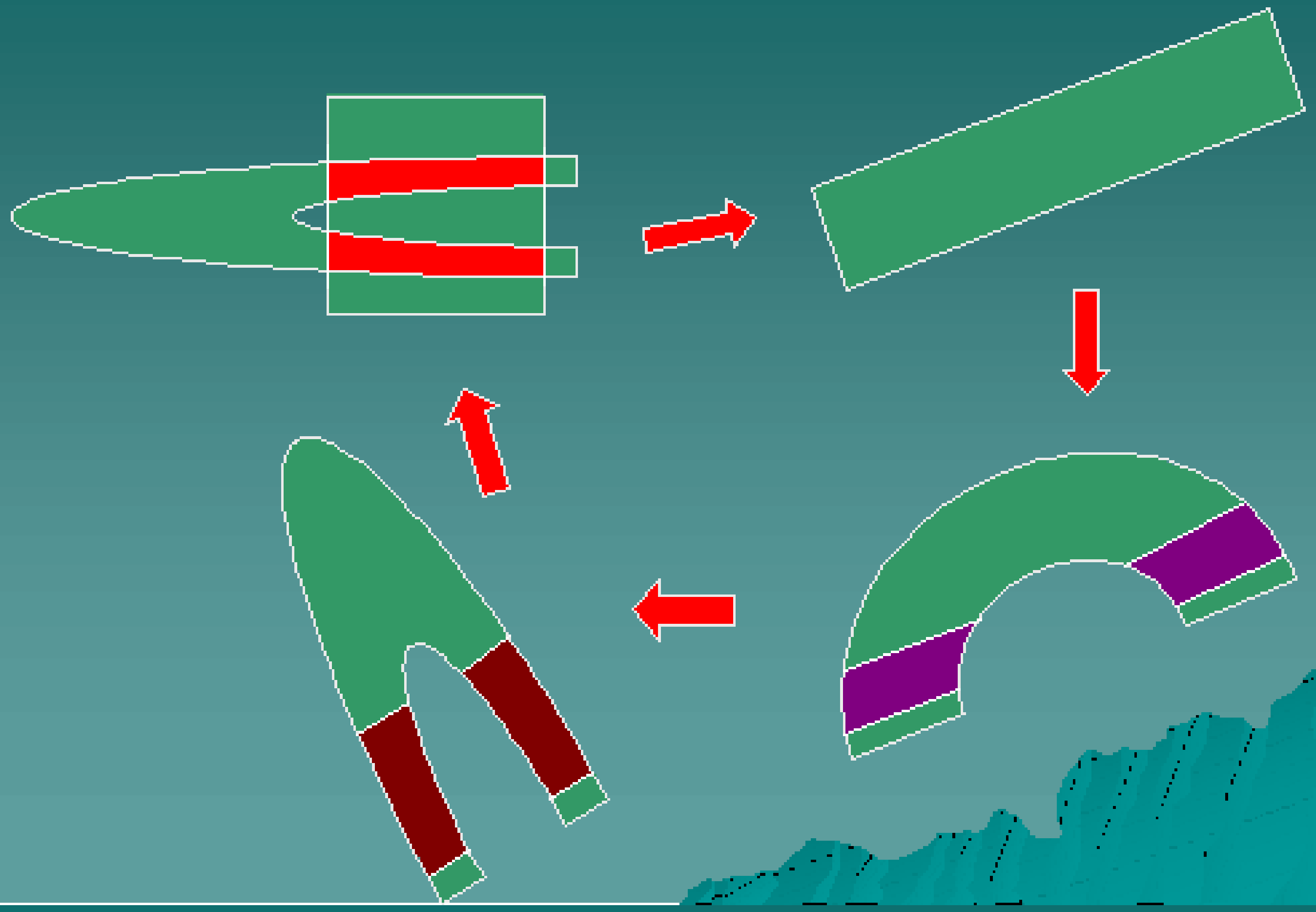
Modelo Simplificado:
a dinâmica do estica-e-dobra

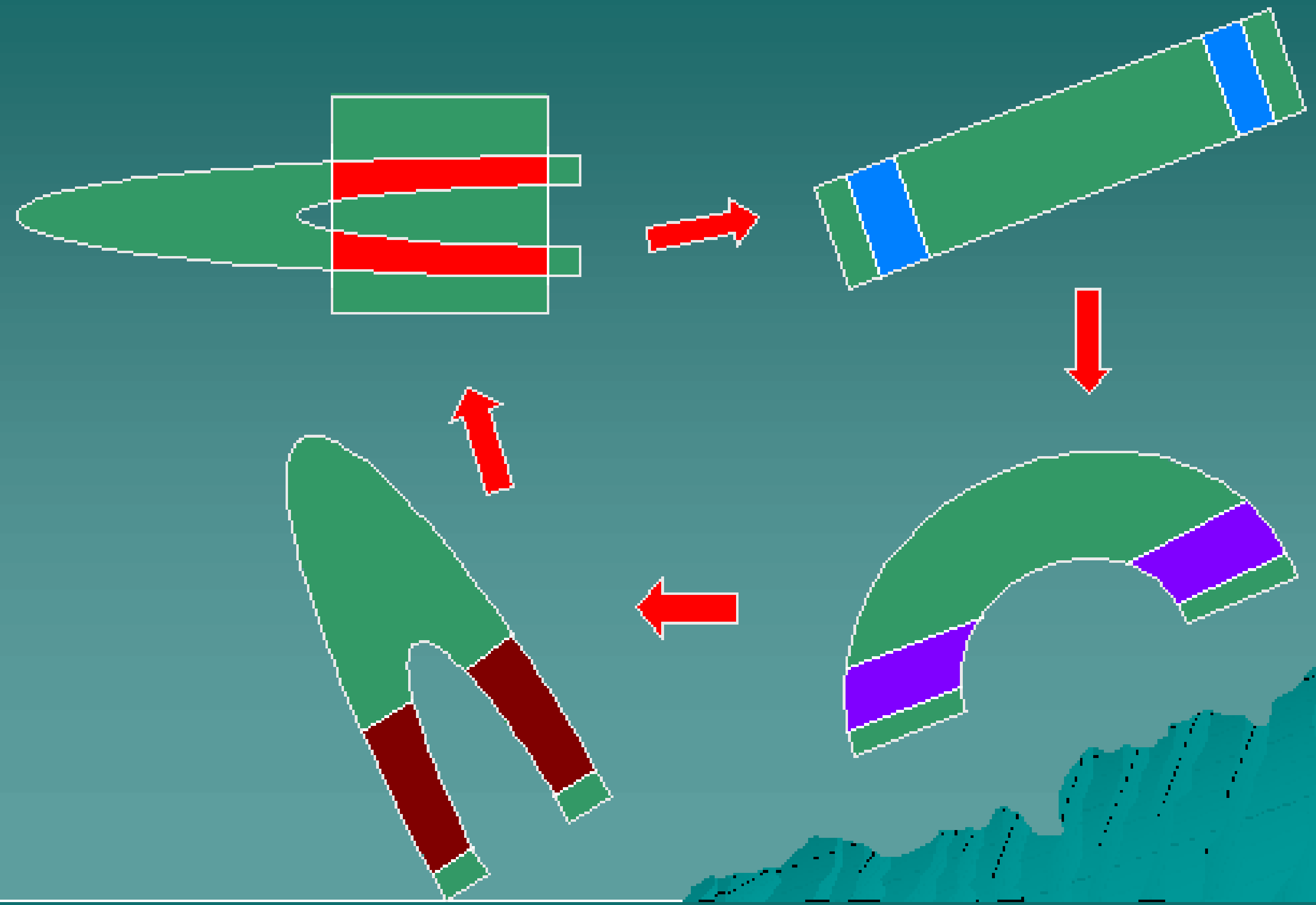


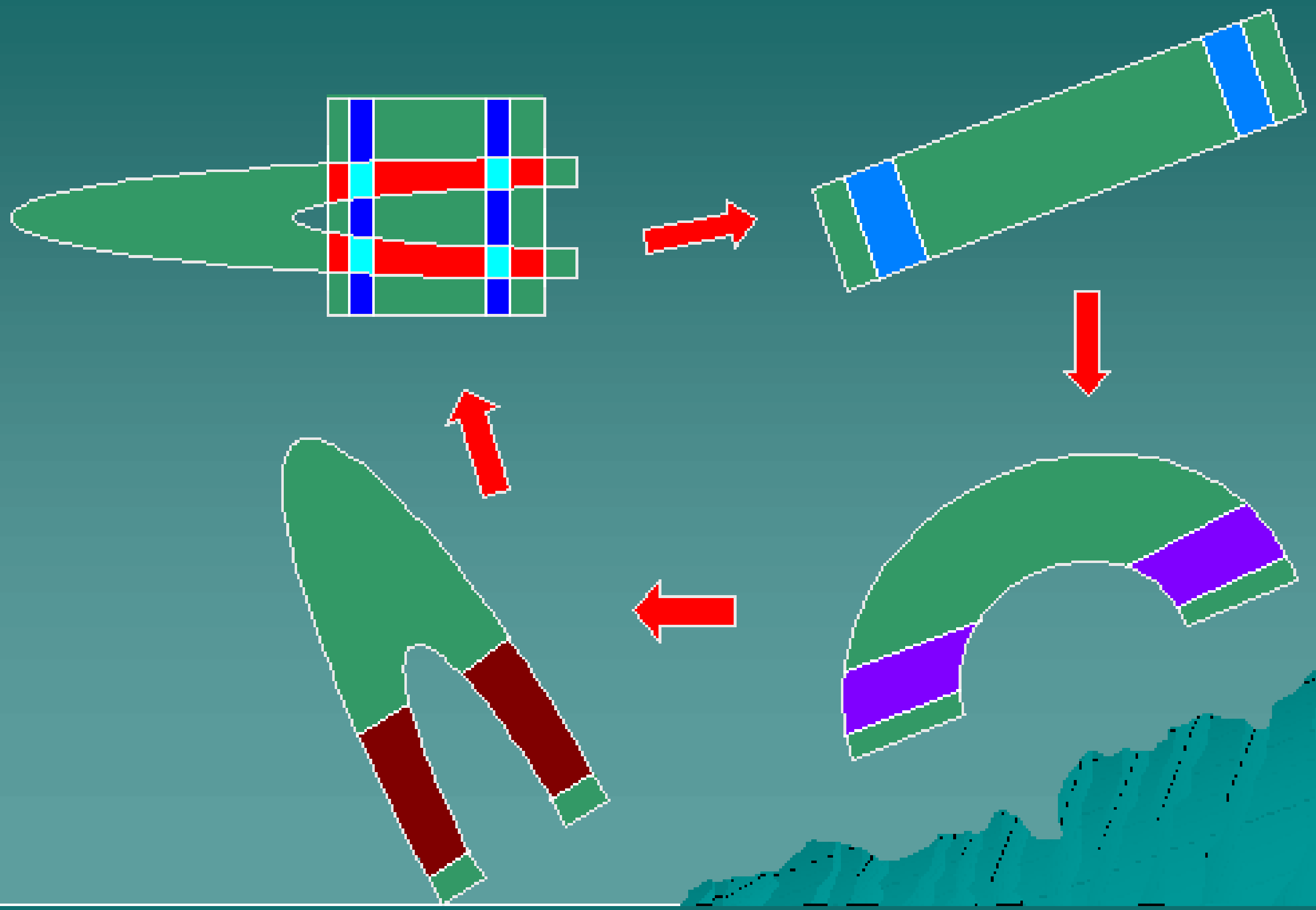
Quais são os pontos que retornaram próximos aos seus estados iniciais?

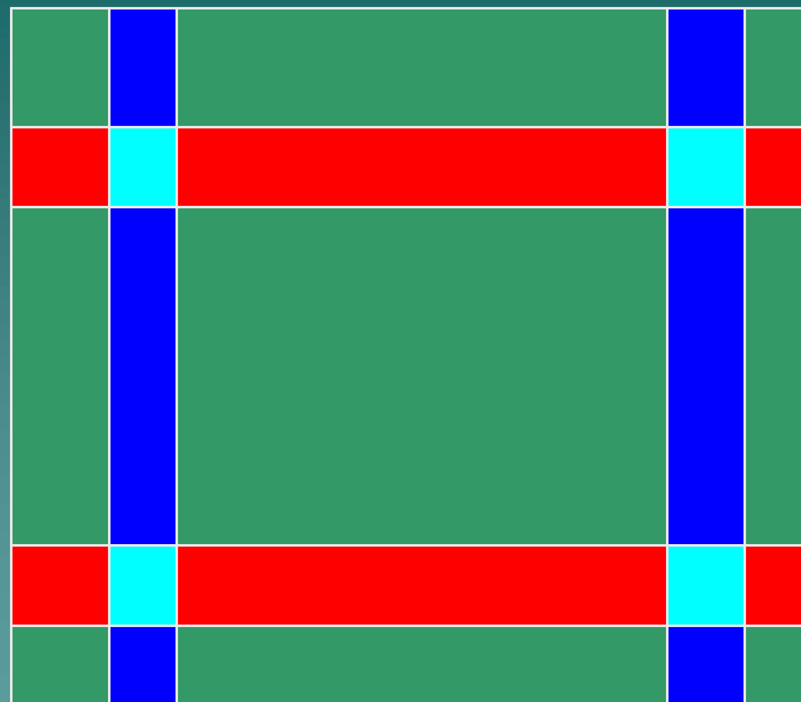


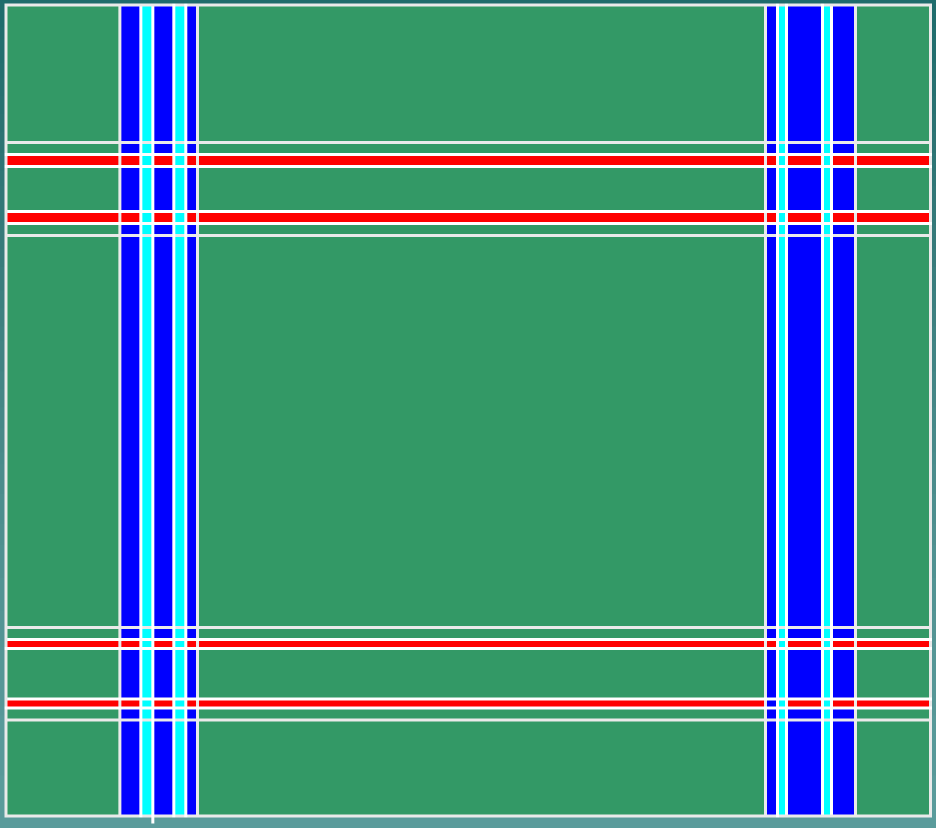












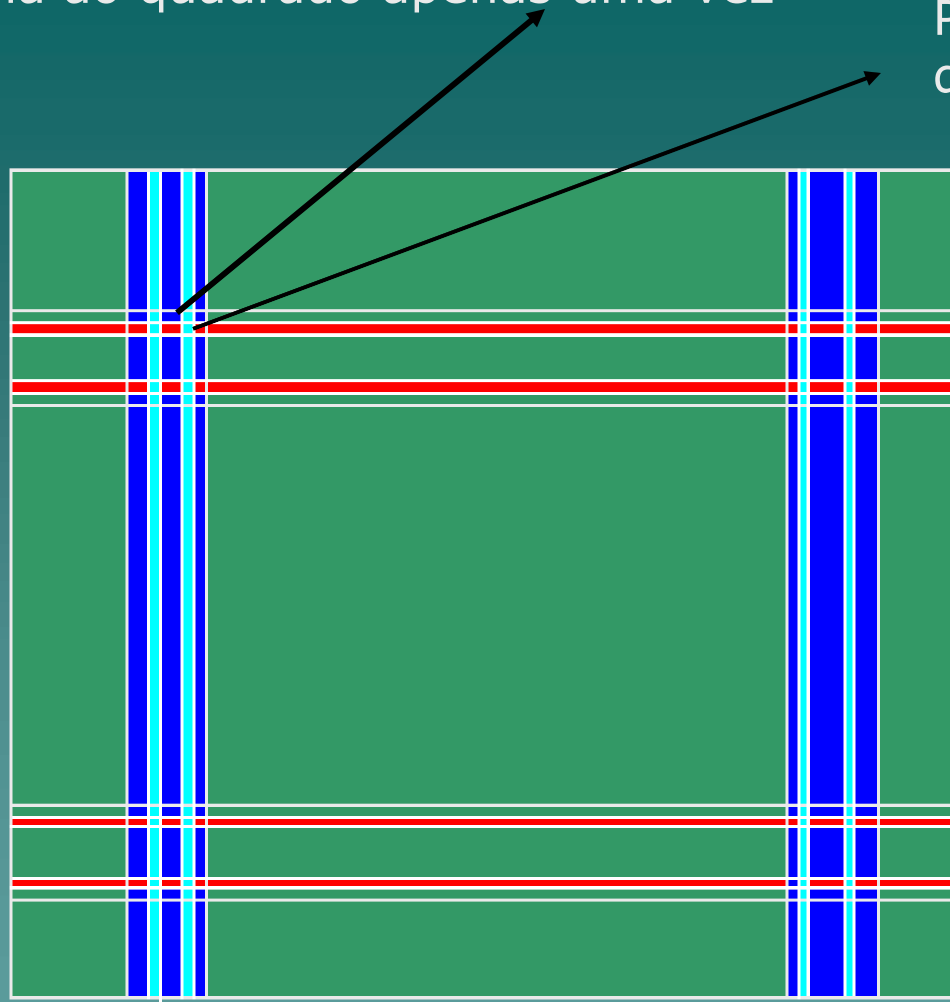
O conjunto de pontos que retorna ao quadrado N vezes

é composto por 2^N faixas verticais cujo limite é um fractal

Sensibilidade à condições iniciais = caos

Ponto retorna ao quadrado apenas uma vez

Ponto retorna ao quadrado 237 vezes!



O processo de esticar e dobrar é o mecanismo fundamental da geração de caos.

- O processo de levar o quadrado esticado e dobrado sobre si mesmo é chamado de *Mapa da Ferradura.*

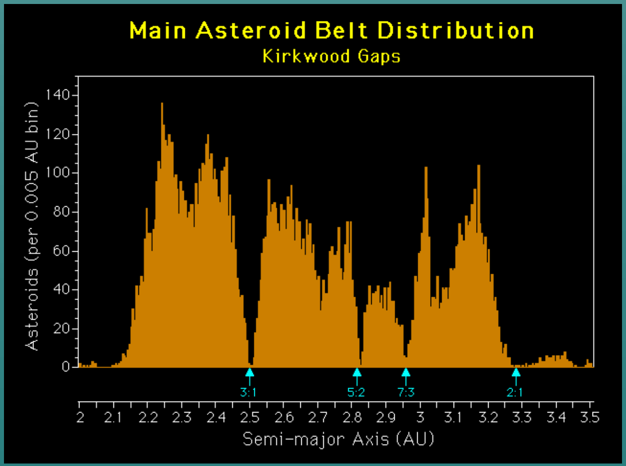
- Todo sistema onde pode-se identificar um mapa da ferradura apresenta caos. Além disso, todo sistema caótico tem um fractal associado a ele.

- O paradigma do um sistema caótico é o processo de fazer pão, onda a massa é esticada e dobrada várias vezes!

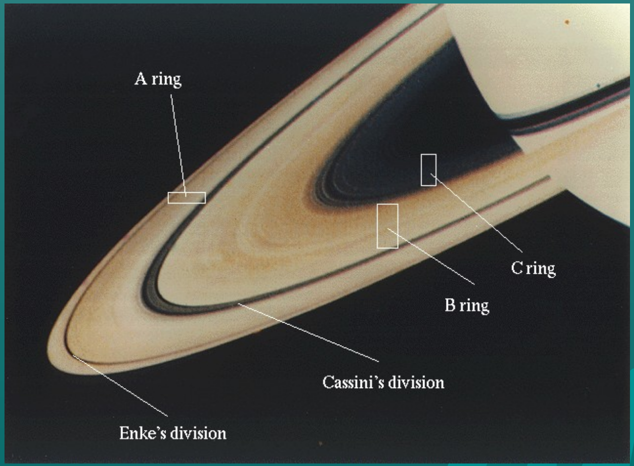
Exemplos de Sistemas com Movimento Caótico

Problemas de três corpos

- Cinturão de asteróides entre Marte e Júpiter

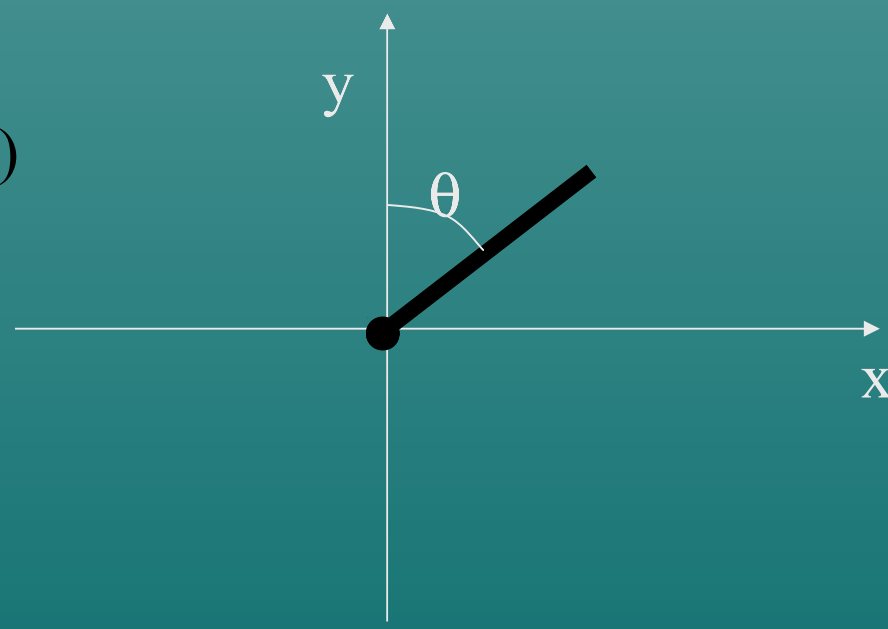


- Anéis de Saturno



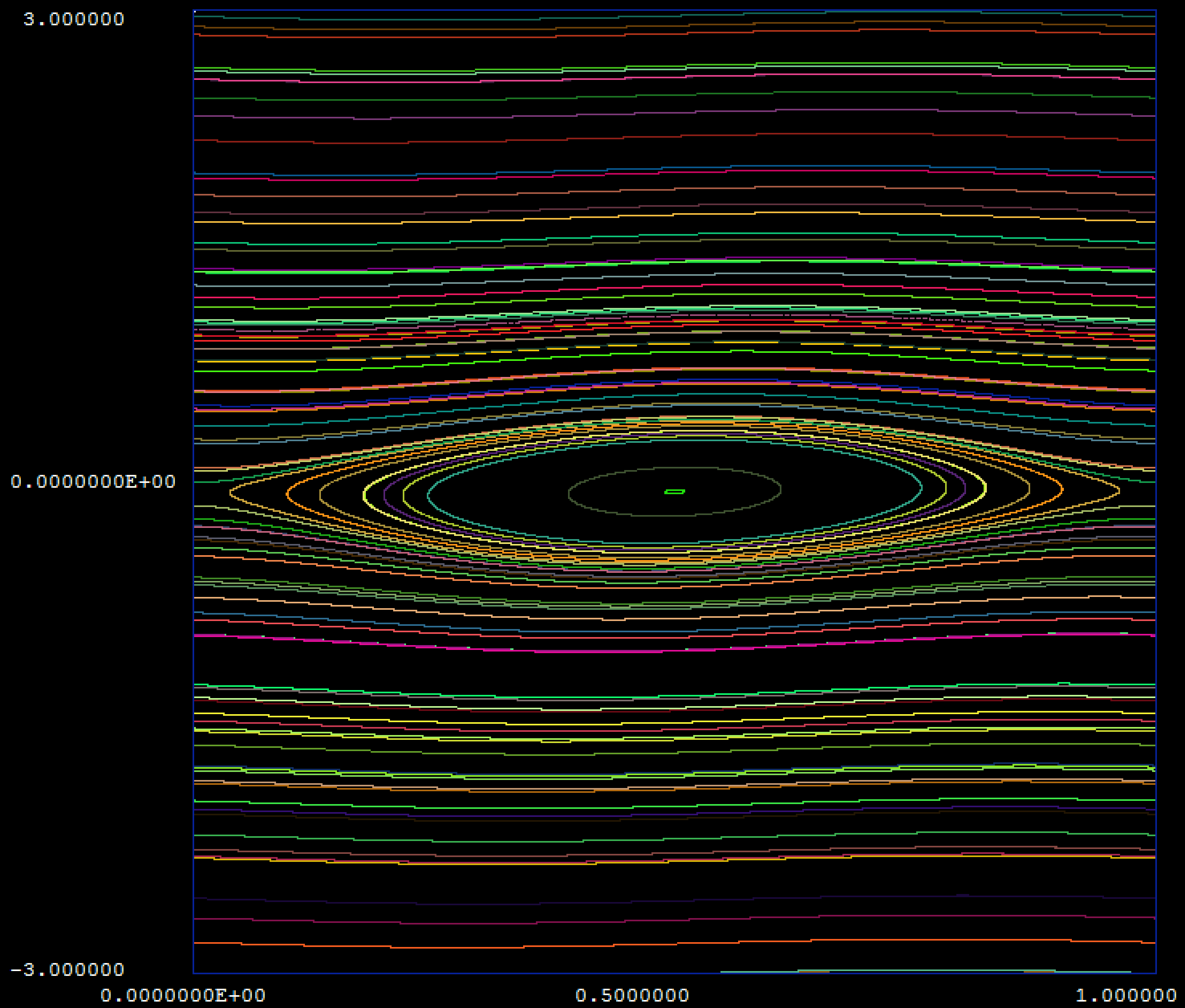
O Mapa padrão (conservativo)

$$H = \frac{p^2}{2I} + k\cos\theta \sum_n \delta(t - n\tau)$$

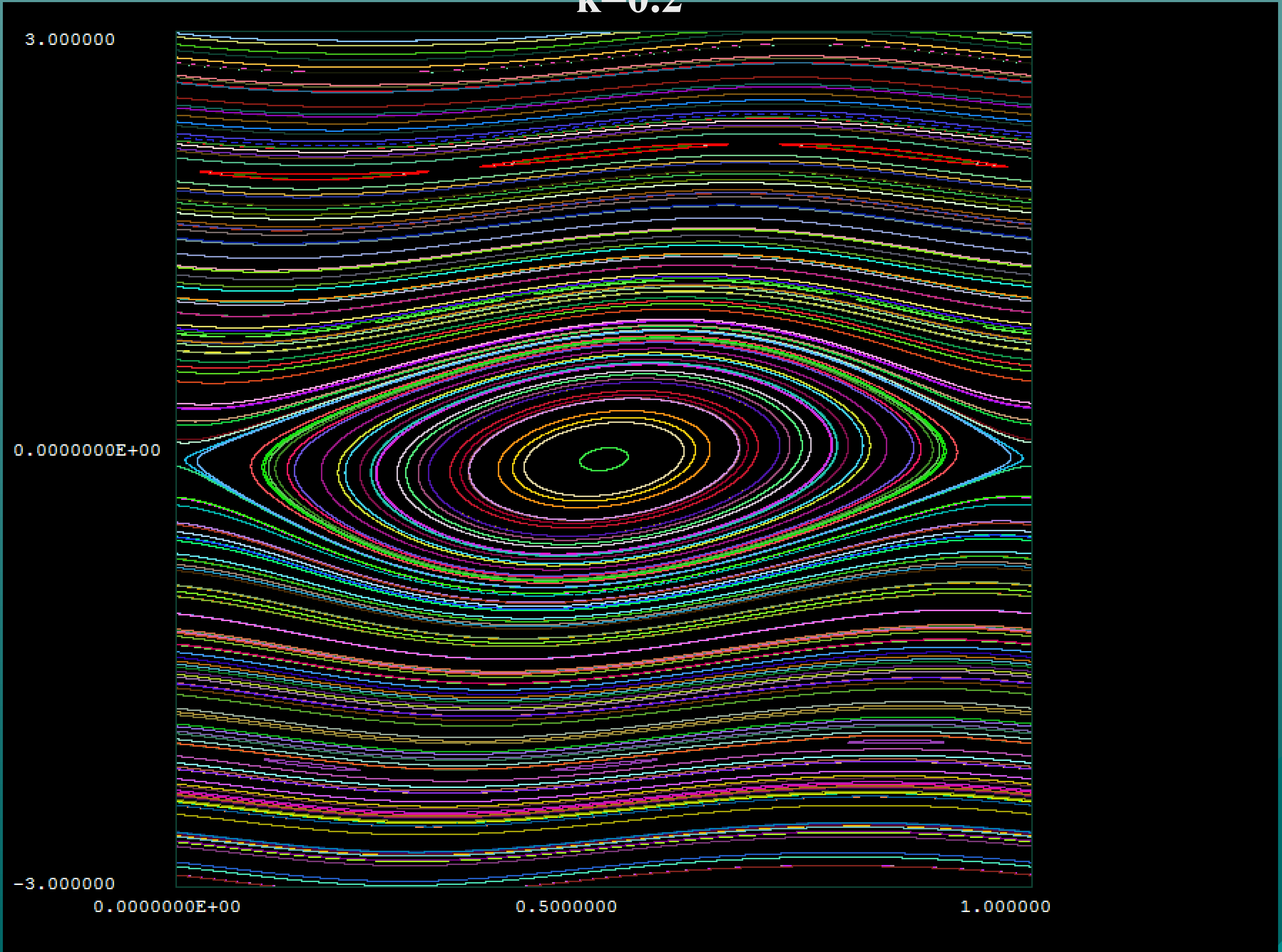


$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + k\sin\theta_{n+1} \\ \\ \theta_{n+1} = \theta_n + p_n \end{cases} \qquad \text{(I=1)}$$

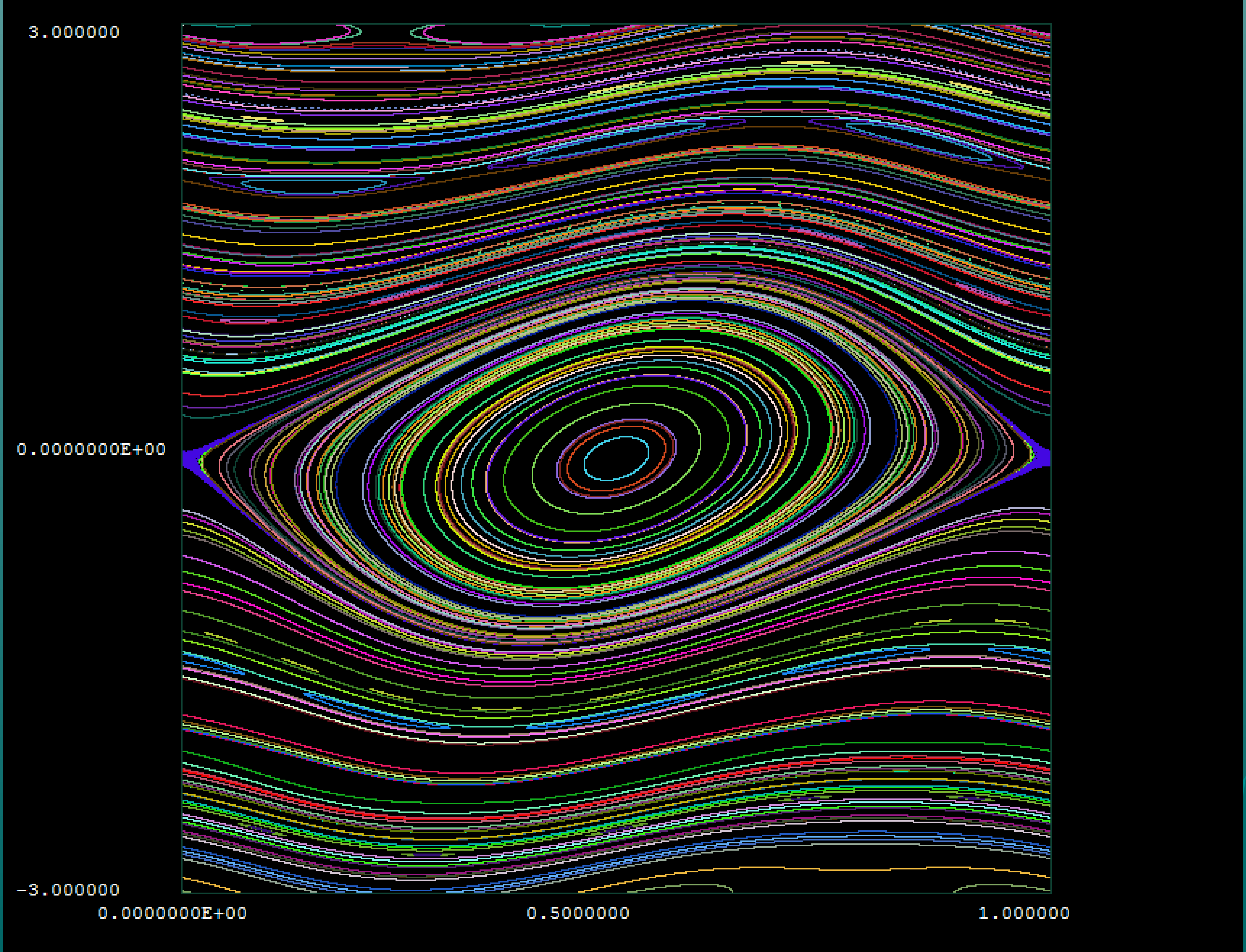
k=0.05


3.000000
0.0000000E+00
-3.000000
0.0000000E+00
0.5000000
1.000000

k=0.2

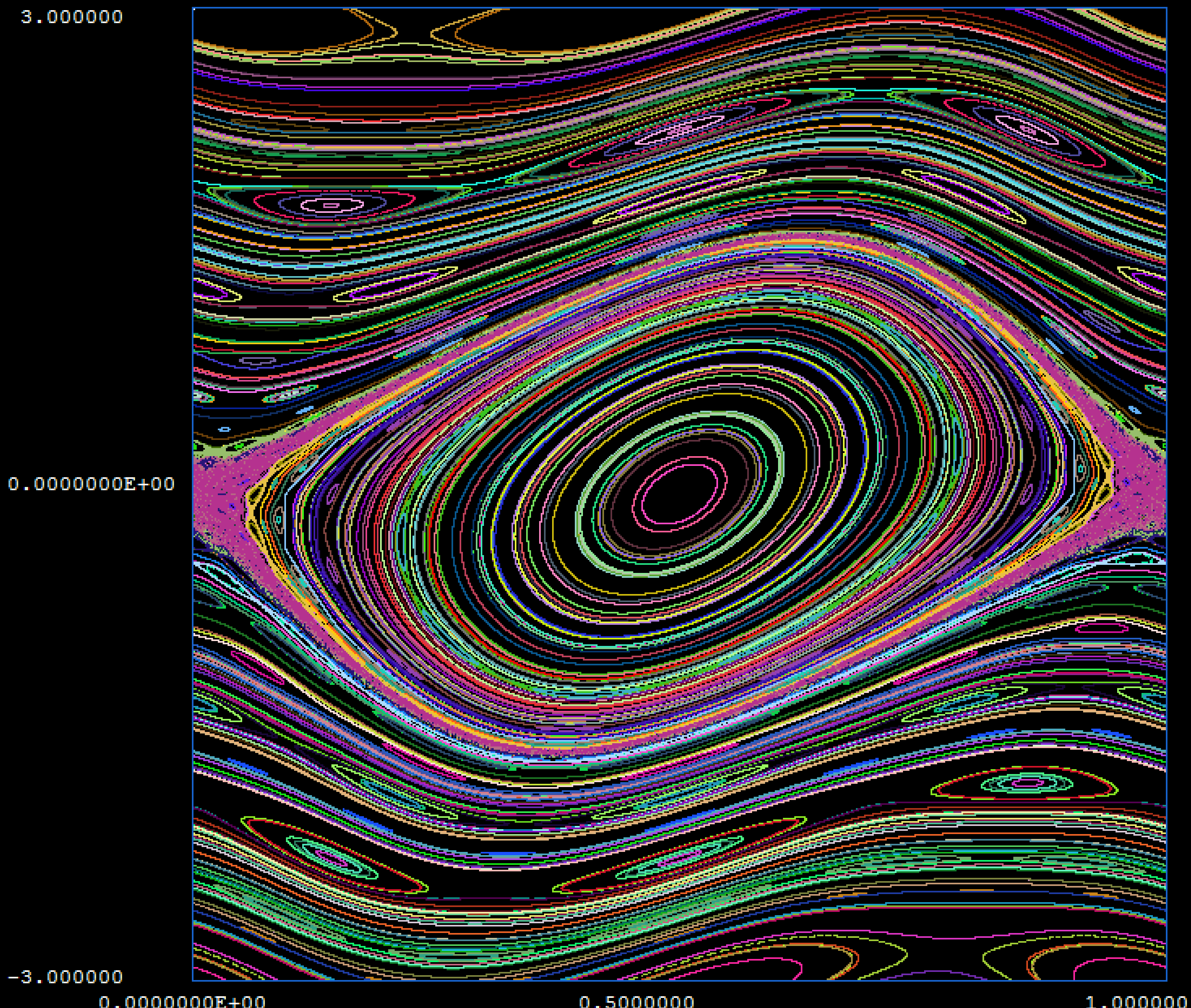

3.000000
0.0000000E+00
-3.000000
0.0000000E+00
0.5000000
1.000000

k=0.4



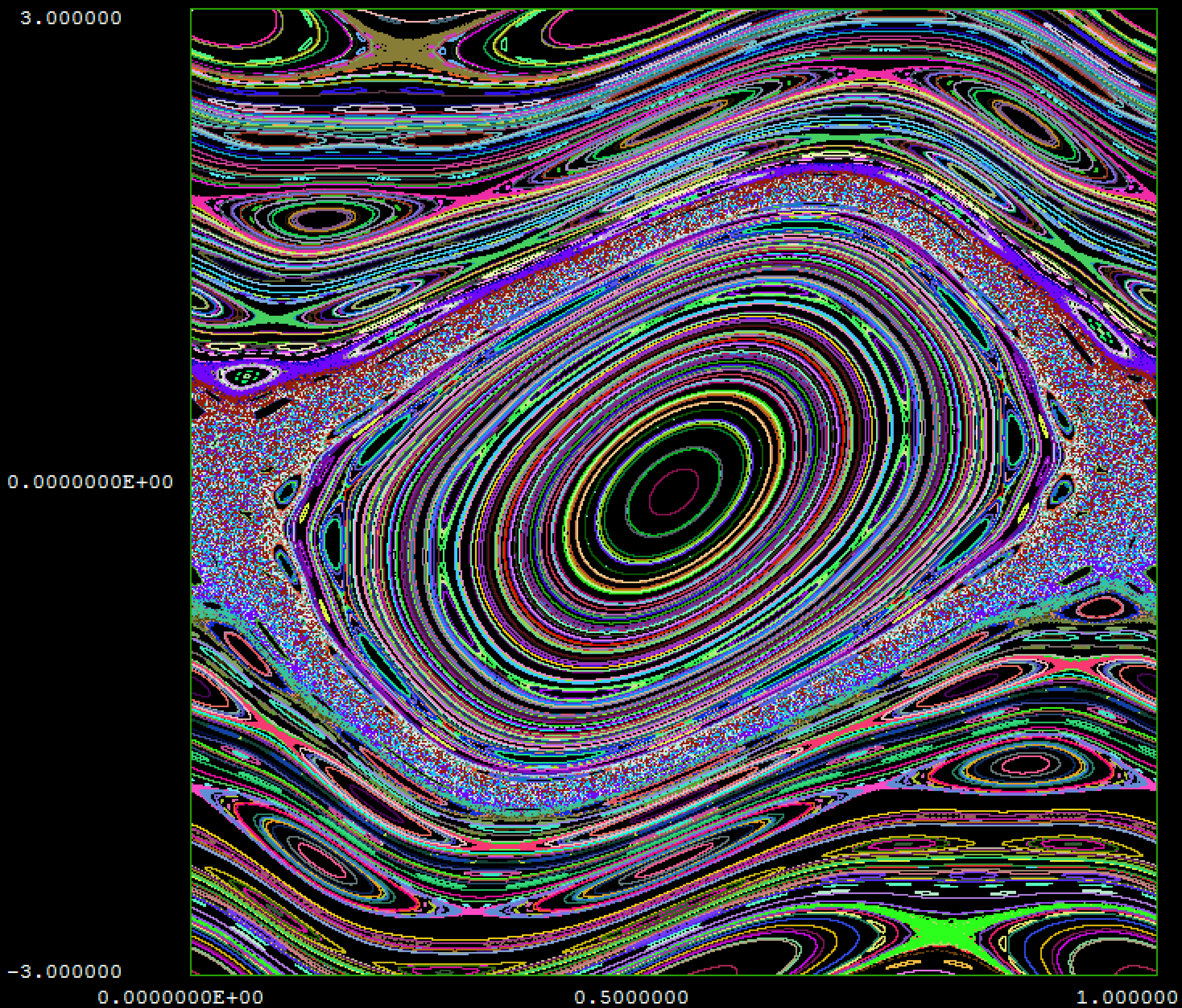
3.000000
0.0000000E+00
-3.000000
0.0000000E+00
0.5000000
1.000000

k=0.6

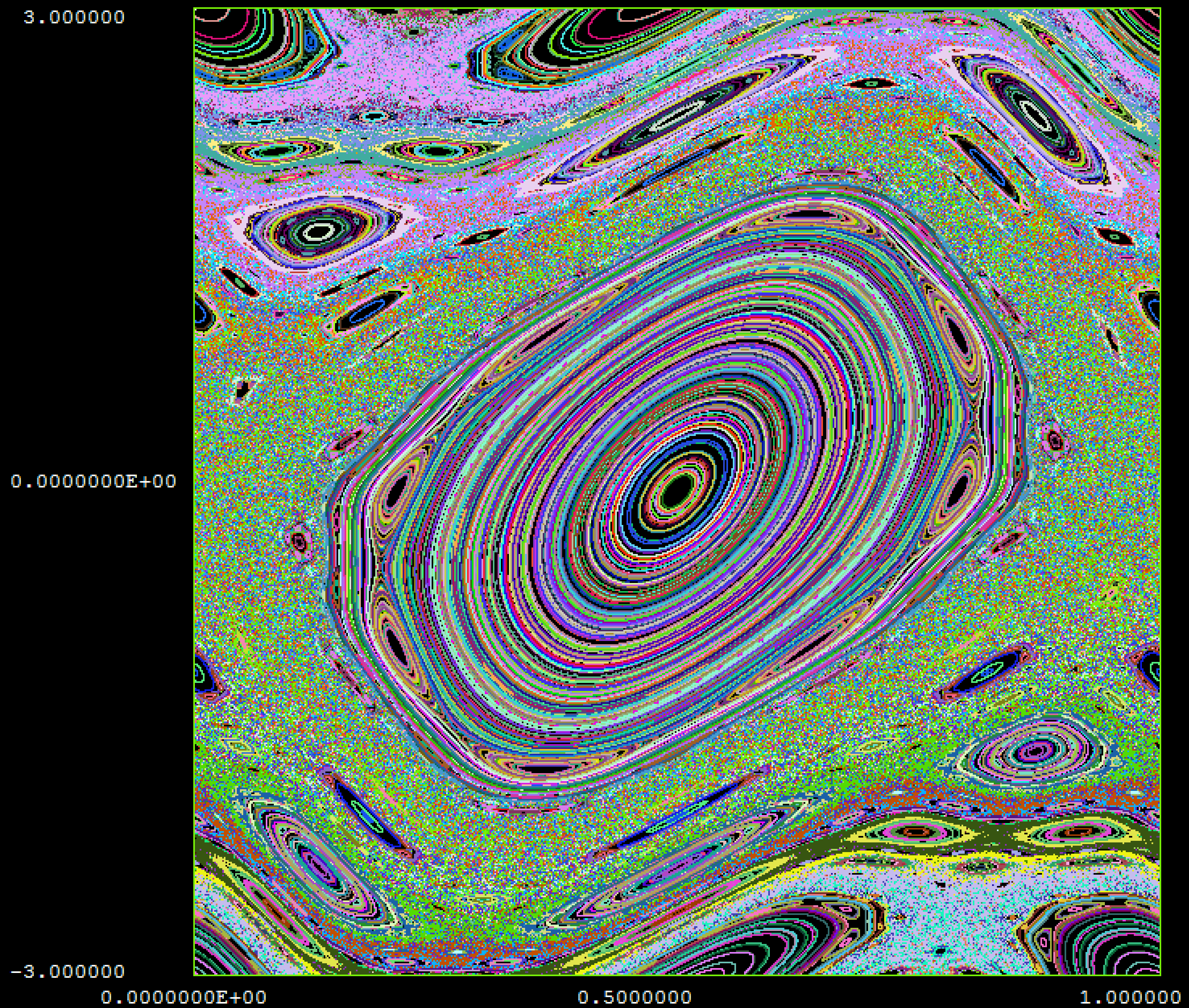


3.000000
0.0000000E+00
-3.000000
0.0000000E+00
0.5000000
1.000000

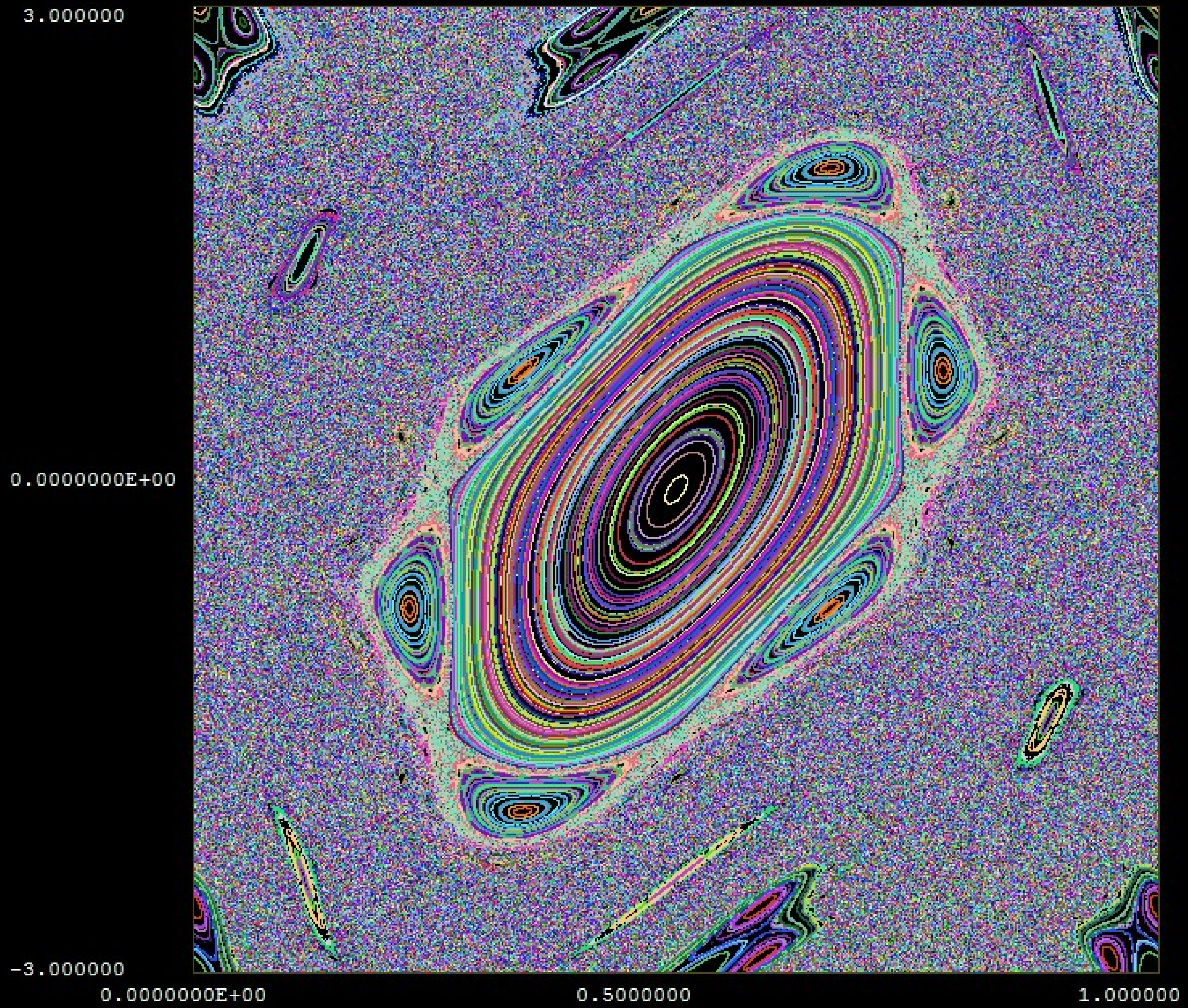
k=0.8


3.000000
0.0000000E+00
-3.000000
0.0000000E+00
0.5000000
1.000000

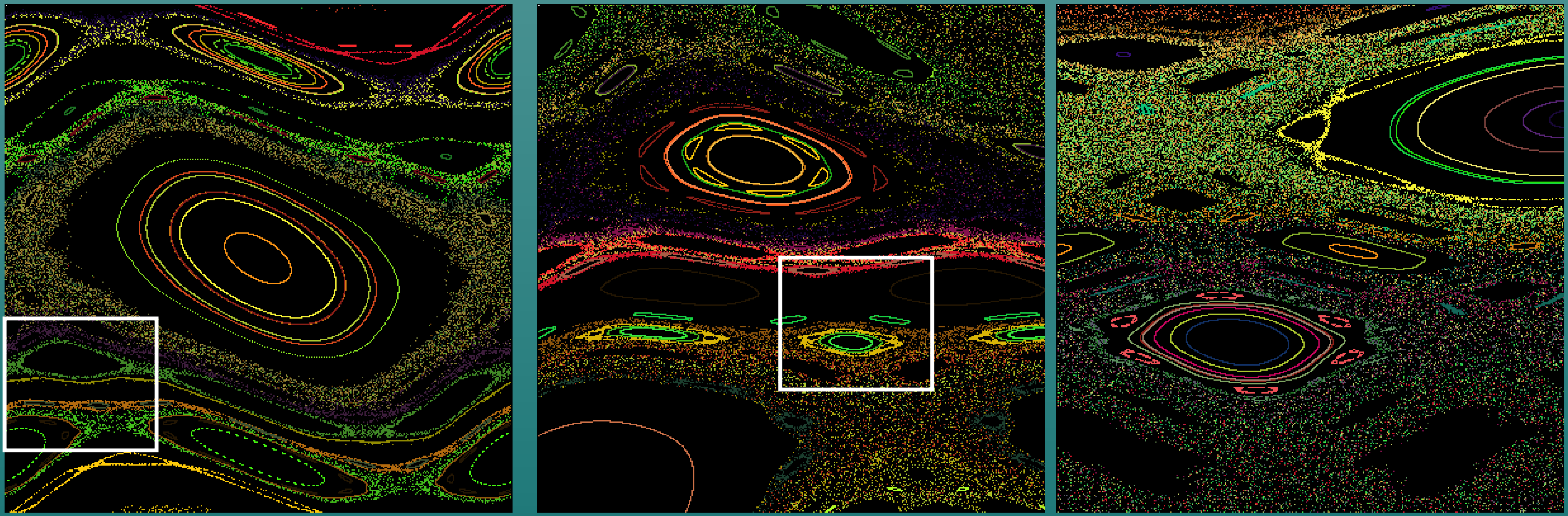
k=1.0


3.000000
0.0000000E+00
-3.000000
0.0000000E+00
0.5000000
1.000000

k=1.5

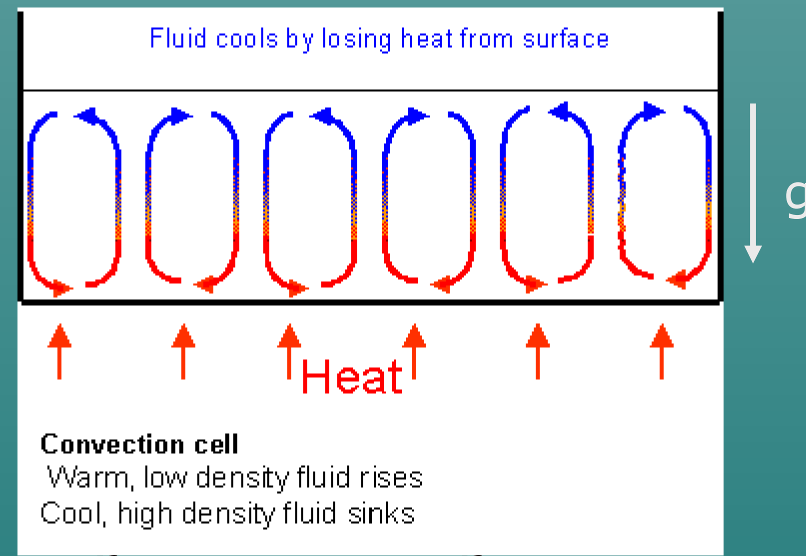

3.000000
0.0000000E+00
-3.000000
0.0000000E+00
0.5000000
1.000000

k=1.0



2- O atrator de Lorenz

$\Delta T = T_2 - T_1$



$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} = \nabla \times \Psi \hat{z}$$

Se $\Delta T < T_c$

$$\begin{cases} T(x,y) = T_1 + \Delta T \dfrac{y}{h} \\ \Psi(x,y) = 0 \end{cases}$$

condução térmica

Se $T_c < \Delta T < T_{cc}$

$$\begin{cases} T(x,y) = T_1 + \Delta T \dfrac{y}{h} + T_0 \cos\left(\dfrac{\pi a x}{h}\right) \sin\left(\dfrac{\pi y}{h}\right) \\ \Psi(x,y) = \Psi_0 \sin\left(\dfrac{\pi a x}{h}\right) \cos\left(\dfrac{\pi y}{h}\right) \end{cases}$$

convecção

Se $\Delta T > T_{cc}$

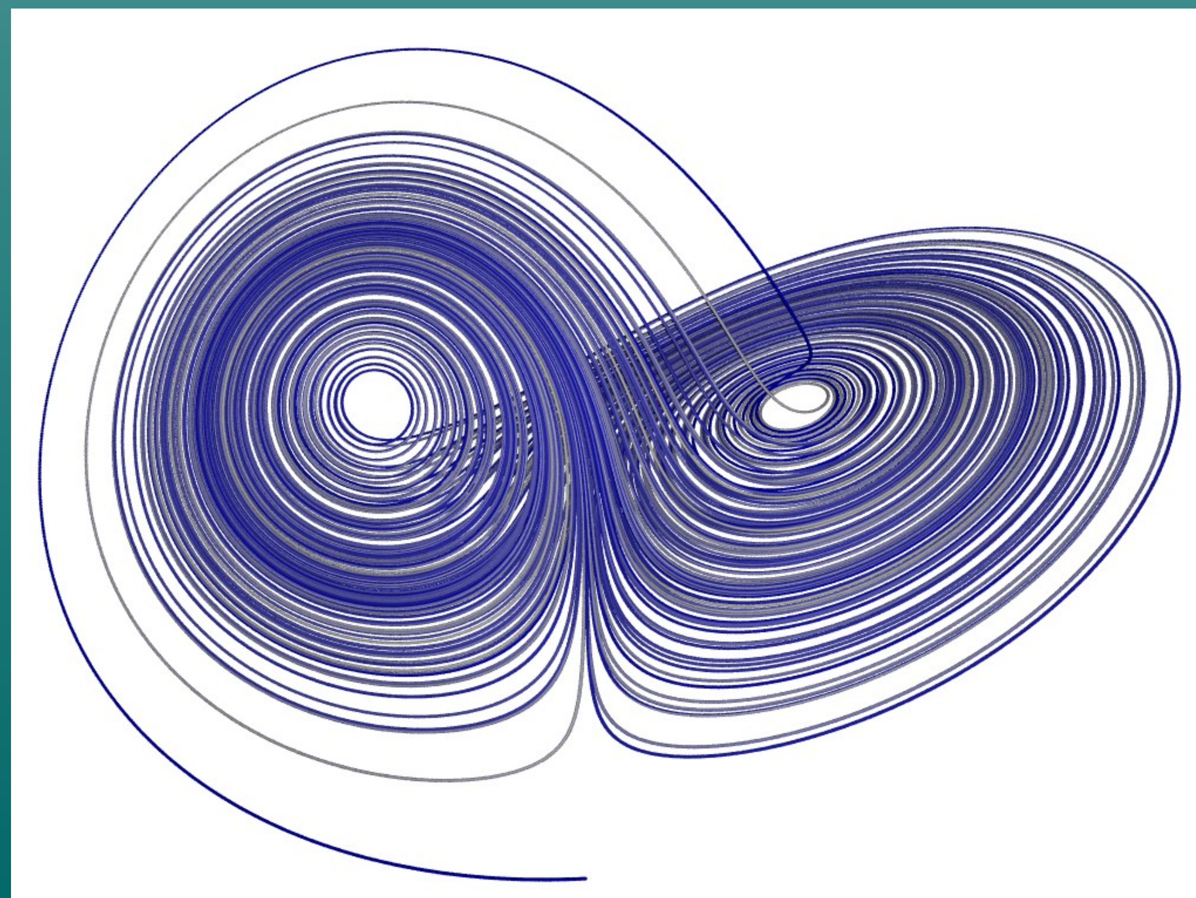
caos

$$\begin{cases} T(x,y) = T_1 + \Delta T\,\dfrac{y}{h} + Y(t)\cos\left(\dfrac{\pi a x}{h}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{h}\right) - Z(t)\sin\left(\dfrac{\pi y}{h}\right) \\ \Psi(x,y) = X(t)\sin\left(\dfrac{\pi a x}{h}\right)\cos\left(\dfrac{\pi y}{h}\right) \end{cases}$$

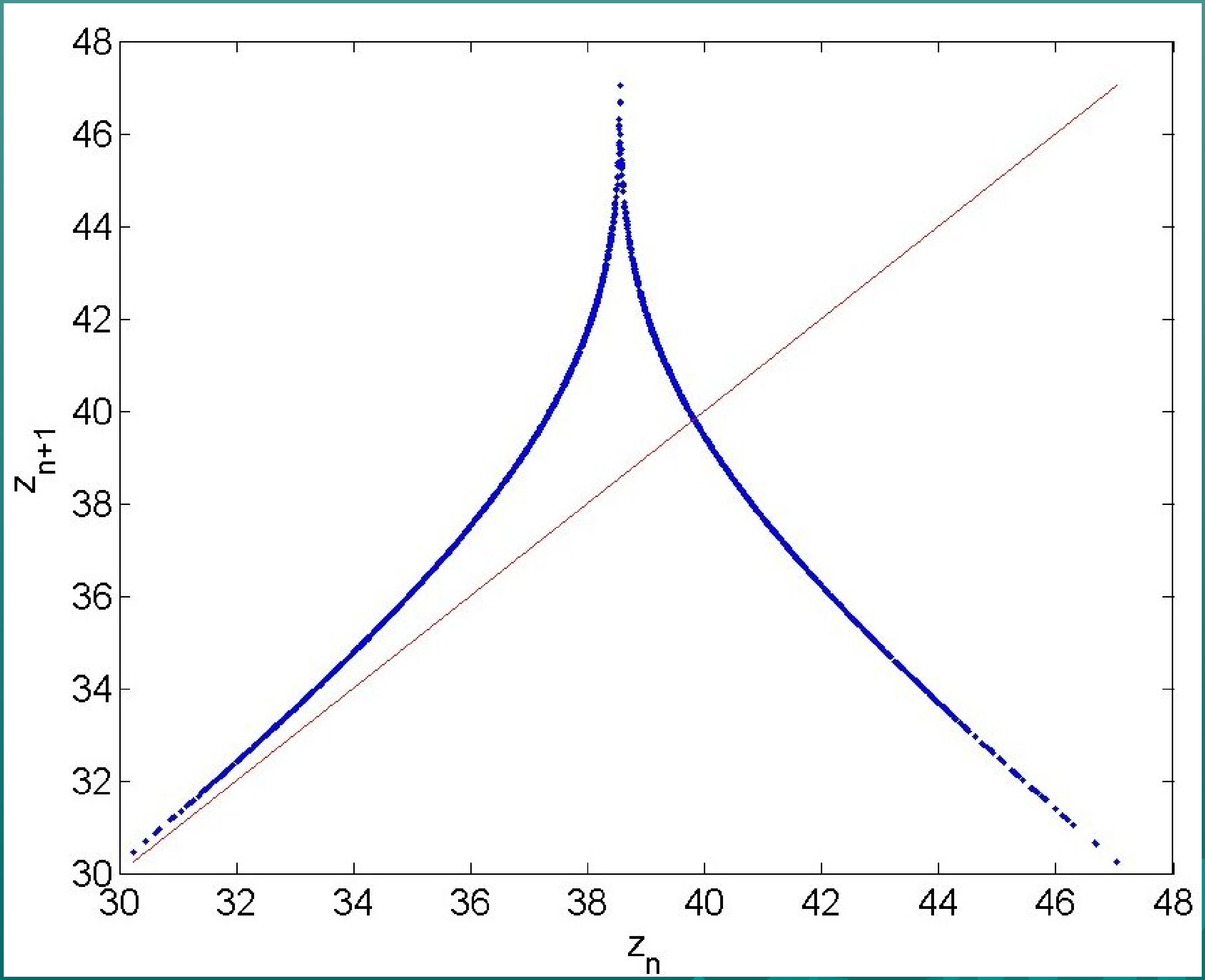
$$\dot{X} = s\,(Y - X)$$

$$\dot{Y} = X\,(r - Z) - Y$$

$$\dot{Z} = -b\,Z + XY$$



s=10 b=8/3 r = 28



48
46
44
42
40
38
36
34
32
30
30
32
34
36
38
40
42
44
46
48
z_n
z_{n+1}

Rotas para o Caos

O oscilador de Duffing : $\ddot{x} = kx - x^3 - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega_0 t)$

se $F_0 = 0$ o sistema é regular

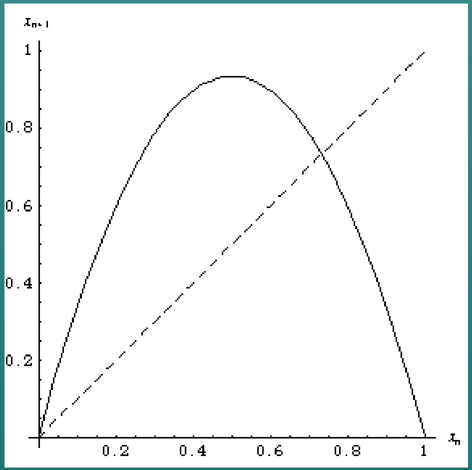
Conforme F_0 aumenta o sistema passa a exibir movimento caótico:

como se dá a transição?

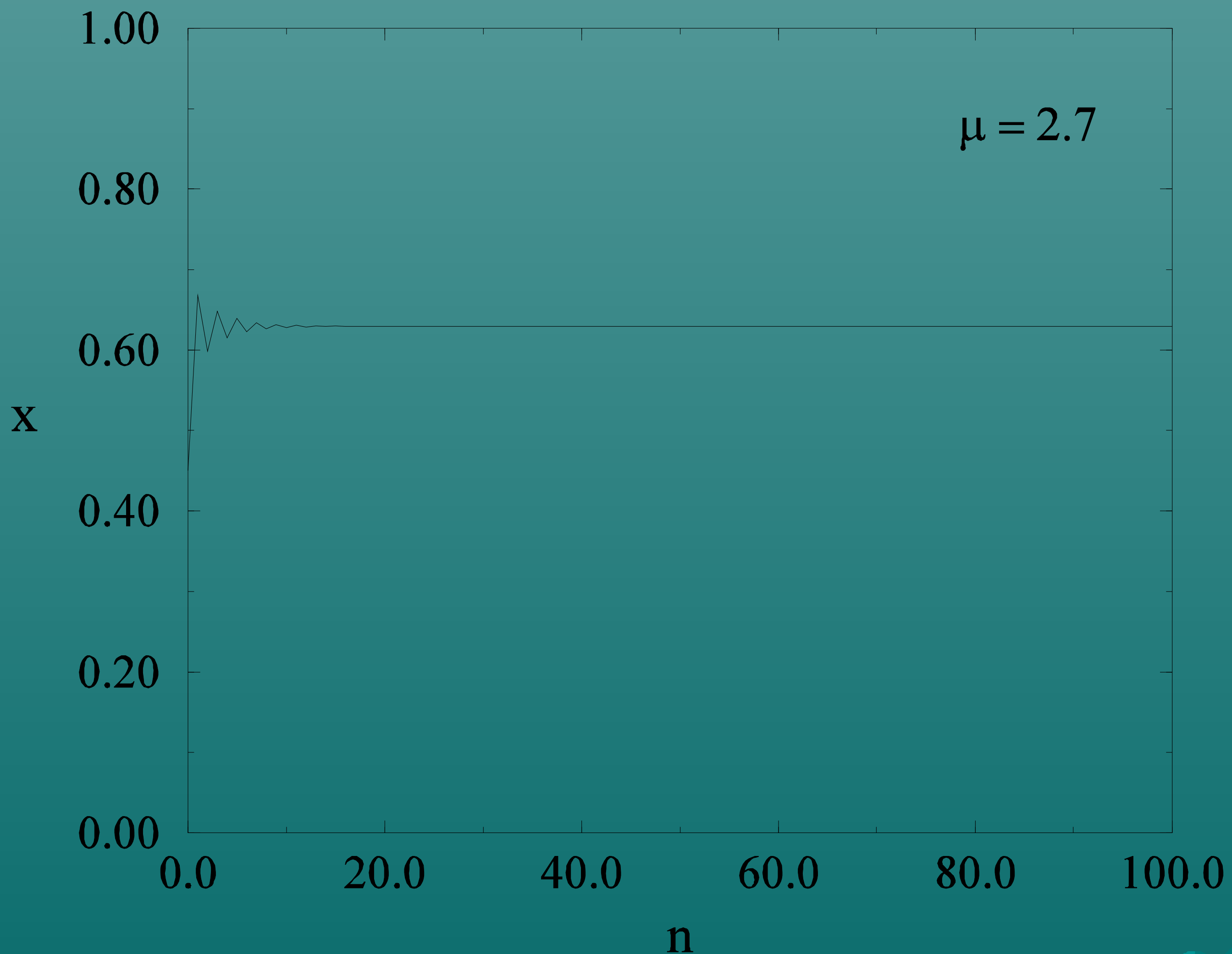
Modelo Simplificado: O mapa logístico

- Olhamos apenas a variável *x*
- Construímos o mapa estroboscópico diretamente :

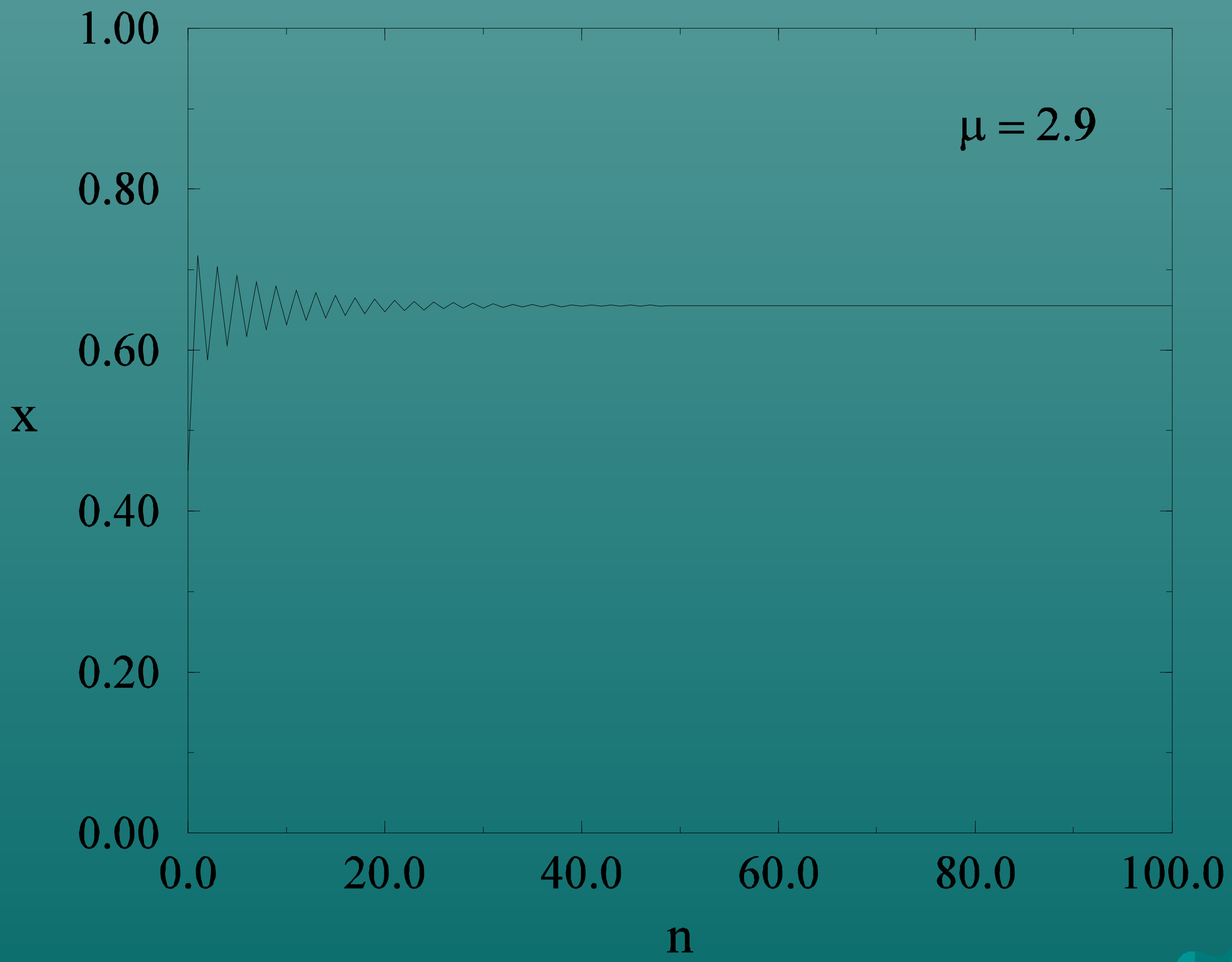
$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$



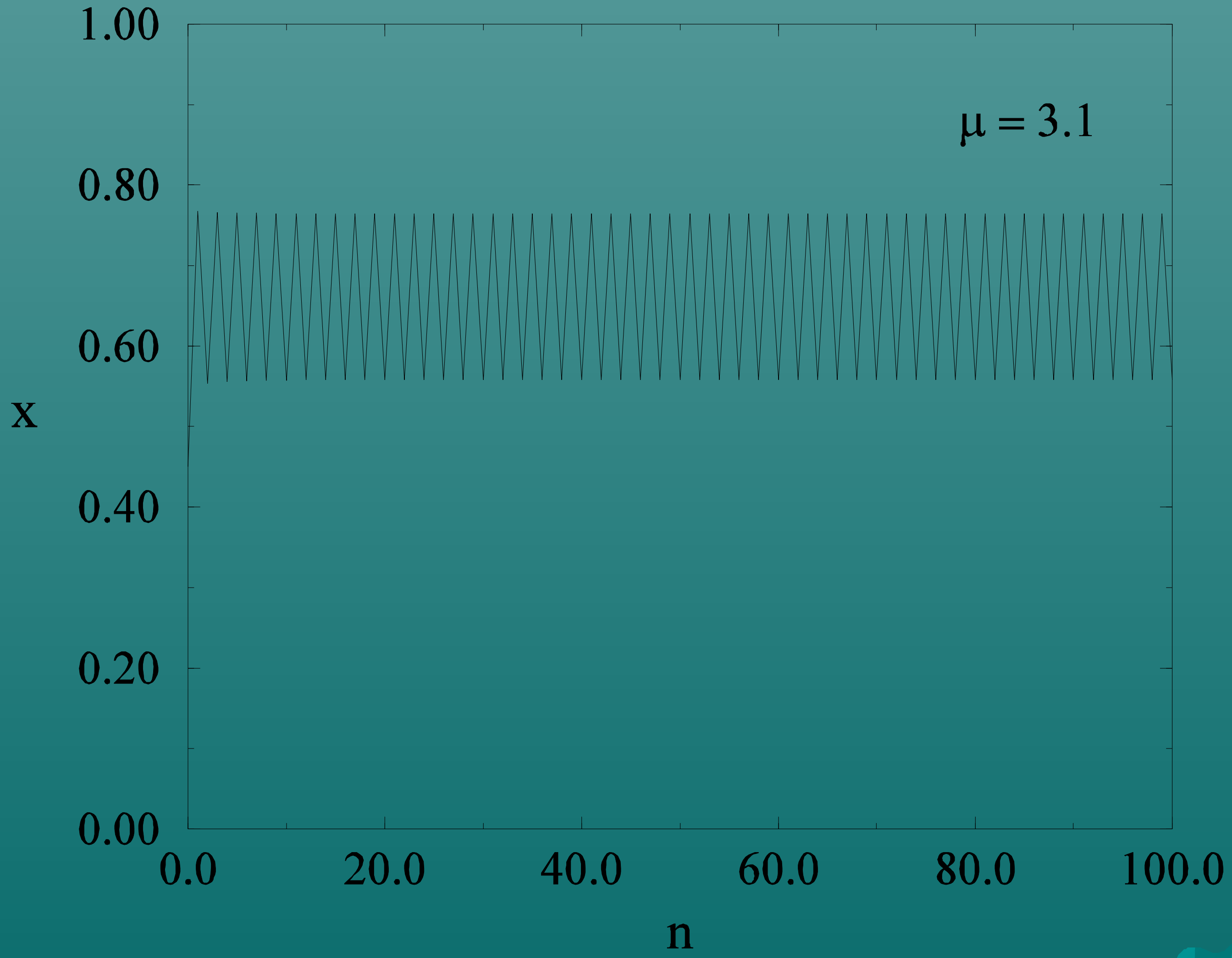
- O parâmetro μ faz o papel de F_0
- x=0 é ponto de equilíbrio instável
- x=(μ–1)/ μ é ponto de equilíbrio estável se μ < 3

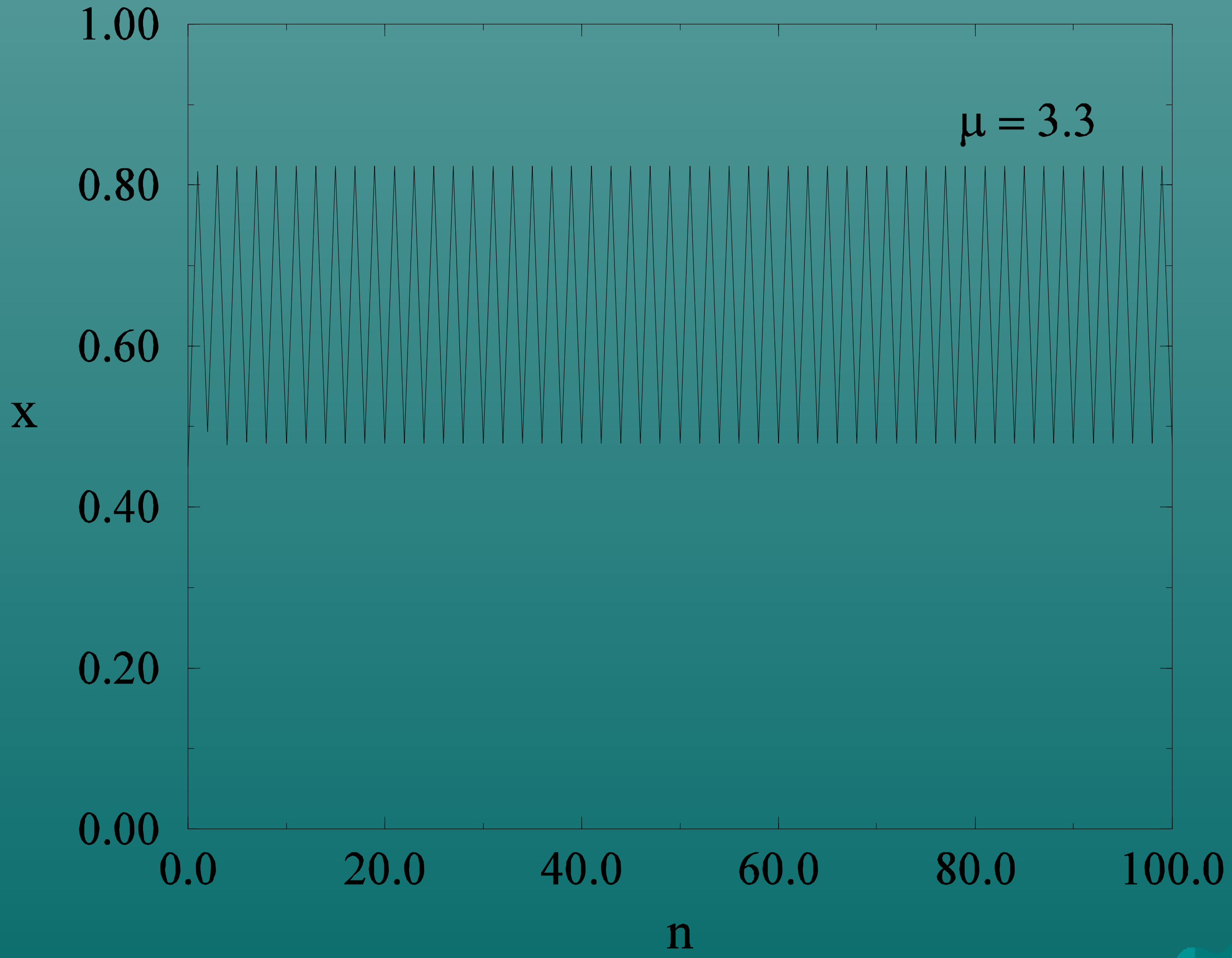


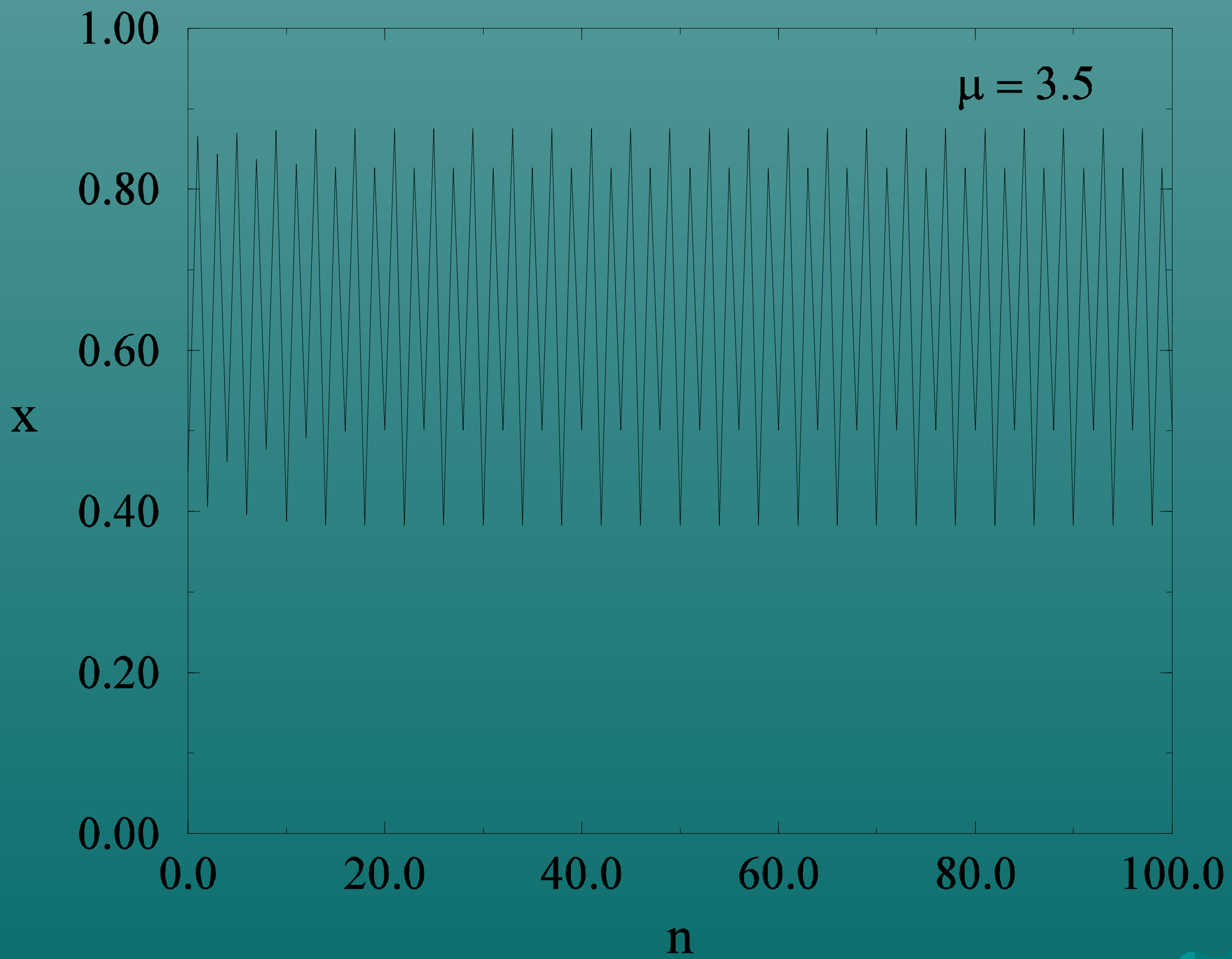
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
x
μ = 2.7
0.0
20.0
40.0
60.0
80.0
100.0
n



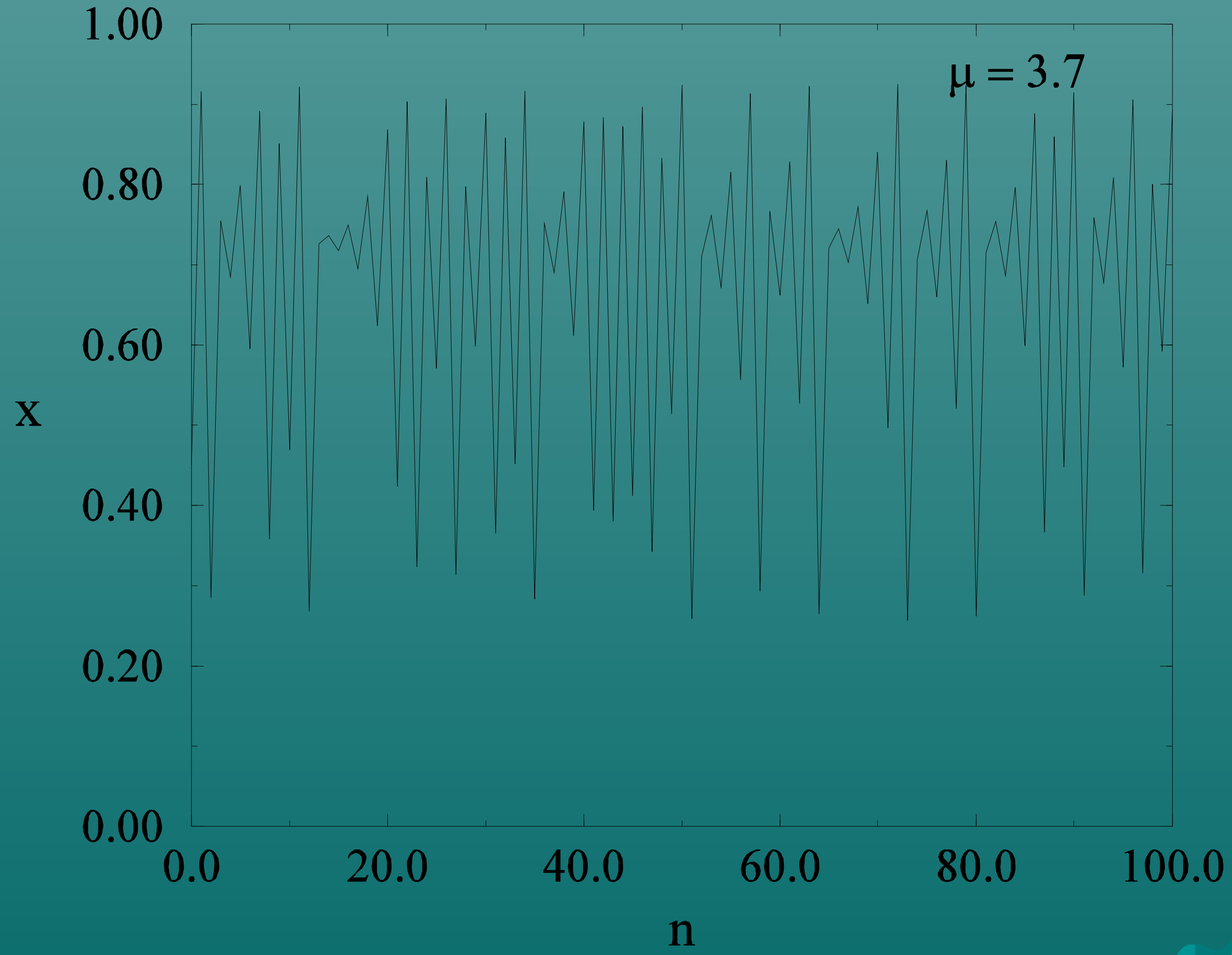
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
x
μ = 2.9
0.0
20.0
40.0
60.0
80.0
100.0
n


1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
x
μ = 3.1
0.0
20.0
40.0
60.0
80.0
100.0
n

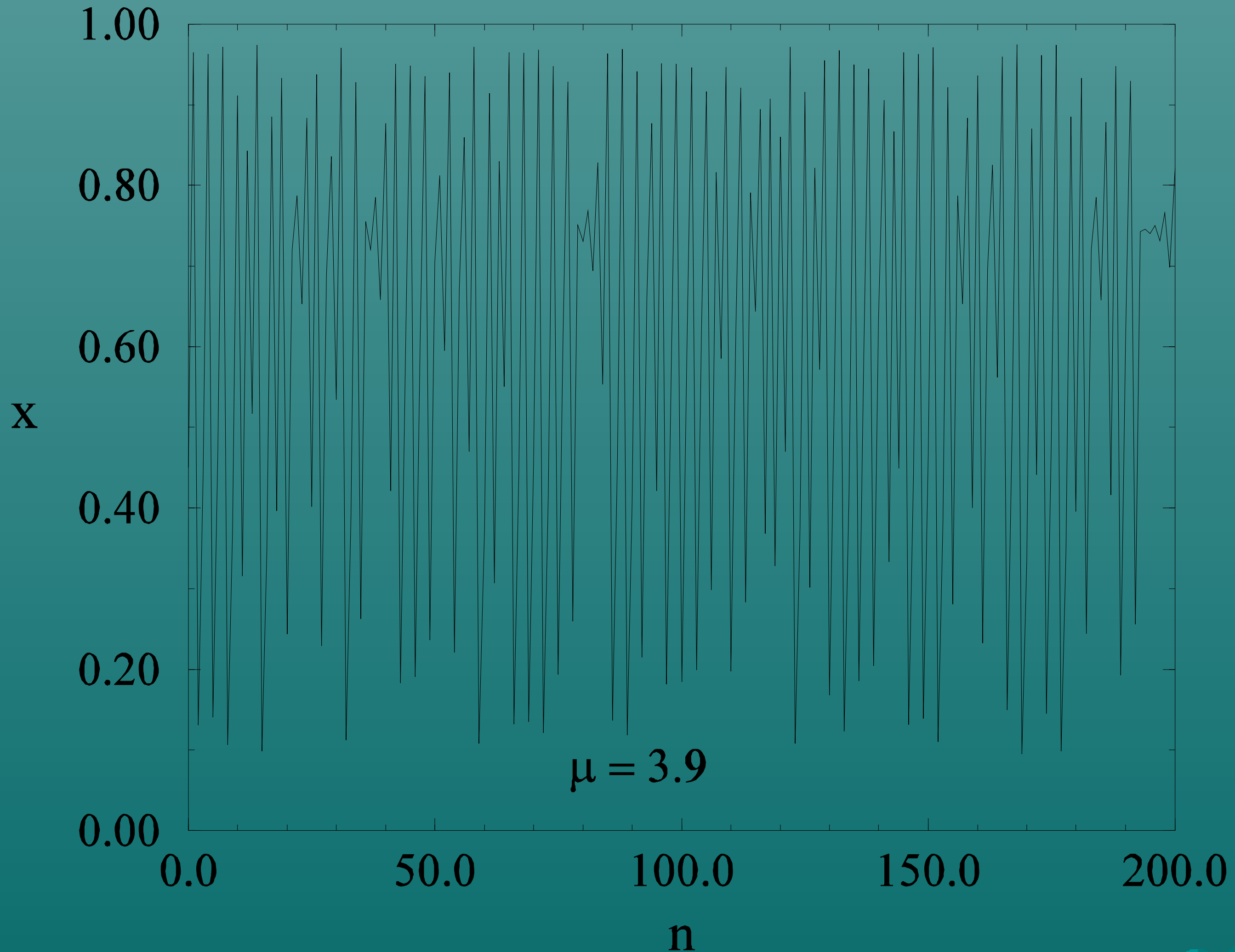

1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
x
μ = 3.3
0.0
20.0
40.0
60.0
80.0
100.0
n



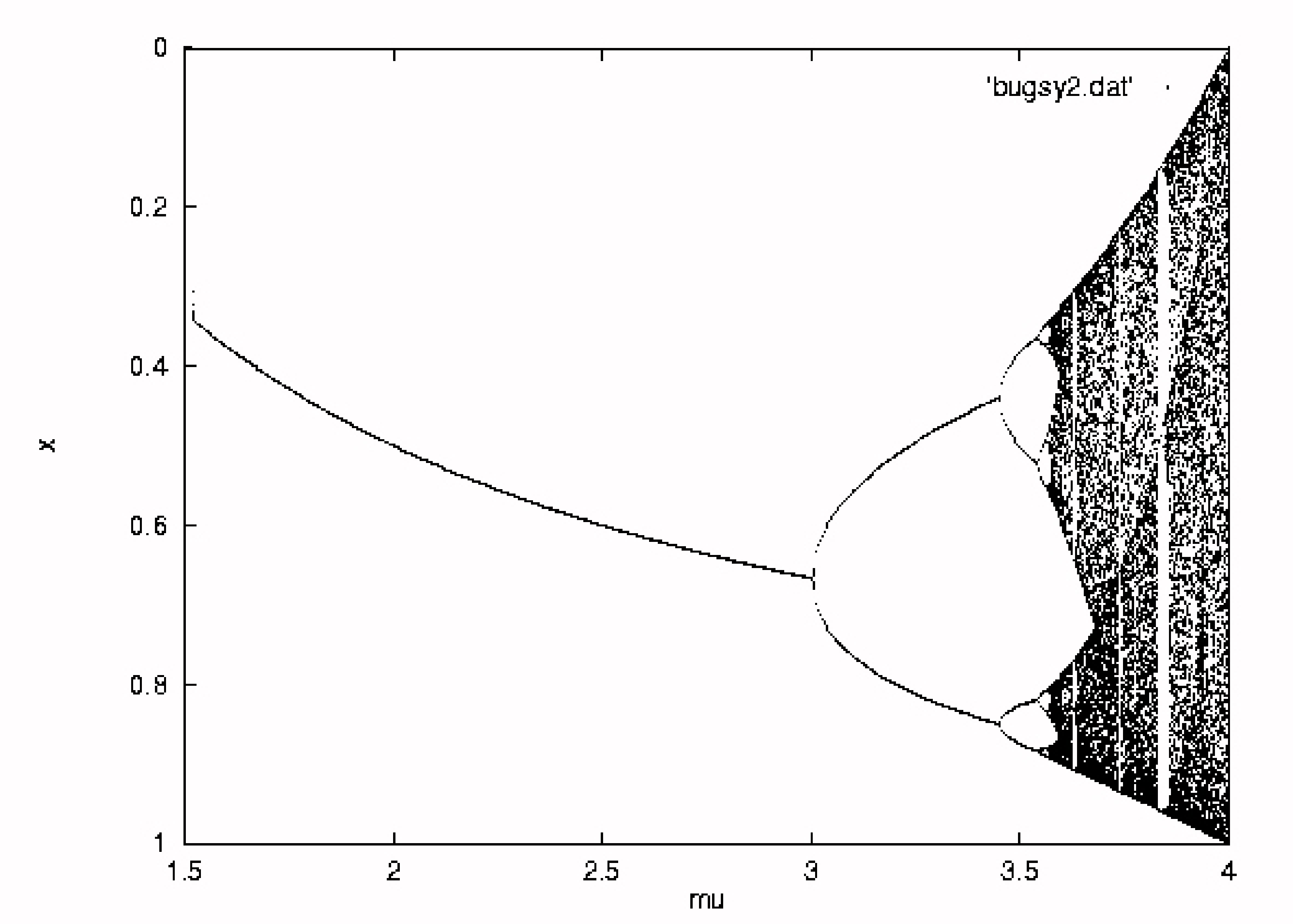
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
x
$\mu = 3.5$
0.0
20.0
40.0
60.0
80.0
100.0
n

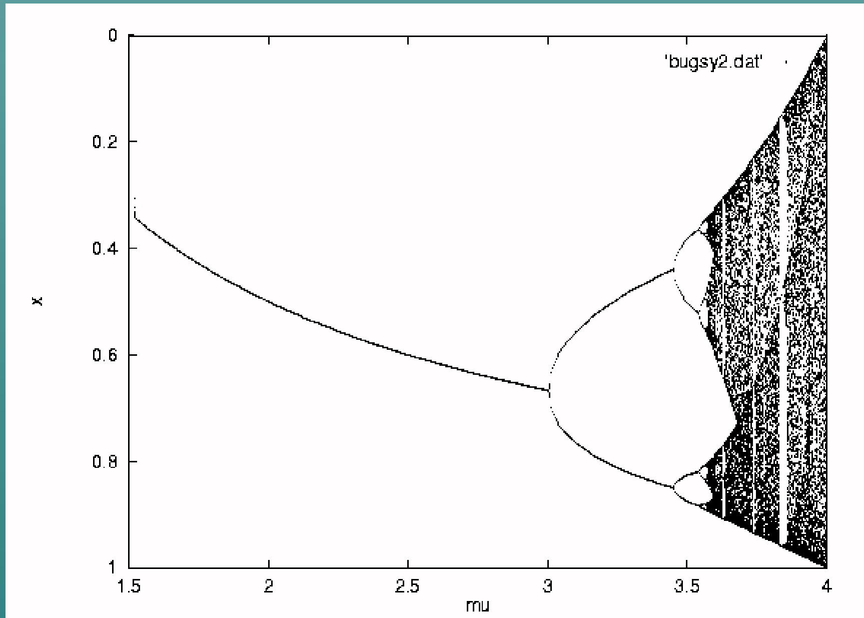


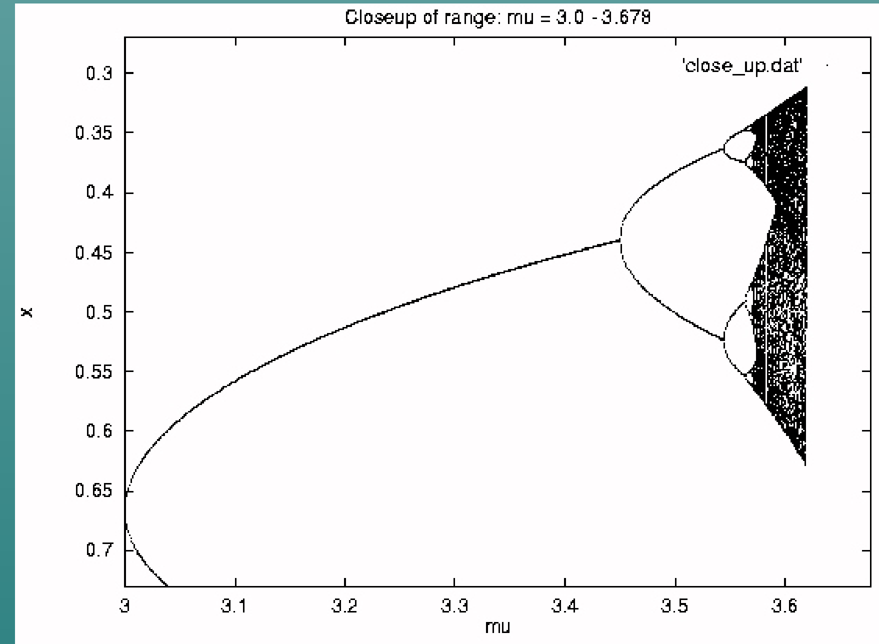
μ = 3.7
x
n
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
0.0
20.0
40.0
60.0
80.0
100.0

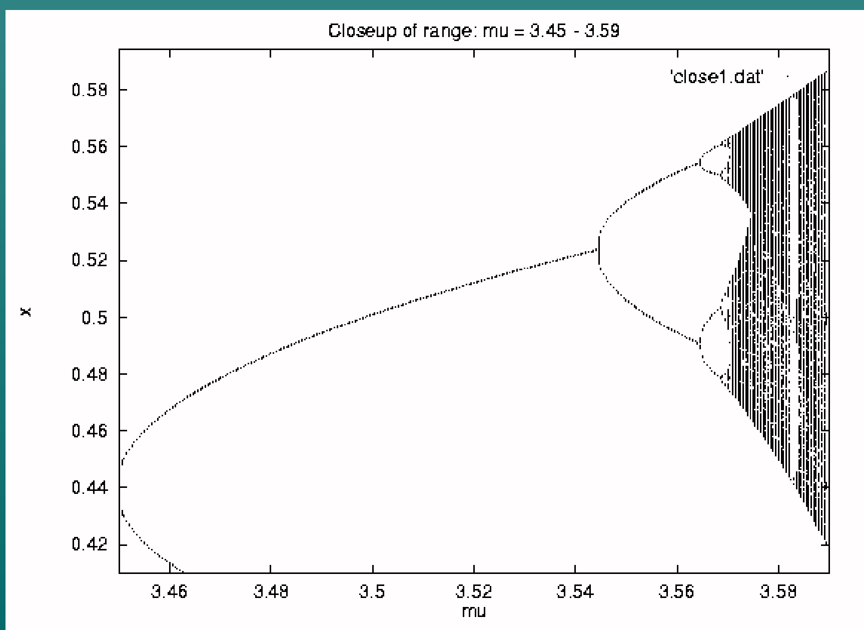

1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
x
μ = 3.9
0.0
50.0
100.0
150.0
200.0
n

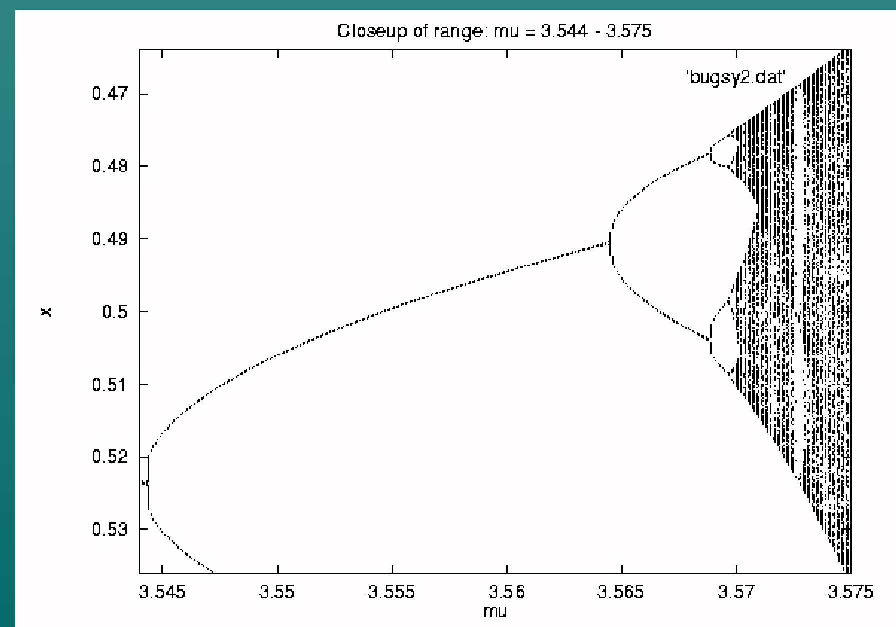
Rota para o caos por duplicação de período




'bugsy2.dat'
x
mu
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


Closeup of range: mu = 3.0 - 3.678
'close_up.dat'
x
mu
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6


Closeup of range: mu = 3.45 - 3.59
'close1.dat'
x
mu
0.58
0.56
0.54
0.52
0.5
0.48
0.46
0.44
0.42
3.46
3.48
3.5
3.52
3.54
3.56
3.58


Closeup of range: mu = 3.544 - 3.575
'bugsy2.dat'
x
mu
0.47
0.48
0.49
0.5
0.51
0.52
0.53
3.545
3.55
3.555
3.56
3.565
3.57
3.575

Conclusões

- Caos = sensibilidade a condições iniciais (efeito borboleta). Apesar do determinismo das equações de movimento nosso poder de previsão é limitado.

- Esticar e Dobrar é o mecanismo dinâmico que produz caos (dinâmica do padeiro).

- Onde há caos há fractais.

- Condições mínimas para existência de caos: pelo menos 3 variáveis e equações não-lineares.