TÓPICO ESPECIAL - O OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO

Considere a Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} - q\,Q(t) - p\,P(t)$$

onde $Q(t)$ e $P(t)$ são funções reais do tempo. Em termos de a, $a^\dagger$,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q + \frac{ip}{m\omega}\right) \qquad \longrightarrow \qquad q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a^\dagger + a)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q - \frac{ip}{m\omega}\right) \qquad\qquad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(a^\dagger + a)$$

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\right) + f(t)\,a + f^*(t)\,a^\dagger$$

$$f(t) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,Q(t) + i\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}\,P(t) .$$

Vamos assumir que $f(t) \neq 0$ apenas no intervalo $T_1 < t < T_2$, e vamos calcular probabilidades de transição entre estados do oscilador antes de T_1 para estados depois de T_2.

Trabalharemos na representação de Heisenberg. Usando

$$[a(t), a^\dagger(t)] = 1$$

obtemos

$$i\hbar\frac{da}{dt} = [a, H] = \hbar\omega a + f^*$$

(A) Solução Direta - Re-escrevendo

$$\frac{da}{dt} = -i\omega a - \frac{i}{\hbar} f^*$$

temos uma eq. não homogênea. Uma solução particular é obtida re-escrevendo

$$\frac{d}{dt}\left(a\, e^{i\omega t}\right) = \frac{-i}{\hbar} f^* e^{i\omega t}$$

de onde vem

$$\boxed{a(t) = a_0 e^{-i\omega t} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t f^*(t')\, e^{-i\omega(t-t')}\, dt'}$$

(B) SOLUÇÃO VIA FUNÇÕES DE GREEN – Se calcularmos $G(t-t')$ dada por

$$\frac{dG(t-t')}{dt} + i\omega\, G(t-t') = \delta(t-t')$$

então

$$a(t) = a_0 e^{-i\omega t} - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t')\, f^*(t')\, dt'$$

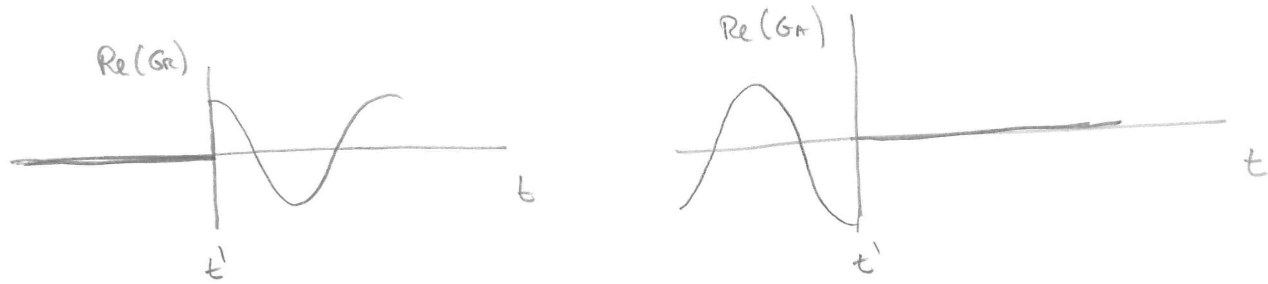
(verifique que $a(t)$ acima satisfaz a equação de movimento).

Para $t \neq t'$, $G \sim e^{-i\omega(t-t')}$. Integrando a equação de G de $t' = t-\varepsilon$ a $t' = t+\varepsilon$ obtemos $G(+\varepsilon) - G(-\varepsilon) = 1$. Temos então duas soluções:

Retardada $\quad G_R(t-t') = \Theta(t-t')\, e^{-i\omega(t-t')}$

Avançada $\quad G_A(t-t') = -\Theta(t'-t)\, e^{-i\omega(t-t')}$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



As soluções correspondentes são:

$$a(t) = \begin{cases} a_{in}\, e^{-i\omega t} - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} e^{-i\omega(t-t')} f^*(t')\,dt' \\ a_{out}\, e^{-i\omega t} - \frac{i}{\hbar}\int_{t}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} f^*(t')\,dt' \end{cases}$$

Igualando as soluções obtemos

$$a_{out} = a_{in} - \frac{i}{\hbar}\, g^*(\omega)$$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t'} f(t')\,dt' = \int_{T_1}^{T_2} e^{-i\omega t'} f(t')\,dt'$$

(c) Representação de Interação – Escrevemos

$$H = H_0 + V \qquad \text{com} \qquad \begin{cases} H_0 = \hbar\omega\,(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \\ V = f(t)\, a + f^*(t)\, a^\dagger \end{cases}$$

Os estados e operadores ficam

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar}\, |\Psi(t)\rangle \equiv U_0(t)\, |\Psi(t)\rangle$$

$$\tilde{V}(t) = U_0(t)\, V(t)\, U_0^\dagger(t) \quad . \quad \text{Assim}$$

$$i\hbar \frac{d|\tilde{\Psi}\rangle}{dt} = \tilde{V}(t)\, |\tilde{\Psi}(t)\rangle \quad , \quad \text{ou}$$

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle \equiv \tilde{T}(t, t_1)\, |\tilde{\Psi}(t_1)\rangle \, .$$

O operador de evolução $\tilde{T}$ satisfaz a equação

$$i\hbar \frac{d\tilde{T}(t,t_1)}{dt} = \tilde{V}(t)\, \tilde{T}(t, t_1)$$

que pode ser integrada:

$$\tilde{T}(t,t_1) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t} \tilde{V}(t')\,\tilde{T}(t',t_1)\,dt' .$$

Dividindo o intervalo $t-t_1 = N\varepsilon$ e definindo

$$V_k = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_1+(k-1)\varepsilon}^{t_1+k\varepsilon} \tilde{V}(t')\,dt'$$

re-escrevemos (no lim $\varepsilon \to 0$)

$$\tilde{T}(t,t_1) = \prod_{k=1}^{N} \tilde{T}(t_1+k\varepsilon,\, t_1+(k-1)\varepsilon) \equiv e^{V_N} e^{V_{N-1}} \cdots e^{V_2} e^{V_1}$$

onde a ordem temporal é importante. Precisamos calcular $\tilde{V}$:

$$\tilde{V}(t) = e^{i\omega a^\dagger a t}\left[f(t)\,a + f^* a^\dagger\right] e^{-i\omega a^\dagger a t} .$$

Como $[a^\dagger a, a] = -a$, $[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger$ podemos usar a fórmula

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = e^{\lambda\gamma} B \quad \text{se} \quad [A,B] = \gamma B$$

$$e^{i\omega a^\dagger a t}\, a\, e^{-i\omega a^\dagger a t} = e^{-i\omega t} a$$

$$e^{i\omega a^\dagger a t}\, a^\dagger\, e^{-i\omega a^\dagger a t} = e^{i\omega t} a^\dagger$$

e

$$\boxed{\tilde{V}(t) = f(t)\, e^{-i\omega t} a + f^*(t)\, e^{i\omega t} a^\dagger}$$

Além disso,

$$[\tilde{V}(t'), \tilde{V}(t'')] = f(t') f^*(t'')\, e^{-i\omega(t'-t'')} - f^*(t') f(t'')\, e^{i\omega(t'-t'')}$$

é proporcional ao operador identidade.

Podemos então usar $e^{A} e^{B} = e^{A+B+[A,B]/2}$ que vale se $[A,B]$ comuta com A e B. Isso permite calcular $\tilde{T}$: veja que

$$e^{V_3} e^{V_2} e^{V_1} = e^{V_3} e^{V_2+V_1+\frac{1}{2}[V_2,V_1]}$$

$$= e^{V_3+V_2+V_1+\frac{1}{2}[V_3,V_2+V_1]+\frac{1}{2}[V_2,V_1]}$$

No final obtemos

$$\tilde{T}(t,t_1) = \lim_{\epsilon\to 0} \exp\left\{ \sum_{k=1}^{N} V_k + \frac{1}{2}\sum_{k} \left[V_k, \sum_{n=1}^{k} V_n\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t} \tilde{V}(t')dt' - \frac{1}{2\hbar^2}\int_{t_1}^{t} dt' \left[\tilde{V}(t'), \int_{t_1}^{t'} \tilde{V}(t'')dt''\right]\right\}$$ ou

$$\boxed{\tilde{T}(t,t_1) = e^{i\beta(t,t_1)} e^{-\xi^*(t,t_1)a + \xi(t,t_1)a^+}}$$ onde

$$\xi(t,t_1) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t} f^*(t') e^{i\omega t'} dt' = \frac{1}{i\hbar} g^*(\omega)$$

$$\beta(t,t_1) = \frac{i}{2\hbar^2}\int_{t_1}^{t} dt' \int_{t_1}^{t'} dt'' \left[f(t') f^*(t'') e^{-i\omega(t'-t'')} - f^*(t') f(t'') e^{i\omega(t'-t'')} \right]$$

Fazendo $t_1 \to -\infty$, $t \to +\infty$ obtemos

$$\boxed{S \equiv \tilde{T}(-\infty,+\infty) = e^{i\beta} \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} g(\omega) a - \frac{i}{\hbar} g^*(\omega) a^+ \right\}}$$

Se o estado inicial do oscilador é o estado fundamental $|0\rangle$, o estado final é um estado coerente $|\alpha\rangle$, definido como autoestado do operador a:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

Pode-se mostrar que isso implica em

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger + \alpha^* a}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle .$$

Assim, p/ $t > T_2$

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = S|0\rangle = e^{i\beta} e^{-\frac{|g(\omega)|^2}{2\hbar^2}} e^{-\frac{i}{\hbar} g^*(\omega) a^\dagger}|0\rangle$$

$$= e^{i\beta}|\alpha = -ig^*/\hbar\rangle$$

e a probabilidade de encontrarmos o oscilador no estado $|n\rangle$ é

$$|\langle n|\tilde{\Psi}(t)\rangle|^2 = \frac{e^{-|g(\omega)|^2/\hbar^2}}{n!} \left|\frac{g(\omega)}{\hbar}\right|^{2n} .$$