CAPÍTULO XIV - Partículas Idênticas

1) Definição de partículas idênticas: todas as propriedades intrínsecas são iguais (massa, carga, spin, etc)

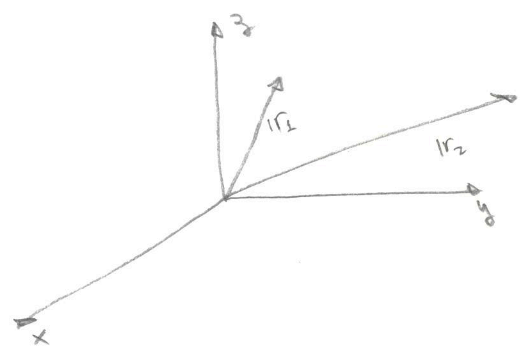
Exemplos: elétrons
prótons
neutrons

2) Mecânica Clássica

2 partículas idênticas, 1 em (r_0, v_0) outra em (r_0', v_0') em $t=0$

precisamos de 2 vetores posição p/ descrever o sistema r_1 e r_2 e temos duas escolhas possíveis:

$$\begin{cases} r_1(t_0) = r_0 \\ v_1(t_0) = v_0 \\ r_2(t_0) = r_0' \\ v_2(t_0) = v_0' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r_1(t_0) = r_0' \\ v_1(t_0) = v_0' \\ r_2(t_0) = r_0 \\ v_2(t_0) = v_0 \end{cases}$$



$\downarrow$ evolução resulta

$r_1(t) \equiv r(t) \qquad r_2(t) = r'(t)$

Como o sistema deve ser simétrico pela troca de $1 \leftrightarrow 2$, $H(r_1 p_1 r_2 p_2) = H(r_2 p_2 r_1 p_1)$

e a segunda alternativa daria

$r_1(t) = r'(t) \qquad r_2(t) = r(t)$

$\Rightarrow$ A evolução temporal é fixada pela condição inicial

$(r_0, v_0) \longrightarrow (r(t), v(t))$

$(r_0', v_0') \longrightarrow (r'(t), v'(t))$

Exemplo
$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \alpha (q_1 - q_2)^2$$

Definindo
$$\begin{cases} Q = \dfrac{q_1+q_2}{2} & q = q_1 - q_2 \\ P = p_1 + p_2 & p = \dfrac{p_1 - p_2}{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{ll} q_1 = Q + q/2 & q_2 = Q - q/2 \\ p_1 = p + \dfrac{P}{2} & p_2 = p - \dfrac{P}{2} \end{array}$$

$$M = 2m \quad ; \quad \mu = m/2$$

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + \alpha q^2$$

Escolhemos
$$q_1(0) = q_0 \qquad q_2(0) = q_0'$$
$$p_1(0) = p_0 \qquad p_2(0) = p_0'$$

A solução é
$$P = p_0 + p_0'$$
$$Q = \frac{p_0 + p_0'}{M} t + \left(\frac{q_0 + q_0'}{2}\right) \quad \rightarrow \text{movimento do Centro de Massa}$$

$$q = (q_0 - q_0') \cos wt + \frac{p_0 - p_0'}{2\mu w} \sin wt \qquad w \equiv 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$
$$p = -(q_0 - q_0')\mu w \sin wt + \frac{p_0 - p_0'}{2} \cos wt$$

e
$$q_1(t) = Q + q/2$$
$$q_2(t) = Q - q/2$$

Trocando as condições iniciais $Q(t)$ e $P(t)$ não mudam, mas $q(t) \longrightarrow -q(t)$ e $p(t) \longrightarrow -p(t)$, o que levaria à $q_1(t) \longrightarrow Q - q/2$ e $q_2(t) \longrightarrow Q + q/2$. As trajetórias ficam idênticas, só mudam de nome.

O paradoxo de Gibbs (Reif. cap. 7)

Considere um gás ideal de N partículas colocado num recipiente de volume V. A função de partição é

$$Z' = \frac{1}{h^{3N}} \int e^{-\beta\left[\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N} p_i^2/2m\right]} d^3r_1 \ldots d^3r_N \, d^3p_1 \ldots d^3p_N$$

$$= \frac{1}{h^{3N}} V^N \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3N/2} = \xi^N \quad ; \quad \xi = \frac{V}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}$$

e

$$\log Z' = N\left[\log V - \frac{3}{2}\log\beta + \frac{3}{2}\log\left(\frac{2m\pi}{h^2}\right)\right]$$

A energia média do gás é

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z' = \frac{3}{2}\frac{N}{\beta} = \left(\frac{3}{2}kT\right)N$$

A entropia é

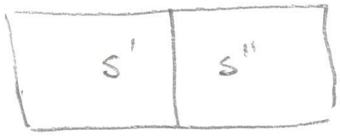
$$S = \frac{E}{T} - \frac{F}{T} \qquad \text{onde} \qquad e^{-\beta F} = Z'$$

$$S = k\left[\beta E + \ln Z'\right] = Nk\left[\log V + \frac{3}{2}\log T + \sigma\right]$$

$$\sigma = \frac{3}{2}\log\left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right) + \frac{3}{2}$$

Esse valor de entropia está errado, pois não é aditivo. Se dobrarmos N e V, a entropia não dobra.

Separando o container em duas partes iguais com uma divisão teríamos



$$S' = S'' = N'R\left[\log V' + \frac{3}{2}\log T + \sigma\right] \quad ; \quad N' = \frac{N}{2} \quad ; \quad V' = \frac{V}{2}$$

$$S' + S'' = NR\left[\log V/2 + \frac{3}{2}\log T + \sigma\right] \neq S$$

<u>Solução</u>: como as partículas são idênticas, trocar uma com outra não é uma nova configuração. Portanto, a função de partição correta é

$$Z = \frac{2'}{N!} = \frac{\xi^N}{N!}$$

e

$$\log Z \simeq N\log\xi - N\log N + N \qquad (\text{Aprox. Stirling})$$

A energia média não muda, mas

$$S = kN\left[\log V + \frac{3}{2}\log T + \sigma\right] + k\left[-N\log N + N\right]$$

$$= kN\left[\log(V/N) + \frac{3}{2}\log T + \sigma_0\right]$$

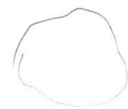
$$\sigma_0 = \sigma + 1$$

Isso ilustra a necessidade de um tratamento coerente das partículas idênticas mesmo na descrição clássica.

3 - Mecânica Quântica

a) Exemplo: colisão de 2 partículas idênticas

ANTES: funções de onda sem overlap



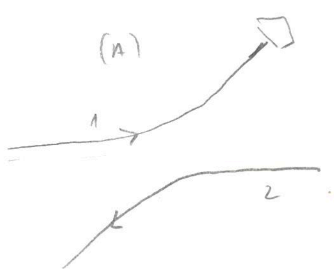
DURANTE: overlap

Se medirmos uma partícula, qual delas teremos medido?

DEPOIS: detecção de 1 partícula em D. Qual delas?

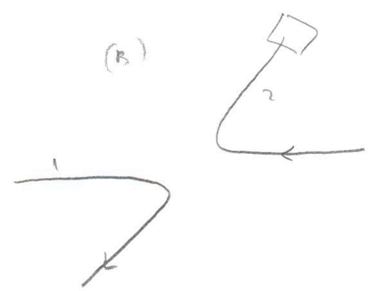
Qual o estado final do sistema?

(A)



ou

(B)



?

Como calcular a prob. de detecção? Usando (A), (B) ou ambos?

b) Degenerescência de troca

α) Exemplo: duas part. de spin 1/2.

O estado físico é uma ↑ outra ↓. As descrições matemáticas possíveis são:

$$|\varepsilon_1 = +, \varepsilon_2 = -\rangle \quad \text{ou} \quad |\varepsilon_1 = -, \varepsilon_2 = +\rangle$$

Na verdade qualquer estado $|\psi\rangle = \alpha|+,-\rangle + \beta|-,+\rangle$; $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ representa esse estado físico, pois a prob. de medirmos um spin ↑ e outro ↓ é:

$$P = |\langle +-|\psi\rangle|^2 + |\langle -+|\psi\rangle|^2 = 1$$

Qual a prob. de medirmos S_x nas duas partículas obter $++$?

$$\mathcal{P}^x_{++} = \left| {}_x\langle ++ | \psi \rangle \right|^2$$

$$|++\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\varepsilon_1 = +\rangle + |\varepsilon_1 = -\rangle \right] \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\varepsilon_2 = +\rangle + |\varepsilon_2 = -\rangle \right] = \frac{1}{2}\left[|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle \right]$$

$$\mathcal{P}^x_{++} = \left| \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \right|^2$$ e isso depende da escolha de α e β!

Qual é a escolha que corresponde à realidade?

β) Três partículas idênticas

- espaço de estados $\mathcal{E} = \mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{E}(3)$
- seja $B(1)$ um operador (CCOC) em $\mathcal{E}(1)$ e $|b_i\rangle$ uma base, então

  $|1{:}b_i, 2{:}b_j, 3{:}b_k\rangle$ é uma base em $\mathcal{E}$

- o estado físico onde $\begin{cases} 1 \text{ partícula tem } b_n \\ 1 \quad " \quad \text{tem } b_p \\ 1 \quad " \quad \text{tem } b_q \end{cases}$

é $6 = 3!$ indeterminado, ou há degenerescência de troca $= 6$

$|b_n, b_p, b_q\rangle \quad |b_n\, b_q\, b_p\rangle \quad |b_p\, b_n\, b_q\rangle \quad |b_q\, b_n\, b_p\rangle$

$|b_p\, b_q\, b_n\rangle \quad |b_q\, b_p\, b_n\rangle$

Como escolher?

OPERADORES DE PERMUTAÇÃO

1) Sistemas de 2 partículas — $\underline{\underline{P_{21}}}$ (VAMOS SUPOR QUE AS PARTÍCULAS NÃO SÃO IDÊNTICAS POR ENQUANTO; exemplo 1 = elétron 2 = pósitron)

<u>BASE</u> $|1:u_i, 2:u_j\rangle \equiv |2:u_j, 1:u_i\rangle$

NOTE que $|1:u_j, 2:u_i\rangle \neq |1:u_i, 2:u_j\rangle$

<u>DEFINIÇÃO</u> $P_{21}|1:u_i, 2:u_j\rangle = |2:u_i, 1:u_j\rangle = |1:u_j, 2:u_i\rangle$

<u>PROPRIEDADES</u>

a) $P_{21}^2 = 1$

b) $P_{21}^\dagger = P_{21}$ → hermitiano

$\langle 1:u_{i'}, 2:u_{j'}| P_{21}^\dagger |1:u_i, 2:u_j\rangle = [\langle 1:u_i, 2:u_j| P_{21} |1:u_{i'}, 2:u_{j'}\rangle]^*$

$= \langle 2:u_{i'}, 1:u_{j'}|1:u_i, 2:u_j\rangle = \delta_{ij'}\delta_{i'j}$

que é igual à operação de P_{21}

c) $P_{21}^\dagger P_{21} = P_{21} P_{21}^\dagger = 1$ → unitário

ESTADOS SIMÉTRICOS e ANTISSIMÉTRICOS

se $P_{21}|\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle$ → $|\psi_S\rangle$ é simétrico

se $P_{21}|\psi_A\rangle = -|\psi_A\rangle$ → $|\psi_A\rangle$ é antissimétrico

NOTE que os auto-valores de P_{21} são apenas ± 1:

$P_{21}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$P_{21}^2|\alpha\rangle = \alpha^2|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ pois $P_{21}^2 = 1$ e $\alpha = \pm 1$

<u>DEFINIÇÃO</u> : operadores de simetrização e anti-simetrização.

$$S = \frac{1}{2}(1 + P_{21})$$

$$A = \frac{1}{2}(1 - P_{21})$$

- $S + A = \mathbb{1}$

- $S^2 = \frac{1}{4}(1 + P_{21})(1 + P_{21}) = \frac{1}{4}(1 + 1 + 2P_{21}) = \frac{1}{2}(1 + P_{21}) = S$

$A^2 = A \quad \Rightarrow \quad S, A$ são projetores

- $S^\dagger = S \quad , \quad A^\dagger = A$

- $SA = \frac{1}{4}(1 + P_{21})(1 - P_{21}) = \frac{1}{4}(1 - P_{21}^2) = 0$

$AS = 0$

$\Rightarrow$ S e A projetam em sub-espaços complementares

- $P_{21}(S|\psi\rangle) = \frac{P_{21}}{2}(1 + P_{12})|\psi\rangle = \frac{1}{2}(P_{21} + 1) = S|\psi\rangle$

$\Rightarrow \quad S|\psi\rangle$ é um estado simétrico

$P_{21}(A|\psi\rangle) = \frac{P_{21}}{2}(1 - P_{12})|\psi\rangle = -\frac{1}{2}(1 - P_{21})|\psi\rangle = -A|\psi\rangle$

$\Rightarrow \quad A|\psi\rangle$ é um estado anti-simétrico.

Ação de P_{21} nos operadores

se $B(1)\,|1:u_i,\,2:u_j\rangle = u_i\,|1:u_i,\,2:u_j\rangle$

- $P_{21}\,B(1)\,P_{21}^{+}\,|1:u_i,\,2:u_j\rangle = P_{21}\,B(1)\,|1:u_j,\,2:u_i\rangle = u_j\,|1:u_i,\,2:u_j\rangle$

$\Rightarrow \quad P_{21}\,B(1)\,P_{21} = B(2)$

- se $O(1,2) = B(1)\,C(2)$

$P_{21}\,O(1,2)\,P_{21}^{+} = P_{21}\,B(1)\,P_{21}^{+}\,P_{21}\,C(2)\,P_{21}^{+} = B(2)\,C(1) = O(2,1)$

Um observável é simétrico se $O(1,2) = O(2,1)$

Nesse caso $O(1,2) = P_{21}\,O(1,2)\,P_{21}^{+}$

$O(1,2)\,P_{21} = P_{21}\,O(1,2) \rightarrow [O(1,2),\,P_{21}] = 0$

2- Sistemas com um número arbitrário de partículas

Caso de $N=3$

Construímos uma base em $\mathcal{E} = \mathcal{E}(1)\times\mathcal{E}(2)\times\mathcal{E}(3)$, espaço produto.

$$|1:u_i,\,2:u_j,\,3:u_k\rangle$$

Permutações possíveis $P_{123},\ P_{312},\ P_{231},\ P_{132},\ P_{321},\ P_{213}$

$P_{123} = \mathbb{1}$

$P_{npq}\,|1:u_i;\,2:u_j,\,3:u_k\rangle = |n:u_i,\,p:u_j,\,q=u_k\rangle \qquad (n,p,q = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3)$

$P_{231}\,|1:u_i,\,2:u_j,\,3:u_k\rangle = |2:u_i,\,3:u_j,\,1:u_k\rangle = |1:u_k,\,2:u_i,\,3:u_j\rangle$

Propriedades

α) O conjunto das permutações forma um grupo. (usaremos $N=3$ como exemplo).

1) P_{123} = identidade

2) $P_\alpha P_\beta = P_\gamma$. Exemplo $P_{312} P_{132} = P_{321}$

$$P_{312} P_{132} |1:\mu_i, 2:\mu_j, 3:\mu_k\rangle = P_{312} |1:\mu_i, 3:\mu_j, 2:\mu_k\rangle$$

$$= P_{312} |1:\mu_i, 2:\mu_k, 3:\mu_j\rangle = |3:\mu_i, 1:\mu_k, 2:\mu_j\rangle = |1:\mu_k, 2:\mu_j, 3:\mu_i$$

$$= P_{321} |1:\mu_i, 2:\mu_j, 3:\mu_k\rangle .$$

3) Cada P_α tem um inverso. Exemplos: $P_{132}^{-1} = P_{132}$; $P_{312}^{-1} = P_{231}$

4) O grupo é não-comutativo (não-Abeliano)

$$P_{312} P_{132} = P_{321}$$

$$P_{132} P_{312} = P_{213}$$

5) Se $\beta \neq \beta'$ então $P_\alpha P_\beta \neq P_\alpha P_{\beta'}$

PROVA: suponha que valha a igualdade. Então, multiplicando à esquerda por P_α^{-1} teríamos $P_\beta = P_{\beta'}$ o que não é verdade por hipótese.

6) $P_\alpha \{P_\beta\} = \{P_\beta\}$

PROVA: Para cada P_β do conjunto $P_\alpha P_\beta$, $P_\alpha P_{\beta'}$, $P_\alpha P_{\beta''}, \ldots$ são todos distintos pelo item acima. Portanto os $N!$ elementos $P_\alpha P_\beta$ são permutações distintas e reproduzem o grupo original.

7) $\{P_\alpha^{-1}\} = \{P_\alpha\}$.

<u>Prova</u> Se $\alpha \neq \alpha'$, $P_\alpha^{-1} \neq P_{\alpha'}^{-1}$. Se a igualdade fosse verdadeira, multiplicando por P_α teríamos $1 = P_\alpha P_{\alpha'}^{-1}$ e, multiplicando por $P_{\alpha'}$, $P_{\alpha'} = P_\alpha$. Se as inversas são todas distintas, seu conjunto reproduz o grupo original.

B) Transposições e Paridade

- Transposições são permutações onde apenas 2 partículas são trocadas.
  Exemplos: P_{132}, P_{321} e P_{213}.

- Toda permutação pode ser escrita como um produto de transposições, pois qualquer arranjo pode ser obtido trocando duas partículas de cada vez até que a sequência final seja atingida.
  Exemplo: $P_{312} = P_{132}\,P_{213} = P_{321}\,P_{132}$

- A decomposição não é única, mas o número de transposições da decomposição é sempre par ou sempre ímpar.

- Se o número de transposições é <u>par</u>, a <u>paridade da permutação é $\varepsilon = +1$</u>.

- Se o número de transposições é <u>ímpar</u>, a <u>paridade da permutação é $\varepsilon = -1$</u>.

n) Permutações são unitárias

1) Transposições são unitárias e hermitianas: $P_{132}^{\dagger} = P_{132}$, $P_{132}^{\dagger} P_{132} = 1$

2) $P_{312}^{\dagger} = (P_{132} P_{213})^{\dagger} = P_{213} P_{132} \neq P_{132} P_{213} \Rightarrow$ Não são hermitianas

3) $P_{312} P_{312}^{\dagger} = P_{132} \underbrace{P_{213} P_{213}}_{1} P_{132} = P_{132} P_{132} = \mathbb{1} \Rightarrow$ SÃO unitárias

4) Note que $P_\alpha^{\dagger} = P_\alpha^{-1}$: $P_{312}^{-1} = P_{312}^{\dagger} = [P_{132} P_{213}]^{\dagger} = P_{213}^{\dagger} P_{132}^{\dagger} = P_{213} P_{132}$

SIMETRIZADORES , ANTISIMETRIZADORES , $|\psi_S\rangle$ e $|\psi_A\rangle$

- $|\psi_S\rangle$ é completamente simétrico se $P_\alpha |\psi\rangle = |\psi\rangle$ p/ todo P_α
- $|\psi_A\rangle$ é completamente anti-simétrico se $P_\alpha |\psi\rangle = \varepsilon_\alpha |\psi\rangle$ p/ todo P_α

onde ε_α é a paridade da permutação.

- $S = \frac{1}{N!} \sum_\alpha P_\alpha$
- $A = \frac{1}{N!} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha P_\alpha$

PROPRIEDADES

1) $S^{\dagger} = S$; $A^{\dagger} = A$

Prova
$$S^{\dagger} = \frac{1}{N!} \sum_\alpha P_\alpha^{\dagger} \quad ; \quad P_\alpha^{\dagger} = P_\alpha^{-1}$$
$$= \frac{1}{N!} \sum_\alpha P_\alpha^{-1} \quad ; \quad \text{como } P_\alpha^{-1} \in \text{grupo} , \; P_\alpha^{-1} = P_\beta$$
$$= \frac{1}{N!} \sum_\beta P_\beta = S$$

OBS Note que P_α e P_α^{-1} tem a mesma paridade, pois $P_\alpha^{-1} = P_\alpha^{\dagger}$ que tem o mesmo # de transposições de P_α.

2) Para qualquer permutação P_{α_0}

$$P_{\alpha_0} S = S P_{\alpha_0} = S$$

$$P_{\alpha_0} A = A P_{\alpha_0} = \varepsilon_{\alpha_0} A$$

Prova

$$P_{\alpha_0} A = \frac{1}{N!} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha P_{\alpha_0} P_\alpha \quad ; \quad P_{\alpha_0} P_\alpha = P_\beta$$

$$\varepsilon_{\alpha_0} \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$$

$$= \varepsilon_{\alpha_0} \frac{1}{N!} \sum_\alpha (\varepsilon_{\alpha_0} \varepsilon_\alpha)(P_{\alpha_0} P_\alpha) \qquad \varepsilon_{\alpha_0} \varepsilon_{\alpha_0} = 1$$

$$= \varepsilon_{\alpha_0} \frac{1}{N!} \sum_\beta \varepsilon_\beta P_\beta = \varepsilon_{\alpha_0} A$$

3) $S^2 = S \quad , \quad A^2 = A$

$$S^2 = \frac{1}{(N!)} \sum_\alpha \left[\frac{\sum_\beta P_\alpha P_\beta}{N!} \right] = \frac{1}{N!} \sum_\alpha \left[\sum_{\beta'} P_{\beta'} \frac{1}{N!} \right] = \left(\frac{1}{N!} \sum_{\beta'} P_{\beta'} \right) \underbrace{\left(\frac{1}{N!} \sum_\alpha \right)}_{1} = S$$

4) $AS = SA = 0$

$$AS = \frac{1}{N!} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha P_\alpha S = \frac{1}{N!} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha S = S \frac{1}{N!} \underbrace{\sum \varepsilon_\alpha}_{=0}$$

5) $S + A \neq 1$

6) $P_\alpha \left(S|\psi\rangle \right) = S|\psi\rangle$

$$P_\alpha \left(A|\psi\rangle \right) = \varepsilon_\alpha A|\psi\rangle$$

$\Rightarrow$ $S|\psi\rangle$ é um estado completamente simétrico
$A|\psi\rangle$ " " " antisimétrico

C- O Postulado de Simetrização

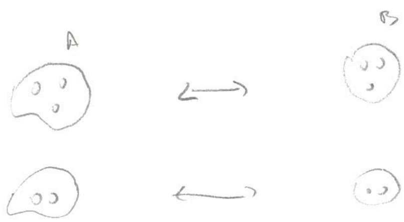
Quando um sistema inclui várias partículas idênticas, seu estado físico deve ser ou completamente simétrico (bosons) ou completamente antissimétrico (férmions).

- resultado experimental: boson = spin inteiro
  férmions = spin semi-inteiro

OBS. Teoria quântica de campos mostra a partir de regras mais gerais

- regra vale não apenas p/ partículas elementares, mas p/ sistemas compostos:

sistema com 3 férmions = férmion ($\forall$ número ímpar)
sistema com 2 " = boson ($\forall$ " par)



troca A e B $\Rightarrow$ três transposições $- - - = -$

troca A e B $\Rightarrow$ duas transposições $- - = +$

Note que toda transposição tem $\varepsilon = -1$

Eliminação da degenerescência de troca

Antes do postulado: $\{|u\rangle, P_{\alpha}|u\rangle, P_{\alpha'}|u\rangle, \ldots \text{etc}\}$ eram todos possíveis, ou qualquer comb. linear deles

agora fazemos (bosons) $S|u\rangle$;

$S P_{\alpha}|u\rangle = S|u\rangle$
$S P_{\alpha'}|u\rangle = S|u\rangle$ $\Rightarrow$ todos colineares $\Rightarrow$ todos iguais

$\Rightarrow$ Dado um $|u\rangle$ qualquer, $S|u\rangle$ leva ao estado físico sem ambiguidades.

Construção dos Estados Físicos e de Bases em $\mathcal{E}_S$ e $\mathcal{E}_A$

receita p/ estado físico

1) enumera-se as partículas 1, 2, ... N ⇒ $|u\rangle$

2) Projeta-se $S|u\rangle$ ou $A|u\rangle$

3) Normaliza-se

Exemplos

Duas partículas : (A) uma em $|\varphi\rangle$ outra em $|\chi\rangle$ normal. e ortog.

$$|u\rangle = |1:\varphi, 2:\chi\rangle$$

bósons $S|u\rangle = \frac{1}{2}\left[|1:\varphi, 2:\chi\rangle + |1:\chi, 2:\varphi\rangle\right]$

férmions $A|u\rangle = \frac{1}{2}\left[|1:\varphi, 2:\chi\rangle - |1:\chi, 2:\varphi\rangle\right]$

Normalização : $\frac{1}{2} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) as duas em $|\varphi\rangle$

bósons $|1:\varphi, 2:\varphi\rangle$ já sim. e norm.

férmions $\left[|1:\varphi, 2:\varphi\rangle - |1:\varphi, 2:\varphi\rangle\right] = 0$

Princípio de exclusão de Pauli

Dois férmions não podem ocupar o mesmo estado individual

Três partículas

uma — $|\varphi\rangle$

uma — $|\chi\rangle$

um — $|\omega\rangle$

Bosons : $|1:\varphi, 2:\chi, 3:\omega\rangle = |u\rangle$

$$|\psi_S\rangle = S|u\rangle = \frac{1}{6}\Big[|1:\varphi, 2:\chi; 3:\omega\rangle + |3:\varphi, 1:\chi, 2:\omega\rangle + |2:\varphi, 3:\chi; 1:\omega\rangle$$
$$+ |1:\varphi, 3:\chi, 2:\omega\rangle \ldots \Big]$$

$$|\psi_A\rangle = A|u\rangle = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} |1:\varphi\rangle & |1:\chi\rangle & |1:\omega\rangle \\ |2:\varphi\rangle & |2:\chi\rangle & |2:\omega\rangle \\ |3:\varphi\rangle & |3:\chi\rangle & |3:\omega\rangle \end{vmatrix} = \text{deferm. de Slater}$$

se dois estados coincide $|\psi_A\rangle = 0$

Normal. $\frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}$.

BASES

Base em $\mathcal{E} = \mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(2) \otimes \ldots \mathcal{E}(N)$: $|1:u_i, 2:u_j, \ldots N:u_p\rangle$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}|\psi\rangle \in \mathcal{E}_S \\ |\psi\rangle \in \mathcal{E}\end{array}\right\} \Rightarrow$ fica $|\psi\rangle = \sum C_{ij\ldots p} |1:u_i, 2:u_j, \ldots N:u_p\rangle$

com $S|\psi\rangle = |\psi\rangle = \sum C_{ij\ldots p} \underbrace{S|1:u_i, 2:u_j \ldots N:u_p\rangle}_{\text{formam uma base em } \mathcal{E}_S}$

Assim, projetando a base de $\mathcal{E}$ obtemos bases em $\mathcal{E}_S$ e $\mathcal{E}_A$.

problema é que várias projeções vão produzir o mesmo vetor: $|1:u_i, 2:u_j \ldots\rangle$ e $|1:u_j, 2:u_i, \ldots\rangle$ levam ao mesmo estado em $\mathcal{E}_S$

Definição : o número de ocupação do estado individual $|u_k\rangle$ em

$|1:u_i, 2:u_j \ldots N:u_p\rangle = |u\rangle$

é o número de vezes que ele aparece em $|u\rangle$

$$|\underbrace{1:u_1, 2:u_1, \ldots, n_1:u_1}_{n_1 \text{ vezes}}, \underbrace{n_1{+}1:u_2, \ldots n_2{+}n_1:u_2}_{n_2 \text{ vezes}}, \ldots\rangle$$

existem vários estados $|u\rangle$ que correspondem aos mesmos números de ocupação, mas estes são permutações uns dos outros. Assim $S|u\rangle = \underbrace{|n_1, n_2, \ldots\rangle}_{\text{ESTADO JÁ SIMETRIZADO}} \equiv |\underset{\sim}{n}\rangle$ e $A|u\rangle$ são unicamente definidos pelos n_k's.

Bosons : o conjunto $|n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots\rangle$ forma uma base em $\mathcal{E}_S$ $\left(\sum_k n_k = N\right)$ e os n_k's podem assumir $\forall$ valor de 0 a N.

Férmions IDEM, mas $n_k = 0$ ou 1 apenas.

Normalização
$$|n_1 n_2 \ldots n_k\rangle = \sqrt{\frac{N!}{n_1! \ldots n_k! \ldots}}\; S\,|1:u_1, 2:u_1 \ldots n_1:u_1, \ldots\rangle$$

$$|n_1 n_2 \ldots n_k \ldots\rangle = \sqrt{N!}\; A\,|1:u_1, 2:u_2, \ldots\rangle$$

Prova
$$1 = \langle \underset{\sim}{n} | \underset{\sim}{n}\rangle = c^2 \langle 1:u_1, 2:u_1, \ldots | \underset{S^2 = S}{S^\dagger S} |1:u_1, 2:u_1 \ldots\rangle = c^2 \langle 1:u_1, 2:u_1 \ldots | \left[\frac{1}{N!} \sum P_\alpha |1:u_1, 2:u_1 \ldots\rangle\right.$$

$$= c^2 \frac{1}{N!} (n_1!\, n_2! \ldots)$$ pois só permutações dentro de cada bloco dão resultado igual a $|1:u_1, 2:u_1, \ldots\rangle$. As outras são ortogonais.

No caso de férmions, só a identidade contribui.

PROCESSO DE MEDIDA

a) Se $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_S$ e fazemos uma medida, o estado final será $|u\rangle \in \mathcal{E}_S$ e a prob. da medida é $|\langle u|\psi\rangle|^2$

b) Observáveis: independente de férmions ou bosons todos os observáveis devem ser simétricos.

Exemplos 3 partículas

$$\mathbb{R}_G = \frac{1}{3}(\mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_2 + \mathbb{R}_3) \qquad \text{(c. massa)}$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 + \mathbb{L}_3$$

$$H = \frac{\mathbb{P}_1^2}{2m} + \frac{\mathbb{P}_2^2}{2m} + \frac{\mathbb{P}_3^2}{2m} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbb{R}_1-\mathbb{R}_2|} + \frac{1}{|\mathbb{R}_2-\mathbb{R}_3|} + \frac{1}{|\mathbb{R}_3-\mathbb{R}_1|}\right)$$

Portanto, se G é um observável $[G, P_\alpha] = 0$ (VEJA 14a)

e se $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_A$, por exemplo, $G|\psi\rangle$ t.b. $\in \mathcal{E}_A$:

$$P_\alpha|\psi\rangle = \varepsilon_\alpha|\psi\rangle$$

$$P_\alpha G|\psi\rangle = G P_\alpha|\psi\rangle = \varepsilon_\alpha G|\psi\rangle$$

Os valores possíveis de uma medida de G num sistema de férmions são seus auto-valores calculados no sub-espaço $\mathcal{E}_A$

PROVA DA COMUTAÇÃO $[G, P_\alpha]$

Para duas partículas $P_\alpha = P_{21}$ e $G(1,2) = G(2,1)$. Como vimos

$$P_{21}\, G(1,2)\, P_{21}^{+} = G(2,1) = G(1,2) \Rightarrow P_{21}\, G(1,2) = G(1,2)\, P_{21}$$

Para três partículas podemos escrever uma permutação como $P_\alpha = T_\beta T_\gamma$ onde T são transposições. (pode ocorrer t.b. $P_\alpha = T_\alpha$). Nesse caso

$$P_\alpha\, G(1,2,3)\, P_\alpha^{+} = T_\beta T_\gamma\, G(1,2,3)\, T_\gamma T_\beta = T_\beta\, G(1,2,3)\, T_\beta = G(1,2,3)$$

onde usamos que $T_\gamma\, G(1,2,3)\, T_\gamma = G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = G(1,2,3)$ pois G é simétrico.

Exemplo $\quad T_{132}\, G(1,2,3)\, T_{132} = G(1,3,2) = G(1,2,3)$.

O argumento se generaliza p/ $\forall$ número de partículas

n) EVOLUÇÃO TEMPORAL : se $|\Psi(t_0)\rangle \in \mathcal{E}_A$ então

$|\Psi(t)\rangle$ t.b. $\in \mathcal{E}_A$.

$$i\hbar \frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = H|\Psi\rangle \quad \Rightarrow$$

$$i\hbar\left[|\Psi(t+dt)\rangle - |\Psi(t)\rangle\right] = dt\, H|\Psi(t)\rangle$$

$$|\Psi(t+dt)\rangle = \left[1 - \frac{i}{\hbar} dt\, H\right]|\Psi(t)\rangle$$

$\Rightarrow$ se $P_\alpha|\Psi(t)\rangle = \varepsilon_\alpha|\Psi(t)\rangle$

$$P_\alpha|\Psi(t+dt)\rangle = P_\alpha\left[1 - \frac{i\,dt\,H}{\hbar}\right]|\Psi(t)\rangle = \left[1 - \frac{i\,dt\,H}{\hbar}\right]P_\alpha|\Psi(t)\rangle$$

$$= \varepsilon_\alpha|\Psi(t+dt)\rangle$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}_A$ e $\mathcal{E}_S$ são invariantes pela evolução temporal.

Note que se H não depende de t,

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}|\Psi(t_0)\rangle = U(t-t_0)|\Psi(t_0)\rangle$$

PRINCÍPIO DE EXCLUSÃO DE PAULI

sistema de N part. idênticas não-interagentes

$$H(1,2,\ldots,N) = h(1) + h(2) + \ldots h(N)$$

$$h(1)|\varphi_n\rangle = \epsilon_n|\varphi_n\rangle$$

BOSONS

$$|\Phi^s\rangle = c\sum_\alpha P_\alpha |1:\varphi_{n_1}, 2:\varphi_{n_2}, \ldots, N:\varphi_{n_N}\rangle$$

$$H|\Phi^s_{n_1\ldots n_N}\rangle = [h(1)+\ldots h(N)]\, c\sum_\alpha P_\alpha |1:\varphi_{n_1}, \ldots, N:\varphi_{n_N}\rangle$$

$$= (\epsilon_{n_1} + \epsilon_{n_2} \ldots \epsilon_{n_N})\, |\Phi^s_{n_1\ldots n_N}\rangle$$

ESTADO FUNDAMENTAL : $E_{1,1,\ldots,1} = N\epsilon_1$

$$|\Phi^s_{1,\ldots,1}\rangle$$

FÉRMIONS

$$|\Phi^A_{1,2,\ldots,N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} |1:\Phi_1\rangle & \ldots & |1:\Phi_N\rangle \\ \vdots & & \\ |N:\Phi_1\rangle & \ldots & |N:\Phi_N\rangle \end{vmatrix} \leftarrow \text{EST. FUNDAMENTAL}$$

$$E_{1,2,\ldots,N} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_N$$

$$\epsilon_N \equiv \text{Energia de Fermi}$$

Exemplo $^4He = 2p + 2n + 2e$ = boson → condensação de Bose (superfluido)

$^3He = 2p + 1n + 2e$ = fermion → tem prop. diferentes.

CONSEQUÊNCIAS NAS PREVISÕES

2 partículas

$1 \to |\varphi\rangle$

$1 \to |\chi\rangle$

Queremos medir B. Qual a prob. de obtermos os valores b_n e $b_{n'}$?

Seja $B|u_i\rangle = b_i|u_i\rangle$.

Inicialmente $$|\varphi:\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon P_{21})\,|1:\varphi, 2:\chi\rangle$$ $\varepsilon = +$ bosons, $\varepsilon = -$ férmions

Depois da medida $$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon P_{21})\,|1:u_n, 2:u_{n'}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P} = \left|\frac{1}{2}\langle 1:u_n, 2:u_{n'}|(1+\varepsilon P_{21}^{\dagger})(1+\varepsilon P_{21})|1:\varphi, 2:\chi\rangle\right|^2$$

$$= \left|\left(\langle 1:u_n, 2:u_{n'}| + \varepsilon\langle 1:u_{n'}, 2:u_n|\right)|1:\varphi, 2:\chi\rangle\right|^2$$

$$= \left|\langle u_n|\varphi\rangle\langle u_{n'}|\chi\rangle + \varepsilon\langle u_{n'}|\varphi\rangle\langle u_n|\chi\rangle\right|^2$$

termo direto — termo de troca $\Rightarrow$ interferência!

Como seria p/ partículas distinguíveis?

Assumimos que o medidor não distingue entre elas (embora fosse possível fazê-lo):

$$\mathcal{P} = \left|\langle 1:u_n, 2:u_{n'}|1:\varphi, 2:\chi\rangle\right|^2 + \left|\langle 1:u_{n'}, 2:u_n|1:\varphi, 2:\chi\rangle\right|^2 \to \text{sem interferência.}$$

E se $b_{n'} = b_n$?

Estado final $= |u_n, u_n\rangle = |1{:}u_n, 2{:}u_n\rangle \Rightarrow$ Não dá p/ férmions

p/ bósons $\mathcal{P} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1{:}u_n, 2{:}u_n|\left[|1{:}\varphi, 2{:}\chi\rangle + |1{:}\chi, 2{:}\varphi\rangle\right]\right|^2$

$$= \frac{1}{2}\left|\langle u_n|\varphi\rangle\langle u_n|\chi\rangle + \langle u_n|\chi\rangle\langle u_n|\varphi\rangle\right|^2 = 2\left|\langle u_n|\varphi\rangle\langle u_n|\chi\rangle\right|^2$$

Para partículas distinguíveis dá apenas $\mathcal{P} = \left|\langle 1{:}u_n, 2{:}u_n|1{:}\varphi, 2{:}\chi\rangle\right|^2$

$$= \left|\langle u_n|\varphi\rangle\langle u_n|\chi\rangle\right|^2$$

Exemplo concreto: colisão no centro de massa

ANTES

DEPOIS

$\varepsilon = \begin{cases} + \to \text{bósons} \\ - \to \text{férmions} \end{cases}$

$$|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon P_{21})\,|1{:}\,p\hat{z}, 2{:}-p\hat{z}\rangle$$

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)\,|\Psi_i\rangle \quad ; \quad U = e^{-iHt/\hbar} \quad \text{e} \quad [U, P_\alpha] = 0$$

Depois da medida $\quad |\Psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon P_{21})\,|1{:}\,p\hat{n}, 2{:}-p\hat{n}\rangle$

$$\mathcal{P} = |\langle\Psi_f|\Psi(t)\rangle|^2 = \Big|\langle 1{:}\,p\hat{n}, 2{:}-p\hat{n}|\underbrace{(1+\varepsilon P_{21}^{\dagger})\frac{U(t)}{2}(1+\varepsilon P_{21})}_{(1+\varepsilon P_{21})\,U(t)}|1{:}\,p\hat{z}, 2{:}-p\hat{z}\rangle\Big|^2$$

$$= \left|\langle 1{:}\,p\hat{n}, 2{:}-p\hat{n}|U(t)|1{:}\,p\hat{z}, 2{:}-p\hat{z}\rangle + \varepsilon\,\langle 1{:}-p\hat{n}, 2{:}\,p\hat{n}|U(t)|1{:}\,p\hat{z}, 2{:}-p\hat{z}\rangle\right|^2$$

SITUAÇÕES ONDE OS POSTULADOS PODEM SER IGNORADOS

a) Part. Idênticas situadas em regiões desconexas:

$1:\varphi \; , \; 2:\chi$ com $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ se $\mathbf{r} \in D$

$\chi(\mathbf{r}) = 0$ se $\mathbf{r} \in \Delta$

Um detector que só mede partículas em D vai detectar a partícula 1 ou nenhuma.

- um medidor em D, $\mathcal{M}_D \longrightarrow$ mede $|u\rangle \Rightarrow \langle \mathbf{r}|u\rangle = 0$ se $\mathbf{r} \notin D$
- " " em Δ, $\mathcal{M}_\Delta \longrightarrow$ mede $|v\rangle \Rightarrow \langle \mathbf{r}|v\rangle = 0$ se $\mathbf{r} \notin \Delta$

Probabilidade de medir uma partícula em $|u\rangle$ e outra em $|v\rangle$ é:

$$\mathcal{P} = \left| \langle 1:u, 2:v | (1 + \varepsilon P_{21}) | 1:\varphi, 2:\chi\rangle \right|^2$$

$$= \left| \langle 1:u, 2:v | 1:\varphi, 2:\chi\rangle + \varepsilon \langle 1:v, 2:u | 1:\varphi, 2:\chi\rangle \right|^2$$

$$= \left| \langle u|\varphi\rangle \langle v|\chi\rangle + \varepsilon \langle v|\varphi\rangle \langle u|\chi\rangle \right|^2 \; ; \text{ mas}$$

$$\langle v|\varphi\rangle = \int v^*(\mathbf{r})\, \varphi(\mathbf{r})\, d^3r = 0 = \langle u|\chi\rangle$$

$\mathcal{P} = \left| \langle u|\varphi\rangle \langle v|\chi\rangle \right|^2$, como se as part. fossem distinguíveis.

b) Partículas identificáveis pelo spin

$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon P_{21})\,|1: p\hat{z}+\,,\ 2: -p\hat{z}-\rangle$; interação não envolve spin

$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon P_{21})\,U(t)\,|1: p\hat{z}+\,,\ 2: -p\hat{z}-\rangle$

$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon P_{21})\,|1: p\hat{n}+\,,\ 2: -p\hat{n}-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1: p\hat{n}+\,,\ 2: -p\hat{n}-\rangle + \varepsilon|1: -p\hat{n}-\,,\ 2: p\hat{n}+\rangle\right]$

$$\mathcal{P} = \left|\left(\langle 1: p\hat{n}+\,,\ 2: -p\hat{n}-| + \varepsilon\langle 1: -p\hat{n}-\,,\ 2: p\hat{n}+|\right)\left(U(t)\,|1: p\hat{z}+\,,\ 2: -p\hat{z}-\rangle\right)\right|^2$$

$$= \left|\langle 1: p\hat{n}+\,,\ 2: -p\hat{n}-|\,U(t)\,|1: p\hat{z}+\,,\ 2: -p\hat{z}-\rangle\right|^2$$

pois o termo de troca dá zero!