

## NE449 - Tópicos Especiais em Ecologia II

### 1a Prova

No sangue, há uma constante produção de CO<sub>2</sub> devido ao metabolismo basal. Parte deste CO<sub>2</sub> é eliminado pela respiração, e a quantidade eliminada depende da amplitude da respiração. Seja  $C_n$  a quantidade de CO<sub>2</sub> no sangue na  $n$ -ésima respiração,  $V_n$  o volume de gás da respiração e  $m$  a produção basal constante. Podemos modelar esse processo com as equações

$$C_{n+1} = C_n - L(C_n, V_n) + m$$

$$V_{n+1} = f(C_n)$$

onde  $L(C_n, V_n)$  representa a perda de CO<sub>2</sub> pela respiração. Como primeira aproximação vamos supor que o volume da respiração seja proporcional à quantidade de CO<sub>2</sub> existente,  $f(C_n) = \alpha C_n$ , e que a quantidade de CO<sub>2</sub> eliminada seja proporcional ao volume,  $L(C_n, V_n) = \beta V_n$ .

(a) Mostre que, com essas hipóteses, a equação fica

$$C_{n+1} = C_n - \alpha\beta C_{n-1} + m$$

(b) Considere primeiro  $m=0$  e  $4\alpha\beta < 1$ . Resolva a equação e mostre que o volume de CO<sub>2</sub> no sangue vai a zero.

(c) Considere agora que  $m > 0$  e  $4\alpha\beta < 1$ . A solução da equação não-homogênea resultante pode ser escrita como

$$C_n = A(\lambda_+)^n + B(\lambda_-)^n + C_{part}$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes,  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  são os autovalores correspondes à equação homogênea (os mesmo que você obteve na parte (b) do problema) e  $C_{part}$  é uma *solução particular* da equação não-homogênea. Mostre que

$$C_{part} = \frac{m}{\alpha\beta}$$

satisfaz a equação não-homogênea (e portanto é a solução particular procurada). Descreva qualitativamente o comportamento da solução. Resolva o problema para  $\alpha=1/2$ ,  $\beta=3/8$ ,  $m=3/4$  e com as condições iniciais  $C_0=0$  e  $C_1=5$ . Faça um esboço do gráfico de  $C_n$  versus  $n$ . O resultado concorda com suas previsões qualitativas?

(d) Finalmente suponha  $m$  é diferente de zero e que  $4\alpha\beta > 1$ . Mostre que a solução apresenta oscilações e calcule o período dessas oscilações para o caso para  $\alpha=1/2$ ,  $\beta=1$ .

---

Esse problema é uma combinação do problema 3 do ítem 1.9 do livro texto e dos problemas 11 e 18 do final do capítulo 1 do mesmo livro.