

SOLUÇÃO

SEGUNDA PROVA - F789

NOME:

RA:

1. Considere uma partícula de spin $\frac{1}{2}$. Seja $\mathbf{S}$ seu spin e $\mathbf{L}$ seu momento angular orbital. O estado da partícula, $|\Psi\rangle$, tem componentes $\Psi_{\pm}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}, \pm | \Psi \rangle$ na base $|\mathbf{r}, \pm\rangle$ de autoestados de posição e de S_z . Assuma que

$$\Psi_+ = R(r) \left[Y_{00}(\theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}(\theta, \phi) \right]$$

e

$$\Psi_- = \frac{R(r)}{\sqrt{3}} [Y_{11}(\theta, \phi) - Y_{10}(\theta, \phi)] .$$

com $R(r)$ um função real.

- (a) Que condição $R(r)$ deve satisfazer para que $|\Psi\rangle$ seja normalizada?
(b) Se L_z for medido, que valores podem ser obtidos e com quais probabilidades?
(c) Se S_z for medido, que valores podem ser obtidos e com quais probabilidades?

(a) $\int |\Psi_+|^2 dV + \int |\Psi_-|^2 dV = 1$

$$1 = \underbrace{\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr}_{\mathbf{I}} \left[\int |Y_{00} + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10}|^2 d\Omega + \frac{1}{3} \int |Y_{11} - Y_{10}|^2 d\Omega \right]$$
$$= \mathbf{I} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = 2\mathbf{I}$$
$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = \frac{1}{2}}$$

1

(b) Podem ser obtidos 0 e $\hbar$.

$$\begin{aligned} J(0) &= \int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr + \frac{1}{3} \int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr + \frac{1}{3} \int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr \\ &= (1 + 2/3) \cdot I = 5/6 \end{aligned}$$

$$J(1) = \frac{1}{3} I = \frac{1}{6}$$

(c) Podem ser obtidos $\pm \hbar/2$

$$J(+) = I \left[1 + \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{3} I = 2/3$$

$$J(-) = I \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{2}{3} I = 1/3$$

2. Considere duas partículas com momentos angulares orbitais $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$.
Seja $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ o momento angular total e considere os subespaços onde $l_1 = 1$ e $l_2 = 1$. *Seja $l = 2, 1, 0$*

(a) Os autovalores de L^2 e L_z são da forma $\hbar^2 l(l+1)$ e $m\hbar$. Que valores l e m podem assumir?

(b) Seja l_{max} o maior valor possível de l . Calcule $||l_{max}, l_{max}\rangle$ onde $||l, m\rangle$ são autoestados de L^2 e L_z .

(c) Calcule $||l_{max}, l_{max} - 1\rangle$ e $||l_{max} - 1, l_{max} - 1\rangle$.

$$(a) \quad l = 2, 1, 0$$

$$m = 2, 1, 0, -1, -2$$

$$(b) \quad l_{max} = 2$$

$$||22\rangle = ||11\rangle$$

$$(c) \quad L_- ||22\rangle = \hbar \sqrt{2(2+1) - 2(2-1)} ||21\rangle = 2\hbar ||21\rangle$$

$$(L_{1-} + L_{2-}) ||11\rangle = \hbar \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} ||01\rangle + \hbar \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} ||10\rangle$$

$$= \sqrt{2}\hbar (||01\rangle + ||10\rangle)$$

$$||21\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [||01\rangle + ||10\rangle]$$

2

$$||11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [||01\rangle - ||10\rangle]$$

3. Considere um sistema composto por duas partículas de spin $1/2$ cujas variáveis orbitais são ignoradas. A Hamiltoniana do sistema é

$$H = \frac{a}{\hbar^2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) + \frac{\lambda}{\hbar} S_{1z} \equiv H_0 + W$$

onde $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$ são os operadores de spins das partículas 1 e 2, $a > 0$ é uma constante real e $\lambda \ll 1$.

- Calcule os autovalores e autovetores de H_0 .
- Calcule, em primeira ordem de perturbação, a correção na energia para o estado fundamental.
- Mesma pergunta para os estados excitados.
- Os resultados obtidos são exatos ou aproximados? Porque?

$$(a) \quad \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} [S^2 - S_1^2 - S_2^2] = \frac{S^2}{2} - \frac{3}{4} \hbar^2$$

$$H_0 = \frac{a}{2\hbar^2} S^2 - \frac{3a}{4}$$

$$\text{TRIPLET: } \begin{cases} |11\rangle \\ |10\rangle \\ |1-1\rangle \end{cases} \rightarrow E_1 = \frac{a}{2\hbar^2} \hbar^2 1(1+1) - \frac{3a}{4} = \frac{a}{4}$$

$$\text{SINGLET: } |00\rangle \rightarrow E_0 = -\frac{3a}{4}$$

$$(b) \quad \Delta E = \langle 00 | W | 00 \rangle = \frac{\lambda}{\hbar} \langle 00 | S_{1z} | 00 \rangle$$

$$= \frac{\lambda}{\hbar} \langle 00 | S_{1z} \left[\frac{|1+-\rangle - |1-+\rangle}{\sqrt{2}} \right] \rangle$$

$$= \frac{\lambda}{2} \langle 00 | \left(\frac{|1+-\rangle + |1-+\rangle}{\sqrt{2}} \right) \rangle = \frac{\lambda}{2} \langle 00 | 10 \rangle = 0$$

Não há correção em 1ª ordem no 1º e 2º estados.

(c) Matriz $\langle 1m' | S_{13} | 1m \rangle$

$$\langle 1m' | S_{13} | 11 \rangle = \langle 1m' | S_{13} | \uparrow\uparrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle 1m' | 11 \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2} \delta_{m'1}$$

$$\langle 1m' | S_{13} | 10 \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle 1m' | 00 \rangle = 0$$

$$\langle 1m' | S_{13} | 1-1 \rangle = \langle 1m' | S_{13} | \downarrow\downarrow \rangle = -\frac{\hbar}{2} \delta_{m',-1}$$

$$W_{EF} = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{p/ } |11\rangle \rightarrow E = \frac{a}{4} + \frac{\lambda}{2}$$

$$|10\rangle \rightarrow E = \frac{a}{4}$$

$$|1-1\rangle \rightarrow E = \frac{a}{4} - \frac{\lambda}{2}$$

(d) Cálculo exato. A matriz de H_0 é diagonal. Para a pertubação sabemos que

$$S_{13} |11\rangle = \frac{\hbar}{2} |11\rangle$$

$$S_{13} |10\rangle = \frac{\hbar}{2} |10\rangle$$

$$S_{13} |1-1\rangle = -\frac{\hbar}{2} |1-1\rangle$$

$$S_{13} |00\rangle = -\frac{\hbar}{2} |10\rangle$$

ou

pertubação diagonal.

$$|11\rangle \quad |1-1\rangle \quad |10\rangle \quad |00\rangle$$

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} |11\rangle & |1-1\rangle & |10\rangle & |00\rangle \end{matrix} \\ \begin{matrix} \langle 11| \\ \langle 1-1| \\ \langle 10| \\ \langle 00| \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{a}{4} + \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{4} - \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{4} & \lambda/2 \\ 0 & 0 & \lambda/2 & -\frac{3a}{4} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$E_1 = \frac{a}{4} + \frac{\lambda}{2} \rightarrow |11\rangle$$

$$E_2 = \frac{a}{4} - \frac{\lambda}{2} \rightarrow |1-1\rangle$$

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{4} - \mu & \lambda/2 \\ \lambda/2 & -\frac{3a}{4} - \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$\mu^2 + \frac{a}{2}\mu - \frac{3a^2}{16} - \frac{\lambda^2}{4} = 0$$

$$\mu = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} + \frac{\lambda^2}{4}} = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4}}$$

$$= -\frac{a}{4} \pm \frac{a}{2} \sqrt{1 + \lambda^2/a^2} \approx -\frac{a}{4} \pm \frac{a}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2a^2}\right)$$

$$\approx \begin{cases} \frac{a}{4} + \lambda^2/4a \\ -\frac{3a}{4} - \lambda^2/4a \end{cases} \rightarrow \text{corrections of } 2^{\text{nd}} \text{ order}$$

$$E_3 = -\frac{a}{4} + \frac{a}{2} \sqrt{1 + \lambda^2/a^2}$$

$$E_4 = -\frac{a}{4} - \frac{a}{2} \sqrt{1 + \lambda^2/a^2}$$

AUTO-VE TORS

$$\begin{pmatrix} a/4 & \lambda/2 \\ \lambda/2 & -\frac{3a}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\pm} \\ B_{\pm} \end{pmatrix} = \mu_{\pm} \begin{pmatrix} A_{\pm} \\ B_{\pm} \end{pmatrix}$$

$$\frac{a}{4} A_{\pm} + \frac{\lambda}{2} B_{\pm} = \mu_{\pm} A_{\pm} = -\frac{a}{4} A_{\pm} \pm \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{a^2}} A_{\pm}$$

$$\frac{\lambda}{2} B_{\pm} = \left[-\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{a^2}} \right] A_{\pm}$$

$$\lambda B_{\pm} = -a \left[1 \mp \sqrt{1 + \lambda^2/a^2} \right] A_{\pm} \quad ; \quad A_{\pm}^2 + B_{\pm}^2 = 1$$

$$|\psi_+\rangle = A_+ |10\rangle + B_+ |00\rangle$$

$$|\psi_-\rangle = A_- |10\rangle + B_- |00\rangle$$

$$(+) \quad B_+ = -\frac{\lambda}{2a} A_+ ; \quad A_+^2 \left[1 + \frac{\lambda^2}{4a^2} \right] = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_+ = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + \lambda^2}} \\ B_+ = \frac{-\lambda}{\sqrt{4a^2 + \lambda^2}} \end{array} \right.$$

$$(-) \quad B_- = \left[\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda}{2a} \right] A_- ; \quad A_-^2 \left[1 + \frac{4}{\lambda^2} + \frac{2}{a} + \frac{\lambda^2}{4a^2} \right] = 1$$

$$A_- \left[\frac{4a^2\lambda^2 + 4a^2 + 8\lambda^2 + a^4}{4a^2\lambda^2} \right] = 1$$

$$A_- = \frac{2a\lambda}{\sqrt{\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16a^2 + 4a^2\lambda^2}}$$

$$B_- = \frac{4a + \lambda^2}{\sqrt{\quad}}$$

4. Considere um oscilador harmônico de frequência ω sujeito a uma perturbação quadrática de forma que

$$H = \left(\frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 X^2}{2} \right) + \lambda X^2 \equiv H_0 + W.$$

(a) Encontre os níveis de energia exatos de H .

(b) Supondo $\lambda \ll 1$, expanda o resultado exato até ^{primeira} segunda ordem em λ .

(c) Faça o cálculo dos níveis de energia usando teoria de perturbação ^{de} até segunda ordem e compare com o item (b).

(a)
$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{mX^2}{2} \underbrace{\left(\omega^2 + \frac{2\lambda}{m} \right)}_{\Omega^2}$$

$$E_n = \hbar \Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \Omega = \omega \sqrt{1 + \frac{2\lambda}{m\omega^2}}$$

(b)
$$\Omega \approx \omega \left(1 + \frac{\lambda}{m\omega^2} \right) = \omega + \frac{\lambda}{m\omega}$$

$$E_n \approx \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\lambda \hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

(c)
$$\Delta E_n = \langle n | \lambda X^2 | n \rangle = \frac{\lambda \hbar}{2m\omega} \langle n | a^2 + a^{\dagger 2} + a a^\dagger + a^\dagger a | n \rangle$$

$$= \frac{\lambda \hbar}{2m\omega} \langle n | 2a^\dagger a + 1 | n \rangle = \frac{\lambda \hbar}{2m\omega} (2n + 1)$$

$$= \frac{\lambda \hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \checkmark$$