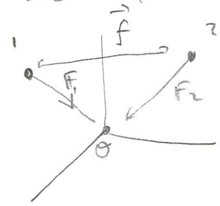
X - ADIÇÃO DE MOMENTO ANGULAR

- Mecânica Clássica

Duas partículas sob ação de uma força central + interação mútua



(a) se $\vec{f} = 0$ $\quad \dfrac{d\mathbb{L}_1}{dt} = \mathbb{r}_1 \times \mathbb{F}_1 = 0$ e $\dfrac{d\mathbb{L}_2}{dt} = 0$

$\Rightarrow$ $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ são const. do mov.

(b) se $\vec{f} \neq 0$ mas $\vec{f}_{1\to 2} = -\vec{f}_{2\to 1}$ com $\vec{f} \,/\!/\, (\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2)$ (ação e reação forte)

$$\frac{d\mathbb{L}_1}{dt} = \underbrace{\mathbb{r}_1 \times \mathbb{F}_1}_{0} + \underbrace{\mathbb{r}_1 \times \vec{f}_{2\to 1}}_{\neq 0} \neq 0$$ e id

$$\frac{d\mathbb{L}_2}{dt} = \underbrace{\mathbb{r}_2 \times \mathbb{F}_2}_{0} + \underbrace{\mathbb{r}_2 \times \vec{f}_{1\to 2}}_{\neq 0} \neq 0$$

mas $$\frac{d(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2)}{dt} = (\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2) \times \vec{f}_{2\to 1} = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2$ é uma constante do movimento e

$$\{H, \mathbb{L}\} = 0$$

Mec. Quântica

(a) sem acoplamento entre ① e ② com potencial central $V(r)$

$$H = H_1 + H_2$$

$$H_i = -\frac{\hbar^2}{2\mu_i}\nabla_i^2 + V(r_i)$$

H_1, L_1^2, L_{1z} comutam $\Rightarrow H_1, H_2, L_1^2, L_{1z}, L_2^2, L_{2z}$ comutam.
H_2, L_2^2, L_{2z} comutam

(b) interação $v(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)$; $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \equiv r$

$$H = H_1 + H_2 + v$$

- $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ não mais comutam com H

$$[L_{1z}, H] = [L_{1z}, v] = [x_1 p_{y_1} - y_1 p_{x_1}, v] = x_1\left(-i\hbar\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) - y_1\left(-i\hbar\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)$$

$$= -i\hbar\left(x_1\frac{\partial v}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) = -i\hbar\frac{\partial v}{\partial r}\left[x_1(y_1-y_2) - y_1(x_1-x_2)\right]$$

$$= -i\hbar\frac{\partial v}{\partial r}(x_2y_1 - x_1y_2)$$

$$[L_{2z}, H] = -i\hbar\left(x_2\frac{\partial v}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) = -i\hbar\left(-x_2y_1 + x_1y_2\right)$$

- $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2$ comuta com H

$$[L_z, H] = [L_{1z}, H] + [L_{2z}, H]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = v'\,\frac{(x_1-x_2)}{r} \;;\quad \frac{\partial v}{\partial y_1} = v'\,\frac{(y_1-y_2)}{r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = -v'\,\frac{(x_1-x_2)}{r} \;;\quad \frac{\partial v}{\partial y_2} = -v'\,\frac{(y_1-y_2)}{r}$$

$$\Longrightarrow [L_z, H] = 0$$

OUTRO EXEMPLO Acoplamento SPIN-ÓRBITA

partícula num potencial central com $\mathbb{L}$, $\vec{S}$ e

$$H = \frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) + \xi(r)\, \mathbb{L}\cdot\vec{S}$$

$$[L_z, H] = \xi(r)[L_z, L_z S_z + L_y S_y + L_x S_x] = \xi(r)(-i\hbar) L_x S_y + \xi(r) S_x (i\hbar L_y)$$

$$= -i\hbar\, \xi(r)\, [L_x S_y - L_y S_x]$$

$$[S_z, H] = \xi(r)[-i\hbar L_y S_x + i\hbar L_x S_y]$$

$$\Downarrow$$

$$[J_z, H] = 0 \qquad p/ \qquad \mathbb{J} = \mathbb{L} + \mathbb{S}$$

SITUAÇÃO GERAL

- DOIS momentos angulares $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2 \to$ base $|\mathbb{J}_1^2\, \mathbb{J}_2^2\, J_{1z}\, J_{2z}\rangle$
- MOM. ANG. TOTAL $\mathbb{J} = \mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_2 \to$ base de auto-estados de J^2 e J_z.

Num sistema de partículas isolado $\mathbb{J}$ será const. de movimento e é útil ter os auto-estados de H na base de J^2 e J_z.

OBS O campo magnético gerado pelo núcleo é $\frac{1}{c} \vec{i} \times \frac{d\vec{l}}{r^2} = \frac{q}{c}\vec{v} \times \frac{d\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}$.

A energia potencial é

$$E = \vec{m}\cdot\vec{B} = \frac{\vec{m}}{c}\cdot(\vec{v}\times\vec{E}) = \frac{\vec{m}}{c} q (\vec{v}\times\vec{r})\frac{1}{r^3}$$

$$= \vec{m}\, \frac{q}{\mu c}\cdot\vec{L}\, f(r)$$

Usando $\vec{m} = \frac{2\mu_B}{\hbar}\vec{S} = \frac{e}{\mu}\vec{S}$

$$E = \frac{q^2}{\mu c} f(r)\, \vec{S}\cdot\vec{L}$$

DUAS PARTÍCULAS DE SPIN 1/2

$\vec{S}_1 \quad \vec{S}_2$ BASE $|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = \{ |++\rangle ; |+-\rangle ; |-+\rangle ; |--\rangle \}$

$$S_1^2 |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle$$
$$S_{1z} |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = \frac{\varepsilon_1 \hbar}{2} |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle \quad \text{etc.}$$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$[S_x, S_y] = [S_{1x}, S_{1y}] + [S_{2x}, S_{2y}] = i\hbar (S_{1z} + S_{2z}) = i\hbar S_z$$

$\Rightarrow \vec{S}$ é um op. de momento angular.

$$S_{1+} = S_{1x} + i S_{1y} \qquad S_{1x} = \frac{S_{1+} + S_{1-}}{2}$$
$$S_{1-} = S_{1x} - i S_{1y} \qquad S_{1y} = \frac{S_{1+} - S_{1-}}{2i}$$

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = S_{1z} S_{2z} + \frac{1}{4} (S_{1+} + S_{1-})(S_{2+} + S_{2-}) - \frac{1}{4} (S_{1+} - S_{1-})(S_{2+} - S_{2-})$$

$$= \frac{1}{2} (S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}) + S_{1z} S_{2z}$$

- S^2, S_z, S_1^2 e S_2^2 comutam entre si

$$[S_z, S_1^2] = [S_{1z}, S_1^2] + [S_{2z}, S_1^2] = 0$$

$$[S^2, S_1^2] = \underbrace{[S_1^2, S_1^2]}_{0} + \underbrace{[S_2^2, S_1^2]}_{0} + [S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+} + \underbrace{2 S_{1z} S_{2z}, S_1^2}_{0}]$$

$$= \underbrace{[S_{1+}, S_1^2]}_{0} S_{2-} + \underbrace{[S_{1-}, S_1^2]}_{0} S_{2+} = 0$$

MUDANÇA DE BASE

$$\{ S_1^2 \; S_{13} \; S_2^2 \; S_{23} \} \longrightarrow \{ S^2 \; S_3 \; S_1^2 \; S_2^2 \}$$

como S_1^2 e S_2^2 são proporcionais à unidade, podemos esquecê-los:

$$\{ S_{13} \; S_{23} \} \rightarrow \{ S^2 \; S_3 \}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle \qquad\qquad |S\,M\rangle$$

$$S^2 |S\,M\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S\,M\rangle$$

$$S_3 |S\,M\rangle = M\hbar |SM\rangle \qquad -S \leq M \leq S$$

$$S_1^2 |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle \; ; \quad S_1^2 |SM\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |SM\rangle$$

1.º PASSO

$$S_3 |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = (S_{13} + S_{23}) |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = \underbrace{\frac{\hbar}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}_{\hbar M} |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle$$

$\Rightarrow$ $|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle$ são auto-estados de S_3 e

$$M = \begin{cases} 1 & (+\,+) \\ 0 & (+\,-) \leftarrow \\ 0 & (-\,+) \\ -1 & (-\,-) \end{cases}$$

$M=0$ é degenerado

$$(S_3) = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz de S^2

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{2+}S_{1-}$$

$$S^2|++\rangle = \left[\tfrac{3}{4}\hbar^2 + \tfrac{3}{4}\hbar^2 + 2\left(\hbar/2\right)^2\right]|++\rangle = 2\hbar\ |++\rangle$$

$$S^2|+-\rangle = \left[\tfrac{3}{4}\hbar^2 + \tfrac{3}{4}\hbar^2 + 2\left(\hbar/2\right)\left(-\hbar/2\right)\right]|++\rangle + \hbar^2|-+\rangle$$

$$= \hbar^2|++\rangle + \hbar^2|-+\rangle$$

$$S^2|-+\rangle = \hbar^2|++\rangle + \hbar^2|+-\rangle$$

$$S^2|--\rangle = 2\hbar^2|--\rangle$$

$$S^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz de S^2

$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2 S_{1z} S_{2z} + S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}$

$$(S^2) = \hbar^2 \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

DIAG. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (1-\lambda)^2 = 1 \quad \to \quad \lambda = 0$ ou $\lambda = 2$

p/ $\lambda = 0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-\rangle - |-+\rangle \right)$

p/ $\lambda = 2$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-\rangle + |-+\rangle \right)$

$\Rightarrow \quad S = 0 \;;\; M = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+-\rangle - |-+\rangle \right]$ SINGLETO

$$S = 2\hbar^2 \;;\; \begin{cases} M = -1 \longrightarrow |--\rangle \\ M = 0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+-\rangle + |-+\rangle \right] \\ M = 1 \longrightarrow |++\rangle \end{cases}$$ TRIPLETO

$\| S \; M \rangle$

$\| 0 \, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+-\rangle - |-+\rangle \right]$

$\| 1 \, 1 \rangle = |++\rangle$

$\| 1 \, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+-\rangle + |-+\rangle \right]$

$\| 1 \, -1 \rangle = |--\rangle$

ADIÇÃO DE DOIS MOM. ANGULARES : CASO GERAL

PARTÍCULA 1

J_1^2 , J_{1z} base $|k_1 j_1 m_1\rangle$

$J_\pm$ $J_\pm |k_1 j_1 m_1\rangle = \hbar\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1\pm 1)}\ |k_1, j_1, m_1 \pm 1\rangle$

O índice k_1 mede a degenerescência do estado com

$J^2 \to \hbar^2 (j_1)(j_1+1)$

$J_{1z} \to \hbar m_1$

Se A_1 comuta com J_1^2 e J_{1z} e $\{A_1, J_1^2, J_{1z}\}$ formam um C.C.O.C

$A_1 |k_1 j_1 m_1\rangle = a_{k_1 j_1} |k_1 j_1 m_1\rangle$; $a_{k_1 j_1}$ não depende de m_1, pois $[A_1, J_\pm] = 0$.

(1) $\mathcal{E} = \sum_{\oplus} \mathcal{E}(k, j)$; $\mathcal{E}(k,j)$ tem dimensão $2j+1$.

(2) O sub-espaço $\mathcal{E}(k,j)$ é invariante por aplicação de $F(J_1)$

(3) os elementos de matriz de $F(J)$ em $\mathcal{E}(k,j)$ não dependem de k.

$\underline{Ex}$ $\langle k_1 j_1 m_1' | J_+ | k_1 j_1 m_1\rangle = \hbar\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1+1)}\ \delta_{m_1', m_1+1}$

PARTÍCULA 2 IDEM

PARTÍCULAS 1 + 2

Estado produto $|k_1 k_2; j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = |k_1 j_1 m_1\rangle \otimes |k_2 j_2 m_2\rangle$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \sum_{\oplus} \mathcal{E}(k_1 k_2; j_1 j_2)$$

$\mathcal{E}(k_1 k_2 ; j_1 j_2) = \mathcal{E}(k_1 j_1) \otimes \mathcal{E}(k_2 j_2) \leftarrow$ dimensão $= (2j_1+1)(2j_2+1)$

A NOVA BASE

$[\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2] = 0$ (índice 1 comuta com índice 2) em geral.

$\mathbb{J} = \mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_2$

$\mathbb{J}^2 = \mathbb{J}_1^2 + \mathbb{J}_2^2 + 2\mathbb{J}_1 \cdot \mathbb{J}_2 = \mathbb{J}_1^2 + \mathbb{J}_2^2 + 2 J_{1z} J_{2z} + J_{1+} J_{2-} + J_{1-} J_{2+}$

$[\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_1^2] = [\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2^2] = 0$; $[\mathbb{J}_2, \mathbb{J}_2^2] = [\mathbb{J}_2, \mathbb{J}_1^2] = 0 \Rightarrow \{ [\mathbb{J}, \mathbb{J}_1^2] = [\mathbb{J}, \mathbb{J}_2^2] = 0$

também:

$$\begin{cases} [\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_1^2] = [\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_2^2] = 0 \\ [J_z, J_{1z}] = [J_z, J_{2z}] = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ os operadores $\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_1^2, \mathbb{J}_2^2, \mathbb{J}$ comutam entre si.

Assim temos:

base antiga $|k_1 k_2 j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ auto-estados de $A_1\ A_2\ J_1^2\ J_2^2\ J_{1z}\ J_{2z}$

base nova auto-estados de $A_1, A_2, J_1^2, J_2^2, \mathbb{J}^2, J_z$

OMITINDO k_1 e k_2

$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \longrightarrow |j_1 j_2 J M\rangle$ ou ainda $|m_1 m_2\rangle \rightarrow |J M\rangle$ para j_1 e j_2 fixos

Dados j_1 e j_2, temos um sub-espaço $\mathcal{E}(j_1 j_2)$ de dimensão $(2j_1+1)(2j_2+1)$.

Para cada J, $M = -J, \ldots, +J$. (a) Quais os valores de J possíveis?

(b) Como escrever uma base em termos da outra?

Os valores antigos já são auto-valores de J_3:

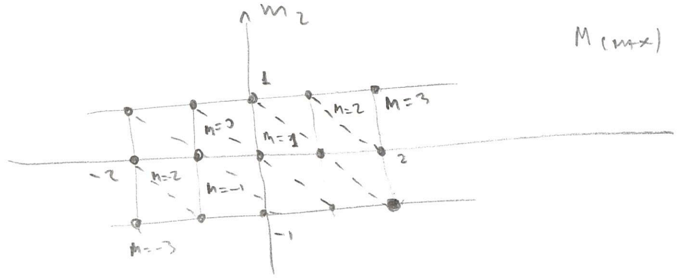
$$J_3 |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \hbar \underbrace{(m_1+m_2)}_{M} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

$\Rightarrow \quad M = (j_1+j_2) \ldots\ldots -(j_1+j_2)$ ← valores possíveis de M

SEJA $j_1 \geq j_2$

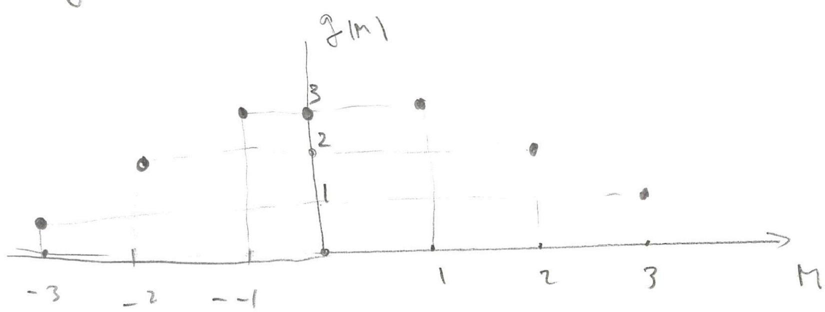
Exemplo

$j_1 = 2 \qquad j_2 = 1$



$M(max) = j_1+j_2$

Seja $g(M)$ a degenerescência do autovalor $M\hbar$:



(temos que ir de $-m_2$ a m_2, de um em um)

– O valor máximo $g = 2j_2+1$ é atingido no canto direito inferior, $m_1 = j_1$; $m_2 = -j_2 \Rightarrow M = j_1 - j_2$

e vai até o canto esquerdo superior, $m_1 = -j_1$ $m_2 = j_2 \Rightarrow M = -(j_1-j_2)$

– Temos também que $g(M) = g(-M)$

Então temos:

$M = +(j_1+j_2)$ $\quad g(M)=1 \Rightarrow J = j_1+j_2$ existe e contribui com $2(j_1+j_2)+1$ estados $|j_1+j_2, M\rangle$

$M = +(j_1+j_2)-1$ $\quad g(M)=2$. Um já contou acima o outro um de $J = j_1+j_2-1 \rightarrow 2(j_1+j_2-1)+1$ estados $|j_1+j_2-1, M\rangle$

Até o canto inferior direito:

$M = j_1-j_2 \rightarrow g(M) = 2j_2+1$. $(2j_2)$ já foram contados $\Rightarrow$ $J = j_1-j_2$ dá conta do último.

$\Rightarrow 2(j_1-j_2)+1$ estados $|j_1-j_2, M\rangle$

e Acabou!

Veja que

$$\sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2}(2J+1) = 2\left[\frac{(j_1-j_2)+(j_1+j_2)}{2}\right](2j_2+1) + (2j_2+1)$$
$$= 2j_1(2j_2+1)+(2j_2+1) = (2j_1+1)(2j_2+1).$$

Portanto, se $j_1 > j_2$

$J: (j_1+j_2), (j_1+j_2-1), \ldots (j_1-j_2)$

para cada J, $-J \leq M \leq J$

Como obter $|JM\rangle$ em termos de $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$

2 SPIN 1/2 NOVAMENTE

$J = 1$ ou $J = 0$

SUBESPAÇO $\mathcal{E}(J=1)$ $\quad M = 1, 0, -1$

- estado mais alto é $|11\rangle$, não degenerado $\Rightarrow$ (a) $|11\rangle = |\tfrac12 \tfrac12; \tfrac12 \tfrac12\rangle = |++\rangle$

(b) $J_-|11\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}\;|10\rangle = \sqrt{2}\,\hbar\,|10\rangle$

$$|10\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} J_-|11\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}\left[J_{1-} + J_{2-}\right]\left[|\tfrac12 \tfrac12; \tfrac12 \tfrac12\rangle\right.$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac12 \tfrac12; -\tfrac12 \tfrac12\rangle + |\tfrac12 \tfrac12; \tfrac12 -\tfrac12\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|-+\rangle + |+-\rangle\right]$$

(c) $J_-|10\rangle = \hbar\sqrt{2}\;|1-1\rangle$

$$|1-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}\left(J_- + J_{2-}\right)\left[\frac{|\tfrac12 \tfrac12; -\tfrac12 \tfrac12\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|\tfrac12 \tfrac12; \tfrac12 -\tfrac12\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|\tfrac12 \tfrac12; -\tfrac12 -\tfrac12\rangle + |\tfrac12 \tfrac12 -\tfrac12 -\tfrac12\rangle\right] = |\tfrac12 \tfrac12; -\tfrac12 -\tfrac12\rangle = |--\rangle$$

SUB-ESPAÇO $\mathcal{E}(J=0)$ $\quad M = 0$

$$|00\rangle = \alpha\,|\tfrac12 \tfrac12; \tfrac12 -\tfrac12\rangle + \beta\,|\tfrac12 \tfrac12; -\tfrac12 \tfrac12\rangle$$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ e $\langle 00|10\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

CASO GERAL

$$|J M\rangle = \sum |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J M\rangle}$$

coef de Clebsch-Gordan

$(M = m_1 + m_2)$

SUB-ESPAÇO

$\mathcal{E}(J = j_1 + j_2)$; $\mathcal{E}(J = j_1 + j_2 - 1)$; ... $\mathcal{E}(j_1 - j_2)$ $\quad (j_1 > j_2)$

(a) $\mathcal{E}(j_1 + j_2)$ $\quad |j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = |j_1 j_2; j_1 j_2\rangle$ não degenerado.

Aplicando J_- obtemos todo sub-espaço:

$$J_- |j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = \hbar\sqrt{(j_1+j_2)(j_1+j_2+1) - (j_1+j_2)(j_1+j_2-1)}\ |j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{2(j_1+j_2)}\ |j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$$

$$= (J_{1-} + J_{2-})\left(|j_1 j_2; j_1 j_2\rangle\right) = \hbar\sqrt{j_1(j_1+1) - j_1(j_1-1)}\ |j_1 j_2; j_1-1, j_2\rangle + \hbar\sqrt{j_2(j_2+1) - j_2(j_2-1)}\ |j_1 j_2; j_1, j_2-1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{2j_1}\ |j_1 j_2; j_1-1, j_2\rangle + \hbar\sqrt{2j_2}\ |j_1 j_2; j_1, j_2-1\rangle$$

$$|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\ |j_1 j_2; j_1-1, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\ |j_1 j_2; j_1, j_2-1\rangle$$

etc.

(b) $\mathcal{E}(J = j_1 + j_2 - 1)$

O primeiro estado tem $M = j_1 + j_2 - 1 \Rightarrow$ é uma combinação linear:

$$|j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle = \alpha\, |j_1 j_2; j_1-1, j_2\rangle + \beta\, |j_1 j_2; j_1, j_2-1\rangle$$

os coef. devem ser normalizados $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

e deve ser ortogonal à $|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}$ $\beta = -\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}$

Fixado este estado aplicamos J_- e geramos todo o sub-espaço.

Exemplo-1 $j_1 = j_2 = 1$ $J = 2, 1, 0$ NOTAÇÃO $|JM\rangle$; $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$

$$\boxed{|22\rangle = |11;11\rangle}$$

$$J_-|22\rangle = \hbar\sqrt{2(2+1) - 2(2-1)}\; |21\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}\; |11;01\rangle + \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}\; |11;10\rangle$$

$$2\hbar\, |21\rangle = \hbar\sqrt{2}\left(|11;01\rangle + |11;10\rangle\right)$$

$$\boxed{|21\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|11;01\rangle + |11;10\rangle\right]}$$

$$J_-|21\rangle = \hbar\sqrt{2(2+1) - 1(1-1)}\; |20\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{1(1+1) - 0(0-1)}\; |11;-11\rangle +$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}\; |11;00\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}\; |11;00\rangle$$

$$+ \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{1(1+1) - 0(0-1)}\; |11;1,-1\rangle$$

$$\boxed{|20\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|11;-11\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}|11;00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|11;1-1\rangle}$$

$$\boxed{|2\,-2\rangle = |11;-1,-1\rangle}$$

$$J_+|2\,-2\rangle = \hbar\sqrt{2(2+1)+2(-2+1)}\;|2\,-1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)+1(-1+1)}\;|11;0\,-1\rangle + \hbar\sqrt{1(1+1)+1(-1+1)}\;|11;-1\,0\rangle$$

$$2|2\,-1\rangle = \sqrt{2}\;|11;0\,-1\rangle + \sqrt{2}\;|11;-1\,0\rangle$$

$$\boxed{|2\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|11;0\,-1\rangle + |11;-1\,0\rangle\right]}$$

SUB-ESPAÇO $J=1$

$$\boxed{|1\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|11;0\,1\rangle - |11;1\,0\rangle\right]}$$

$$J_-|11\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\;|10\rangle = \hbar\,|11;-1\,1\rangle + \hbar\,|11;0\,0\rangle - \hbar\,|11;0\,0\rangle - \hbar\,|11;1\,-1\rangle$$

$$\boxed{|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|11;-1\,1\rangle - |11;1\,-1\rangle\right]}$$

$$J_-|10\rangle = \hbar\sqrt{2}\;|1\,-1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{2-1(1-1)}\;|11;-1\,0\rangle - \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{2-1(1-1)}\;|11;0\,-1\rangle$$

$$\boxed{|1\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|11;-1\,0\rangle + |11;0\,-1\rangle\right]}$$

SUB-ESPAÇO $J=0$

$$|00\rangle = \alpha\,|11;1\,-1\rangle + \beta\,|11;0\,0\rangle + \beta\,|11;-1\,1\rangle$$

$$\langle 10|00\rangle = \langle 20|00\rangle = 0$$

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}+\frac{\gamma}{\sqrt{2}}=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\gamma$$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{6}}+\frac{2\beta}{\sqrt{6}}+\frac{\alpha}{\sqrt{6}}=0 \qquad 2\alpha+2\beta=0 \qquad \beta=-\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \alpha=\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{|0\,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[|11;1-1\rangle-|11;00\rangle+|11;-11\rangle\right]}$$

Exemplo 2 — cálculo dos estados para $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$ para $s=1/2$

só existem 2 sub-espaços: $J=l+1/2$ e $J=l-1/2$

SUB-ESPAÇO $J=l+1/2$

$$|l+1/2,\, l+1/2\rangle = |l\,1/2;\, l\, +\rangle$$

$$J_-|l+1/2,\, l+1/2\rangle = \hbar\sqrt{(l+1/2)(l+3/2)-(l+1/2)(l-1/2)}\;|l+1/2,\, l-1/2\rangle =$$

$$\hbar\sqrt{l(l+1)-l(l-1)}\;|l\,1/2,\, l-1\, +\rangle + \hbar\sqrt{1/2(1/2+1)-1/2(1/2-1)}\;|l\,1/2;\, l\, -\rangle$$

$$\boxed{|l+1/2,\, l-1/2\rangle = \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\;|l\,1/2;\, l-1\, +\rangle + \sqrt{\frac{1}{2l+1}}\;|l\,1/2;\, l\, -\rangle}$$

$$J_-|l+1/2,\, l-1/2\rangle = \hbar\, \overbrace{\sqrt{(l+1/2)(l+3/2)-(l-1/2)(l-3/2)}}^{\sqrt{4l}}\; |l+1/2,\, l-3/2\rangle =$$

$$\sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\left[\hbar \overbrace{\sqrt{l(l+1)-(l-1)(l-2)}}^{\sqrt{4l-2}}\; |l\,1/2;\, l-2\,+\rangle + \hbar \overbrace{\sqrt{1/2(1/2+1)-1/2(1/2-1)}}^{1}\; |l\,1/2;\, l-1\,-\rangle\right] +$$

$$\sqrt{\frac{1}{2l+1}}\left[\hbar \overbrace{\sqrt{l(l+1)-l(l-1)}}^{\sqrt{2l}}\; |l\,1/2;\, l-1\,-\rangle\right]$$

$$|l+1/2,\, l-3/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\left[\sqrt{2l-1}\; |l\,1/2;\, l-2\,+\rangle + \sqrt{2}\; |l\,1/2;\, l-1\,-\rangle\right]$$

<u>Generalização</u>

1º coeficiente: $\underset{M=l+1/2}{\sqrt{2l+1}} \longrightarrow \underset{M=l-1/2}{\sqrt{2l}} \longrightarrow \underset{M=l-3/2}{\sqrt{2l-1}}$, da componente +

$\Rightarrow$ p/ $M\ \forall$ $\sqrt{(2l+1)-(l+1/2)+M} = \sqrt{l+\frac{1}{2}+M}$

2º coeficiente: $0 \longrightarrow \sqrt{1} \longrightarrow \sqrt{2}$, da componente −

$\Rightarrow$ p/ $M\ \forall$ $\sqrt{l+1/2-M}$

$$\Rightarrow \boxed{|l+1/2,\, M\rangle = \sqrt{\frac{l+1/2+M}{2l+1}}\; |l\,1/2;\, M-\tfrac{1}{2}\,+\rangle + \sqrt{\frac{l+1/2-M}{2l+1}}\; |l\,1/2;\, M+1/2\,-\rangle}$$

$$M = l+1/2,\ l-1/2,\ \ldots,\ -(l+1/2)$$

SUB-ESPAÇO $J = l - 1/2$

$$|l-1/2, l-1/2\rangle = \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\, |l\, 1/2\,;\, l\, -\rangle - \sqrt{\frac{1}{2l+1}}\, |l\, 1/2\,;\, l-1\, +\rangle$$

$$J_-|l-1/2, l-1/2\rangle = \hbar \overbrace{\sqrt{(l-1/2)(l+1/2) - (l-1/2)(l-3/2)}}^{\sqrt{2l-1}}\, |l-1/2, l-3/2\rangle =$$

$$\sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\, \hbar \overbrace{\sqrt{l(l+1) - l(l-1)}}^{\sqrt{2l}}\, |l\, 1/2\,;\, l-1\, -\rangle - \sqrt{\frac{1}{2l+1}}\, \hbar \overbrace{\sqrt{l(l+1) - (l-1)(l-2)}}^{\sqrt{4l-2}}\, |l\, 1/2\,;\, l-2\, +\rangle$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\, \hbar \overbrace{\sqrt{3/4 - 1/2(1/2 - 1)}}^{1}\, |l\, 1/2\,;\, l-1\, -\rangle$$

$$|l-1/2, l-3/2\rangle = \sqrt{\frac{2l-1}{2l+1}}\, |l\, 1/2\,;\, l-1\, -\rangle - \sqrt{\frac{2}{2l+1}}\, |l\, 1/2\,;\, l-2\, +\rangle$$

$$\boxed{|l-1/2, M\rangle = \sqrt{\frac{l+1/2+M}{2l+1}}\, |l\, 1/2\,;\, M+1/2\, -\rangle - \sqrt{\frac{l+1/2-M}{2l+1}}\, |l\, 1/2\,;\, M-1/2\, +\rangle}$$