

O Teorema de Wigner-Eckart

Operadores vetoriais:

$$D^\dagger V_i D = \sum_j R_{ij} V_j$$

$$[V_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k$$

Operadores tensoriais: $T_0^1 = V_z$

$$T_1^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y)$$

$$T_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y)$$

$$D^\dagger T_q^k D = \sum_{q'=-k}^k D_{q'q}^{(k)} T_{q'}^k \quad D_{q'q}^{(k)} = \langle kq' | D | kq \rangle$$

$$[J_z, T_q^k] = \hbar q T_q^k$$

$$[J_\pm, T_q^k] = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} T_{q\pm 1}^k$$

Regra de Seleção

$$\langle \alpha' j' m' | T_q^k | \alpha j m \rangle = 0$$

a não ser que $m' = q + m$.

Essa regra pode ser demonstrada facilmente sanduichando a primeira das regras de comutação, entre T_q^k e J_z , com o bra e ket acima.

Wigner-Eckart

$$\langle \alpha' j' m' | T_q^k | \alpha j m \rangle = \langle j k, m q | j k j' m' \rangle C_T(\alpha, \alpha', j, j', k)$$

Clebsh-Gordon da soma j, m e k, q dando $j' m'$

$$C_T(\alpha, \alpha', j, j', k) = \frac{\langle \alpha' j' || T_q^k || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

independente de q, m e m' , também escrito como

Para demonstrar o teorema, começamos com uma relação que vem da soma de

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2:$$

$$J_{\pm} |j_1 j_2 jm\rangle = (J_{1\pm} + J_{2\pm}) \sum_{n_1 n_2} |j_1 n_1 j_2 n_2\rangle \langle j_1 n_1 j_2 n_2 | j_1 j_2 jm\rangle$$

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j_1 j_2 jm \pm 1\rangle =$$

$$\sum_{n_1 n_2} \sqrt{(j_1 \mp n_1)(j_1 \pm n_1 + 1)} |j_1 n_1 \pm 1 j_2 n_2\rangle \langle j_1 n_1 j_2 n_2 | j_1 j_2 jm\rangle +$$

$$\sum_{n_1 n_2} \sqrt{(j_2 \mp n_2)(j_2 \pm n_2 + 1)} |j_1 n_1 j_2 n_2 \pm 1\rangle \langle j_1 n_1 j_2 n_2 | j_1 j_2 jm\rangle$$

Multiplicando à esquerda por $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 |$ obtemos:

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \pm 1 \rangle =$$

$$\sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1 m_1 \mp 1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle +$$

$$\sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 \mp 1 | j_1 j_2 j m \rangle$$

Voltamos agora à relação de comutação entre $J_{\pm}$ e T_q^k :

$$\langle \alpha' j' m' | [J_{\pm}, T_q^k] | \alpha j m \rangle = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle \alpha' j' m' | T_{q \pm 1}^k | \alpha j m \rangle$$

Aplicando os $J_{\pm}$:

$$\sqrt{(j' \mp m' + 1)(j' \pm m')} \langle \alpha' j' m' \mp 1 | T_q^k | \alpha j m \rangle =$$

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle \alpha' j' m' | T_q^k | \alpha j m \pm 1 \rangle +$$

$$\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle \alpha j m | T_{q \pm 1}^k | \alpha' j' m' \rangle$$

Essa relação deve ser comparada com a anterior, que vem da soma de momentos angulares. Para isso vamos fazer, na relação da soma a seguinte mudança de variáveis:

$$j \rightarrow j' \quad m \rightarrow -m'$$

$$j_1 \rightarrow j \quad m_1 \rightarrow -m$$

$$j_2 \rightarrow k \quad m_2 \rightarrow -q$$

Vamos ver, termo a termo o que acontece com os coeficientes das raízes quadradas:

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \rightarrow \sqrt{(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)}$$

$$j \rightarrow j' \quad m \rightarrow -m'$$

$$j_1 \rightarrow j \quad m_1 \rightarrow -m$$

$$j_2 \rightarrow k \quad m_2 \rightarrow -q$$

$$\sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \rightarrow \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)}$$

$$\sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \rightarrow \sqrt{(k \pm q + 1)(k \mp q)}$$

Esses são exatamente os mesmos coeficientes que aparecem na relação de comutação.

Temos duas relações idênticas: uma para os Clebsh-Gordon e outra para os elementos de matriz de T_q^k , indicando uma clara conexão entre eles. Poderíamos supor que eles são idênticos, mas essa não é a conclusão mais geral. Se supormos que

$$\langle \alpha' j' m' | T_q^k | \alpha j m \rangle = C(\alpha, \alpha', j, j', k) \langle j m k q | j k j' m' \rangle$$

e substituirmos na relação para os T_q^k obtemos a relação para os Clebsh-Gordon e vice-versa, pois os coeficientes $C(\alpha, \alpha', j, j', k)$ aparecem em todos os termos e se cancelam. Esse é exatamente o teorema de Wigner-Eckart.

Note que C não pode envolver m, q, m' , senão esse cancelamento não ocorre.

Uma versão simplificada desse argumento é a seguinte. Suponha que as relações de Clebsh-Gordon e T_q^k sejam substituídas (apenas para ilustração) por

$$a(j, m)x(j, m) + b(j, m + 1)x(j, m + 1) + c(j, m - 1)x(j, m - 1) = 0$$

e

$$a(j, m)y(j, m) + b(j, m + 1)y(j, m + 1) + c(j, m - 1)y(j, m - 1) = 0$$

Podemos verificar que a relação mais geral entre $x(j, m)$ e $y(j, m)$ é

$$y(j, m) = A(j)x(j, m)$$