

5

Quantização Semiclássica de Sistemas Integráveis

Passaremos agora ao estudo de sistemas com mais de um grau de liberdade. Existe aí um salto qualitativo muito grande devido ao fato de que, em geral, sistemas com mais de um grau de liberdade são não-integráveis e apresentam regiões do espaço de fases onde o movimento é caótico. Neste capítulo nos restringiremos ainda aos sistemas integráveis, tratando os não-integráveis apenas no próximo capítulo.

5.1 Funções de Onda Ligadas à Toros Invariantes

O procedimento semiclássico descrito no Capítulo 3 pode ser generalizado para mais graus de liberdade. Seguindo o livro de Ozório de Almeida [8], começaremos com a descrição WKB dependente do tempo e veremos sob que condições essa formulação pode ser dirigida para o cálculo de autofunções e níveis de energia, i.e., tornada em independente do tempo. Nesta descrição uma solução genérica da equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

é escrita na forma

$$\psi(q, t) = A(q, t) e^{i\sigma(q, t)/\hbar} \quad (1)$$

onde A e σ são funções reais e $q = (q_1, q_2, \dots, q_L)$. Substituindo na equação de Schrodinger obtemos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} - A \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= e^{-i\sigma/\hbar} H(\hat{q}, \hat{p}) e^{i\sigma/\hbar} A \\ &= H\left(q, \hat{p} + \frac{\partial \sigma}{\partial q}\right) A \end{aligned} \quad (2)$$

onde $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$. Então, em ordem 0 de \hbar obtemos

$$H\left(q, \frac{\partial \sigma}{\partial q}\right) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

que reconhecemos com a *Equação de Hamilton-Jacobi* [21]. Calculando a derivada total de σ em relação ao tempo e usando a equação (3) obtemos

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = p\dot{q} - H = L$$

Dada uma condição inicial $\sigma(q,0) = R(q)$, a solução dessa equação diferencial é [22]

$$\sigma(q,t) = R(q_0) + \int_{q_0,0}^{q,t} [p\dot{q} - H] dt \quad (4)$$

onde q_0 é tal que a trajetória partindo de q_0 atinge q no tempo t . Os momentos inicial e final são dados por $p_0 = \frac{\partial R}{\partial q_0}$ e $p = \frac{\partial \sigma}{\partial q}$. Dessa forma, a evolução temporal da função de onda semiclássica está associada à evolução temporal da superfície L -dimensional definida por $p = p(q,t) = \partial\sigma/\partial q$. Em $t=0$ construimos a superfície inicial L_0 definida pelos pontos $(q,p) = (q, \partial R / \partial q)$ e, propagando cada um desses pontos por um tempo t com as equações clássicas de movimento geramos L_t . Estas superfícies são *Lagrangeanas*, ou seja,

$$\oint_{\gamma} pdq = \oint_{\gamma} \frac{\partial\sigma}{\partial q} dq = \oint_{\gamma} d\sigma = 0$$

para todo circuito γ redutível sobre L_t .

Funções de onda estacionárias correspondem às superfícies lagrangeanas invariantes, ou seja, $p = p(q)$. Em termos de σ , a solução deve ser da forma

$$\sigma(q,t) = S(q) - Et \quad (5)$$

que transforma a Eq. (3) em

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E \quad (6)$$

que é a Equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo. Soluções *completas* dessa equação diferencial só existem quando o Hamiltoniano é integrável [21,22]. Nesse caso, as superfícies invariantes são toros, que aparecem em famílias suaves parametrizadas pela variável de ação I . A família de toros é designada por

$$p = p(q, I)$$

que é uma função com um número par de folhas (2 no caso unidimensional). A função σ é a ação, integral da lagrangeana, ao longo da trajetória, que pode ser indexada pelo toro onde a trajetória se encontra,

$$\sigma = \sigma(q, I) .$$

Esta é também a função geratriz da transformação canônica $(q, p) \rightarrow (I, \phi)$ que leva $H(q, p)$ em $H(I)$:

$$p = \frac{\partial \sigma}{\partial q} \quad : \quad \varphi = \frac{\partial \sigma}{\partial I}$$

Determinamos agora a amplitude da função de onda usando o fato de que I comuta com H e é portanto conhecido exatamente. Então,

$$|\psi_I(\varphi)|^2 = \text{constante} = c^2$$

Como a probabilidade se conserva independente da representação

$$|\psi_I(\varphi)|^2 d\varphi = |\psi_I(q)|^2 dq$$

e

$$A^2 = |\psi_I(q)|^2 = c^2 \left| \det \left(\frac{d\varphi}{dq} \right) \right| = c^2 \left| \det \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial I \partial q} \right) \right|$$

de forma que

$$\psi_I(q, t) = c \left| \det \frac{\partial^2 \sigma}{\partial I \partial q} \right|^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{i\sigma(q, I, t)}{\hbar} \right\}$$

Agora falta apenas superpor ondas do tipo acima para as várias camadas do toro. Usamos também (5) para escrever $\psi_I(q, t) = \psi_I(q) e^{-iEt/\hbar}$ e

$$\psi_I(q) = c \sum_j \left| \det \left(\frac{\partial^2 S_j(q)}{\partial I \partial q} \right) \right|^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{iS_j(q)}{\hbar} - \frac{i\beta_j \pi}{4} \right\} \quad (7)$$

As fases β_j são constantes em cada folha, obtidas mudando-se de representação ao longo das cáusticas, como fizemos no Capítulo 3. Como no caso unidimensional podemos agora impor que a variação total da fase de $\psi_I(q)$ ao longo de um circuito fechado qualquer seja múltiplo de 2π para que $\psi_I(q)$ esteja unicamente definida. Em particular, essa condição pode ser aplicada para cada um dos L circuitos irreduzíveis γ_i do toro, onde L é o número de graus de liberdade. Isso dá L condições do tipo

$$\oint_{\gamma_i} p(q, I) dq = 2\pi\hbar[n_i + \alpha_i/4] = 2\pi I_i \quad (8)$$

onde $\alpha_i = [\text{variação de } \beta_i \text{ ao longo do circuito } \gamma_i] / 2 = \text{índice de Maslov do circuito } \gamma_i$

As L equações (8) determinam $I_i = \hbar(n_i + \alpha_i/4)$ e as auto-energias são dadas por

$$E_n = H(I = \hbar(n + \alpha/4)) \quad (9)$$

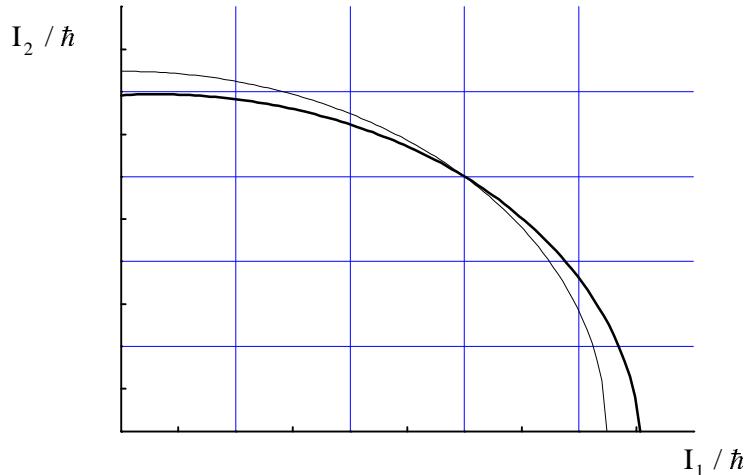
que é conhecida como regra de quantização de Einstein-Brillouin-Keller, E-B-K.

5.2 Degenerescências no Espectro Semiclásico

Vamos considerar o caso bi-dimensional por simplicidade, onde a Hamiltoniana clássica pode ser escrita em termos de duas variáveis de ação: $H = H(I_1, I_2)$. A regra E-B-K diz que os níveis de energia são dados aproximadamente pela equação

$$E_{n_1 n_2} = H\left(\hbar\left(n_1 + \alpha_1 / 4\right), \hbar\left(n_2 + \alpha_2 / 4\right)\right).$$

Vamos analisar essa expressão no espaço de ações (I_1, I_2) . Resolvendo a equação $E = H(I_1, I_2)$ para $I_2 = I_2(I_1, E)$ obtemos, para cada E fixo, a projeção da superfície de energia no plano (I_1, I_2) . No caso do oscilador harmônico bi-dimensional, por exemplo, $E = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$ e $I_2 = -\omega_1 / \omega_2 I_1 + E / \omega_2$. Variando E continuamente, cada vez que a curva $I_2(I_1, E)$ passar por um ponto da “rede” $I_1 = \hbar(n_1 + \alpha_1 / 4)$, $I_2 = \hbar(n_2 + \alpha_2 / 4)$ teremos um autovalor quântico indexado por (n_1, n_2) , como mostra a figura abaixo:



A curva fina representa $I_2 = I_2(I_1, E)$. Neste exemplo a energia da curva corresponde a E_{33} .

Vamos agora supor que a Hamiltoniana H dependa suavemente de um parâmetro λ . Vamos supor também que o estado correspondente a um dado ponto da rede (n_1, n_2) seja não degenerado para $\lambda = \lambda_0$, isto é, a curva $I_2 = I_2(I_1, E_{n_1 n_2}^{\lambda_0}, \lambda_0)$, com $E_{n_1 n_2}^{\lambda_0} = H(\hbar(n_1 + \alpha_1 / 4), \hbar(n_2 + \alpha_2 / 4), \lambda_0)$, passe por (n_1, n_2) e por nenhum outro ponto da rede. Fica então claro que se $R \equiv \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ for grande, uma pequena variação em λ fará com que $I_2(I_1, E_{n_1 n_2}^{\lambda_0 + \delta\lambda}, \lambda_0 + \delta\lambda)$ intersecte outro ponto da rede produzindo uma degenerescência como mostra a curva grossa da figura acima.

Vemos então que conseguimos induzir degenerescências em um sistema integrável variando um único parâmetro continuamente. Esse resultado difere do caso genérico, onde é necessário variar dois parâmetros para obter uma degenerescência. Para ver isso, consideremos dois estados de $H_0 |\varphi_+ >_0$ e $|\varphi_- >_0$ degenerados com energia E_0 . Fazemos agora uma perturbação escrevendo $H = H_0 + H_1 \varepsilon$ e perguntamos como deve ser essa perturbação para que os novos estados $|\varphi_+ >_\varepsilon$ e $|\varphi_- >_\varepsilon$ continuem degenerados. A teoria de perturbação usual nos diz que a nova energia é dada por $E_0 + \varepsilon E_1$ onde

$$E_1 = \frac{1}{2} (H_1^{--} + H_1^{++}) \pm \frac{1}{2} \left[(H_1^{++} - H_1^{--}) + 4|H_1^{-+}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

onde $H_1^{ab} = \langle \varphi_a | H_1 | \varphi_b \rangle_0$. Para que $|\varphi_+ >_\varepsilon$ e $|\varphi_- >_\varepsilon$ continuem degenerados, o termo dentro da raiz quadrada deve se anular. No entanto, como este termo é uma soma de quadrados, é necessário que

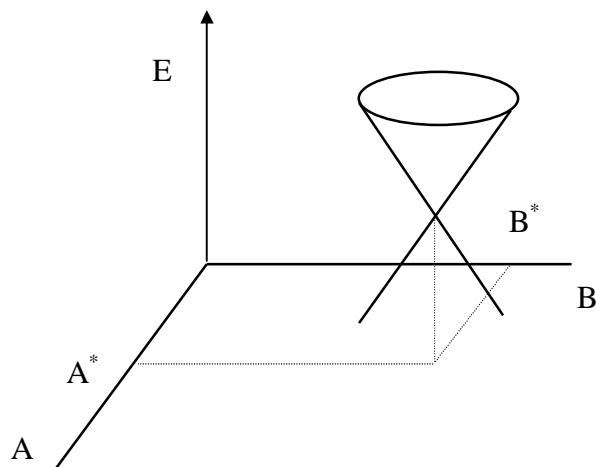
$$H_1^{++} - H_1^{--} = 0$$

e

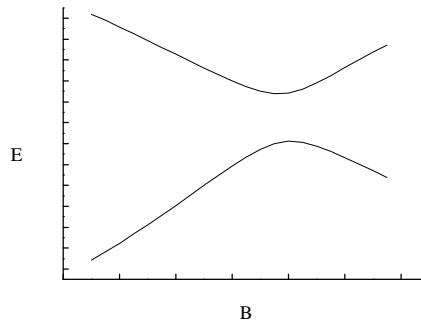
$$H_1^{+-} = 0$$

simultaneamente. Assim, se a perturbação é pensada como produzida por variações em parâmetros de H_0 , devemos variar dois parâmetros para satisfazer as duas condições acima e produzirmos uma degenerescência.

Uma maneira interessante de visualizar esse problema é desenhar as energias E^\pm , de cada um dos estados $|\varphi_+ >$ e $|\varphi_- >$, como função de dois parâmetros A e B de H_0 , como mostrado a seguir:



Um corte em $A = A_0 \neq A^*$ fornece



mostrando a “repulsão de níveis”. Para uma análise mais detalhada veja os trabalhos de M.Berry [23].

5.3 A Função de Wigner Semiclássica

Uma vez obtida a função de onda semiclássica podemos usar a Eq. (12) do capítulo 2 e determinar a função de Wigner semiclássica, o que vai possibilitar uma visão no espaço de fases e uma comparação direta com os toros invariantes clássicos. Assim,

$$\begin{aligned}
 W(q, p) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^L} \int \psi^*(q - Q/2) \psi(q + Q/2) e^{-ipQ/\hbar} dQ \\
 &\approx \frac{c^2}{(2\pi\hbar)^L} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S(q + Q/2, I) - S(q - Q/2, I) - p.Q]\right\} X \\
 &\quad \left| \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial I}(q + Q/2, I)\right) \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial I}(q - Q/2, I)\right) \right|^{\frac{1}{2}} dQ
 \end{aligned} \tag{10}$$

No limite clássico $\hbar \rightarrow 0$ esperamos que $W(q, p)$ seja não-nula apenas se

$$p \approx p(q, I) = \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)$$

que corresponde à pontos (q, p) na superfície lagrangeana invariante, ou seja, nos toros. Nesses pontos a fase da Eq. (10) é estacionária para $Q = 0$. Expandimos então a fase até 1^a ordem em $Q = 0$ e as amplitudes até ordem zero:

$$\varphi \equiv S(q + Q/2, I) - S(q - Q/2, I) - pQ$$

$$\varphi \approx \varphi(Q=0) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \right|_{Q=0} Q = (p(q, I) - p)Q$$

e obtemos

$$W(q, p) \approx \frac{c^2}{(2\pi\hbar)^L} \left| \det \frac{\partial p}{\partial I} \right| \int dQ e^{\frac{i}{\hbar} (p(q, I) - p)Q} = c^2 \left| \det \frac{\partial p}{\partial I} \right| \delta(p - p(q, I))$$

Escolhendo então $c^2 = (2\pi)^{-L}$ para garantir a normalização de W , obtemos

$$W(q, p) = (2\pi)^{-L} \delta(I(q, p) - I) \quad (11)$$

Então, no limite clássico, a função de Wigner é uma delta distribuída uniformemente sobre o toro clássico correspondente.

Podemos agora refinar esse resultado tratando do limite semiclássico. Neste limite esquecemos a condição clássica $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ e procuramos todos os Q 's que tornam a fase φ estacionária (e não apenas $Q = 0$). A condição é:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial S}{\partial q} (q + \bar{Q}/2) + \frac{\partial S}{\partial q} (q - \bar{Q}/2) \right] - p = 0$$

ou

$$p = \frac{p(q + \bar{Q}/2) + p(q - \bar{Q}/2)}{2} \quad (12)$$

Dado então o ponto clássico (q, p) onde W será avaliada, se existir um \bar{Q} tal que a condição acima seja satisfeita; então, o valor de $W(q, p)$ é semiclassicamente significativo e pode ser pensado em termos da Corda de Berry. Estas são cordas do toro clássico que tem (q, p) como ponto médio, pois

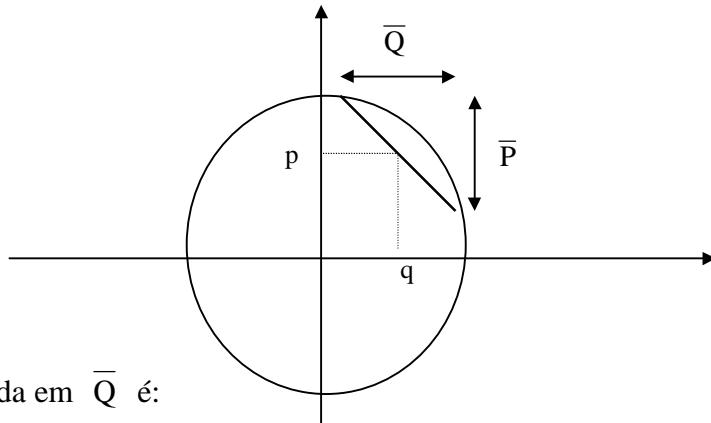
$$q = \frac{(q + \bar{Q}/2) + (q - \bar{Q}/2)}{2} \quad (13)$$

$$p = \frac{p(q + \bar{Q}/2) + p(q - \bar{Q}/2)}{2}$$

e os pontos $(q \pm \bar{Q}/2, p(q \pm \bar{Q}/2))$ estão sobre o toro clássico, pois

$$p(q \pm \bar{Q}/2) = \frac{\partial S}{\partial q} (q \pm \bar{Q}/2)$$

embora (q,p) não estejam:



A fase ϕ calculada em \bar{Q} é:

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi} &= S(q + \bar{Q}/2, I) - S(q - \bar{Q}/2, I) - p\bar{Q} \\
 &= \int_{q_0}^{q+\bar{Q}/2} p(q, I) dq - \int_{q_0}^{q-\bar{Q}/2} p(q, I) dq - p\bar{Q} \\
 &= \int_{q-\bar{Q}/2}^{q+\bar{Q}/2} p(q, I) dq - p\bar{Q} = \mathbf{A} = \text{área da corda}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Finalmente notamos que se \bar{Q} satisfaz (13), então $-\bar{Q}$ também satisfaz e $\phi(-\bar{Q}) = -\phi(\bar{Q})$.

Podemos então escrever.

$$W_I(q, p) \equiv 2 \left[\pi (2\pi\hbar)^{1/2} \right]^{-1} \sum_{\text{cordas}_j} V_j^{-1/2} \cos \left[A_j / \hbar - \eta_j \pi / 4 \right] \tag{15}$$

onde V_j e η_j podem ser calculados explicitamente [24]. Quando (p, q) tende ao toro pode-se mostrar que $V_j \rightarrow 0$, de forma que recobramos o resultado clássico, ou seja, o toro é cáustica de Wigner. Vale notar que para $\hbar \rightarrow 0$ $W(q, p)$ não se anula fora do toro, mas oscila rapidamente de forma que qualquer média resulte em zero.

5.4 Teoria de Órbitas Periódicas

Nos próximos capítulos desenvolveremos a teoria semiclássica para sistemas não-integráveis ou caóticos. O resultado central que deduziremos é conhecido como Fórmula do Traço de Gutzwiller e relaciona

a densidade de níveis $\eta(E)$ (veja a Eq. (16) do capítulo 1) com uma soma sobre órbitas periódicas. No caso integrável que tratamos agora, a regra de quantização EBK, Equações (8) e (9), não estão diretamente ligadas às órbitas periódicas: o estado quântico indexado pelos números quânticos $(n_1, n_2, \dots, n_L) \equiv n$ está associado a um toro invariante dado por

$$I_k = \hbar(n_k + \alpha_k / 4).$$

As frequências sobre estes toros são

$$\omega_k = \frac{\partial H(I)}{\partial I_k} \quad (16)$$

calculadas em

$$I_n = (\hbar(n_1 + \alpha_1 / 4), \hbar(n_2 + \alpha_2 / 4), \dots, \hbar(n_L + \alpha_L / 4)) \quad (17)$$

e, geralmente, essas frequências serão não-comensuráveis.

Apesar desta aparente disparidade entre o resultado de Gutzwiller que obteremos adiante e a regra EBK, Berry e Tabor [25] mostram que é de fato possível re-escrever a Eq.(9) de forma a relacionar os níveis semiclássicos com as órbitas periódicas. Nesta seção apresentamos as principais idéias do trabalho de Berry-Tabor.

Começamos utilizando diretamente a regra EBK na densidade de níveis:

$$\eta(E) = \sum_m \delta(E - E_m) \equiv \sum_m \delta(E - H(m + \alpha / 4) \hbar), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} m &\equiv (m_1, m_2, \dots, m_L) \\ \alpha &\equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L) \end{aligned}$$

e os m_i são números quânticos positivos ou nulos. Usamos agora a Fórmula de Poisson,

$$\sum_m \delta(E - f(m)) = \sum_M \int dI \delta(E - f(I)) e^{2\pi i M I} \quad (19)$$

em (18) e obtemos

$$\eta(E) = \frac{1}{\hbar^L} \sum_M e^{-\frac{i\pi}{2} \alpha \cdot M} \int_{\text{1o quadrante}} dI \delta(E - H(I)) e^{\frac{2\pi i M I}{\hbar}} \quad (20)$$

$$\equiv \eta_{TF}(E) + \frac{1}{\hbar^L} \sum_{M \neq 0} e^{-\frac{i\pi \alpha \cdot M}{2}} \eta_M(E) \quad (21)$$

onde $\eta_{TF}(E)$ é a contribuição do termo com $M = 0$ na Equação (20).

Vamos agora obter expressões semiclássicas para η_{TF} e η_M separadamente. Primeiramente temos

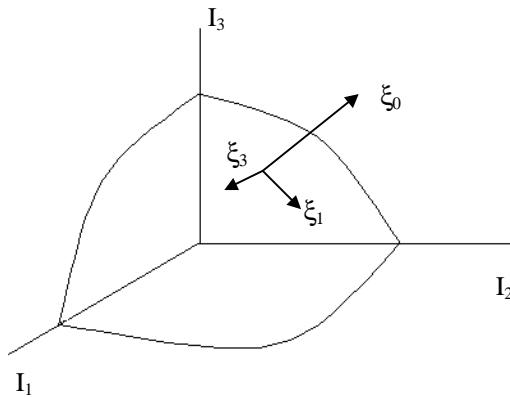
$$\begin{aligned}
 \eta_{TF}(E) &= \frac{1}{\hbar^L} \int d^L I \delta(E - H(I)) \\
 &= \frac{1}{\hbar^L} \int \frac{d^L I d^L \theta}{(2\pi)^L} \delta(E - H(I)) \\
 &= \frac{1}{\hbar^L} \int dp dq \delta(E - H(q, p))
 \end{aligned} \tag{22}$$

que é o resultado de “Thomas-Fermi”, também conhecido com *Termo de Weyl*, representando uma função suave da energia com a interpretação de que cada estado ocupa, em média, um volume de \hbar^L no espaço de fases.

Passamos agora para os “termos oscilantes”

$$\eta_M = \int d^L I \delta(E - H(I)) e^{2\pi i M \cdot I / \hbar} \quad .$$

Temos L integrais e apenas uma função delta. Induzimos então um sistema de coordenadas que nos permita eliminar essa função delta, como mostra a figura abaixo:



Assim, $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{L-1})$ são coordenadas sobre a superfície de energia e ξ_0 mede a distância de um ponto I à superfície $H(I) = E$.

Então,

$$\eta_M = \int d^{L-1} \xi e^{2\pi i M \cdot I / \hbar} \int d\xi_0 \delta(E - H(\xi_0))$$

$$= \int d^{L-1}\xi e^{2\pi i I \cdot M/\hbar} \int d\xi_0 \delta(\xi_0) \bigg/ \left| \frac{\partial H}{\partial \xi_0} \right| \quad (23)$$

onde usamos $H = H(\xi_0)$ pois, por definição, H não varia ao longo de ξ_1, \dots, ξ_{L-1} . Além disso, assumimos que a mudança $I \rightarrow \xi$ tem jacobiano 1, o que também mostra que

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_0} = \frac{\partial H}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial \xi_0} = \omega(I) \cdot \frac{\partial I}{\partial \xi_0}$$

implicando em

$$\left| \frac{\partial H}{\partial \xi_0} \right| = |\omega(I)| \quad (24)$$

As $L-1$ integrais restantes são agora feitas por fase estacionária. O ponto ξ_M estacionário é tal que

$$M \cdot \frac{\partial I}{\partial \xi_i} = 0 \quad \text{em} \quad \xi = \xi_M \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, L-1. \quad (25)$$

Como $\frac{\partial I}{\partial \xi_i}$ são vetores tangentes à $H = E$, o ponto estacionário ocorre quando I_M for perpendicular à $H = E$. Se lembrarmos ainda que

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \frac{\partial H}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial \xi_i} = \omega(I) \cdot \frac{\partial I}{\partial \xi_i} \quad i = 1, \dots, L-1 \quad (26)$$

vemos que

$$\omega(I_M) \propto M ,$$

ou seja,

$$\omega = \omega_M(M_1, M_2, M_3, \dots, M_L) \quad (27)$$

e temos frequências comensuráveis, correspondendo a um toro racional com órbitas periódicas.

A Ação da órbita periódica sobre I_M é

$$\begin{aligned} S(M) &= 2\pi I_1 M_1 + \dots + 2\pi I_L M_L = 2\pi I_M M \\ &= 2\pi q I_M \cdot \mu = q S_\mu \end{aligned} \quad (28)$$

onde re-escrevemos M em termos de fatores primos entre si:

$$M = q(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L)$$

e q é um inteiro qualquer (inclusive negativo), $q \neq 0$.

Para completar a integração, fazemos as integrais gaussianas. O determinante que vai para o denominador é

$$\begin{aligned} \det \left| \frac{2\pi}{\hbar} M \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right| &= \left(\frac{2\pi q}{\hbar} \right)^{L-1} \det \left| \mu \cdot \frac{\partial I}{\partial \xi_i \xi_j} \right| \\ &= \left(\frac{2\pi q}{\hbar} \right)^{L-1} |\mu|^{L-1} K(I) \end{aligned}$$

onde $K(I)$ é a ‘curvatura escalar’ da superfície de energia projetada no espaço das ações. Finalmente, se $\beta(\mu)$ é o número de autovalores positivos menos o número de autovalores negativos de $\mu \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ obtemos (levando em conta que q pode ser positivo e negativo),

$$\begin{aligned} \eta(E) &= \eta_{TF}(E) + \frac{2}{\hbar^{(L-1)/2}} \sum_{\substack{K \\ \text{lo} \\ \text{quadrante}}} \frac{1}{|\mu|^{\frac{L-1}{2}} |\omega(I_\mu)|} \sqrt{K(I_\mu)} \quad X \\ &\quad \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\cos \left[q \left(S_\mu / \hbar - \frac{\pi \alpha_u}{2} \right) + \frac{\pi}{4} \beta(\mu) \right]}{q^{\frac{L-1}{2}}} \end{aligned} \quad (29)$$

que é a Fórmula de Berry-Tabor para $\eta(E)$ em termos de órbitas periódicas. Note que a soma sobre q diverge se

$$S(\mu) / \hbar - \frac{\alpha \cdot \mu \pi}{2} = 2m\pi$$

ou,

$$2\pi(I / \hbar - \alpha / 4) \cdot \mu = 2m\pi$$

ou ainda,

$$I = \hbar(m + \alpha / 4)$$

onde \tilde{m} é um vetor inteiro. Isso recobra EBK exatamente. Berry e Tabor [25] apresentam uma discussão bastante completa sobre a fórmula semiclássica (29), aplicando-a inclusive para potenciais esféricos do tipo Morse, e nos referimos a esse trabalho para maiores detalhes.