8 Funções Zeta

8.1 A Função Zeta de Riemann

A Função Zeta de Riemann tem sido utilizada com interesse crescente nos últimos anos pelos caologistas. Nesta seção apresentaremos de forma bastante simplificada alguns dos motivos que geraram esse interesse. Entre as várias formas de se escrever função $\zeta(z)$ as duas mais conhecidas são em termos de uma *soma de Dirichlet* sobre inteiros ou com um *produto de Euler* sobre os números primos:

$$\varsigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad , R_e(z) > 1 \tag{1}$$

ou

$$\varsigma(z) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-z}} \qquad , \mathrm{Re}(z) > 1 \tag{2}$$

A famosa Hipótese de Riemann é a de que os zeros não-triviais de ζ tem sempre parte real igual a ½:

$$\varsigma\left(\frac{1}{2} + iE_n\right) = 0 , \qquad E_n \quad \text{real} \quad . \tag{3}$$

Apesar de não ter sido demonstrada, existem muitas evidências numéricas deste resultado. Este fato levou M. Berry [29] a conjecturar que os E_n são autovalores de um operador hermiteano cujo análogo clássico corresponderia a uma Hamiltoniana caótica sem simetria de reversão temporal. Essa última parte da conjectura fica mais clara com o estudo das propriedades estatísticas dos níveis E_n.

O que mostraremos aqui, seguindo M. Berry [30,31] é que a equação (2) pode ser reescrita de duas formas, uma semelhante à "soma de Gutzwiller" e outra em uma soma finita sobre inteiros. O análogo da fórmula do traço dessa soma finita é a chamada *Ressonação de Berry-Keating* sobre pseudo-órbitas periódicas [32,33].

Em primeiro lugar notamos que os zeros de ζ estão localizados na região onde nem (1) e nem (2) convergem. Vamos por enquanto ignorar esse fato e computar a densidade de zeros de $\zeta(z)$: a cada zero $\zeta(z)$

muda de sinal, e portanto, seu logarítmo ganha ou perde uma fase $i\pi$. A densidade oscilatória de zeros é então a quantidade de π's contidos em $\log\zeta$ por unidade de energia:

$$d(E)-\bar{d}(E)=\frac{d}{dE}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\log\varsigma\left(\frac{1}{2}+iE\right) \tag{4}$$

Usando (2) para ζ vemos que

$$\log\varsigma\left(\frac{1}{2}+iE\right)=\log\prod_p\frac{1}{1-p^{-1/2-iE}}=\sum_p\log\frac{1}{1-p^{-1/2-iE}}=-\sum_p\log\left(1-p^{-1/2-iE}\right)$$

e

$$\frac{d}{dE}\log\varsigma\left(\frac{1}{2}+iE\right)=-\sum_p\frac{i\log p\quad p^{-1/2-iE}}{1-p^{-1/2-iE}}$$

$$=-\sum_p ip^{-1/2-iE}\log p\sum_{n=0}^{\infty}p^{-n/2-inE}=-\sum_p\sum_{n=1}^{\infty}i\log p\quad p^{-n/2-inE}$$

o que leva à

$$d(E)-\bar{d}(E)=-\frac{1}{\pi}\sum_p\sum_{n=1}^{\infty}\log p\quad p^{-\frac{n}{2}}\cos(nE\log p) \tag{5}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\sum_p\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\log p\quad\exp\left\{-\frac{|n|}{2}\log p\right\}\quad\exp\{inE\log p\} \tag{6}$$

As expressões acima são do tipo Gutzwiller, onde os primos representam órbitas primitivas e <u>n</u> suas repetições (a linha nesta soma indica que n = 0 não entra). Comparando com a Equação (14) do capítulo anterior fazemos as identificações

$$S_{np}(E)=En\log p\quad\rightarrow\quad S_p=E\log p$$

$$\tau_{np}(E)=\frac{\partial S_{np}}{\partial E}=n\log p\rightarrow\tau_p=\log p$$

$$A(E)=\log p\quad e^{-\frac{|n|}{2}\log p}=\frac{\tau_p}{\sqrt{\exp\{|n|\,\tau_p\}}}$$

Dessa forma a expressão (5) fica

$$d(E)=\bar{d}(E)=-\frac{1}{2\pi}\sum_p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_p}{\sqrt{\exp\{|n|\,\tau_p\}}}\cos\left(\frac{nS_p(E)}{\hbar}\right)\ . \tag{7}$$

A densidade média $\bar{d}(E)$ é conhecida e dada por [34]

$$\bar{d}(E) = \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{E}{2\pi}\right) \tag{8}$$

8.2 Riemann-Siegel e Funções Zeta Dinâmicas

Voltemos agora à fórmula (1) para zeta. Calculando $\zeta(z)$ em $z = \frac{1}{2} + iE$ e dividindo a soma sobre os inteiros em duas partes temos :

$$\varsigma\left(\frac{1}{2} + iE\right) = \sum_{n=1}^{n^*} \frac{\exp\{-iE\log n\}}{n^{1/2}} + \sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{\exp\{-iE\log n\}}{n^{1/2}} \tag{9}$$

onde n* é um inteiro arbitrário que será escolhido mais tarde de forma conveniente. Agora aplicamos a fórmula de Poisson no segundo termo, ou seja, usamos a relação

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} f(x) \quad e^{2\pi imx} \, dx \tag{10}$$

e obtemos

$$\sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{e^{-iE\log n}}{n^{1/2}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{n^*+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\exp\{2\pi imx - iE\log x\}}{x^{1/2}} dx \tag{11}$$

Para E grande podemos fazer a integral pela aproximação de fase estacionária. Nessa aproximação as contribuições relevantes ocorrem para

$$x = \bar{x} = E / 2m\pi$$

Como $n^* + \frac{1}{2} < x < \infty$, apenas os m no intervalo $1 < m < \frac{E}{2\pi n^*}$ contribuem, e a soma sobre m fica finita! A fase do integrando $\varphi \equiv 2\pi mx - E\log x$ pode ser expandida até segunda ordem em torno do ponto estacionário e fica

$$\varphi(x) \approx \varphi(\bar{x}) + \frac{1}{2}\varphi''(\bar{x})\,(x - \bar{x})^2 \quad ,$$

$$\varphi(\bar{x}) = E - E\log\left(\frac{E}{2m\pi}\right) = E - E\log\left(\frac{E}{2\pi}\right) + E\log m = -E\log\left(\frac{E}{2\pi e}\right) + E\log m \quad ,$$

$$\varphi''(\bar{x}) = \frac{E}{\bar{x}^2} = \frac{4\pi^2 m^2}{E}$$

e a integral fica

$$\sum_{m=1}^{E/2\pi n^*} \left(\frac{2\pi m}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi i E}{2\pi^2 m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \exp\left\{-iE\log\left(\frac{E}{2\pi e}\right) + iE\log m\right\}$$

$$= \sum \frac{e^{i\pi/4}}{m^{1/2}} \quad e^{-iE\log(E/2\pi e)} \; e^{iE\log m}$$

$$= \exp\{-2\pi\, iN(E)\} \sum_{m=1}^{E/2\pi n^*} \frac{e^{iE\log m}}{m^{1/2}} \tag{12}$$

onde

$$N(E) = \frac{E}{2\pi}\log\left(\frac{E}{2\pi e}\right) + \frac{7}{8} \tag{13}$$

Note que $\frac{dN}{dE} = \bar{d}(E)$, equação (6), de forma que N(E) é a função escada que conta os zeros de $\zeta(z)$. Note ainda que, a menos do fator de fase, (12) é o complexo conjugado do primeiro termo em (9) se escolhermos

$$n^* = \sqrt{\frac{E}{2\pi}} \tag{14}$$

Com essa escolha temos

$$\varsigma\left(\frac{1}{2} + iE\right) \cong 2\exp\{-\pi\, i\, N(E)\} \sum_{m=1}^{\sqrt{E/2\pi}} \frac{\cos[E\log m - \pi N(E)]}{m^{1/2}} \tag{15}$$

que é (essencialmente) a fórmula de Riemann-Siegel. É com essa fórmula que se tem computado numericamente os zeros de ζ . Note que ela é extremamente superior à seu análogo de Gutzwiller, (7). Aqui, a dupla soma sobre p e n é substituída por uma única soma finita sobre m!

Uma primeira aproximação para calcular os zeros de (15) consiste em tomar apenas m = 1. Isso leva à regra de quantização

$$N(E_n) = n + \frac{1}{2}$$

onde N(E) é dado por (13). Os termos com $m \geq 2$ oscilam mais lentamente e o último é quase constante. A pergunta então é: será possível ressonar a fórmula do traço e transformá-la em algo análogo á equação (15) ? Para isso precisamos de uma função cujos <u>zeros</u>, e não pólos, sejam os níveis de energia. Essas funções são chamadas de *Funções Zeta Dinâmicas*.

Consideremos então, como Berry e Keating [32], a expressão

$$\Delta(E) \equiv \det\left[A(E,\hat{H})(E-\hat{H})\right] = \prod_j \left[A(E,E_j)(E-E_j)\right] \tag{16}$$

onde $A(E,E_j)$ é um fator de normalização conveniente que não possui zeros. Então, $\Delta(E)$ tem zeros nos níveis de energia, como desejado. Seja agora

$$f(E) = \mathrm{tr}\,\log\left(E + i\varepsilon - \hat{H}\right) = \sum_n \log(E + i\varepsilon - E_n) \tag{17}$$

Então,

$$\frac{df}{dE} = \sum_n \frac{1}{E - E_n + i\varepsilon} = PP\left(\sum_n \frac{1}{E-E_n}\right) - i\pi \sum_n \delta\left(E - E_n\right) = G(E + i\varepsilon)$$

$$\equiv \quad \mu(E) - i\,\pi\, n(E)$$

Como $\mu(E)$ não possui singularidades e $n(E) = \dfrac{dN(E)}{dE}$, onde $N(E)$ é a função escada, temos que

$$f(E) = \nu(E) - i\pi N(E)$$

onde $\dfrac{d\nu}{dE} = \mu$. Dessa forma, usando (16) e (17) obtemos

$$\Delta(E) = \det A \,.\, \exp\left\{\mathrm{tr}\,\log\left(E - \hat{H}\right)\right\}$$

$$= \det A\, \exp\{\nu(E) - i\pi N(E)\} = \det A\, \exp\left\{-i\pi\overline{N}(E) + \left[\nu(E) - i\pi N + i\pi\overline{N}\right]\right\}$$

onde usamos que $\det C = \exp\{\,\mathrm{tr}\,[\log \hat{C}]\}$. Usando ainda que

$$f(E) = \int_0^E G(E')dE' = \nu(E) - i\pi N(E)$$

vemos que $\Delta(E)$ pode ser escrito como

$$\Delta(E) = \det A\, \exp\left\{-i\pi\overline{N}(E) + \bar{\nu}(E) + \int_0^E \left[G(E') - \overline{G}(E')\right]dE'\right\}$$

$$= B(E) \quad \exp\left\{-i\pi\overline{N}(E) + \int_0^E \left[G(E') - \overline{G}(E')\right]dE'\right\} \tag{18}$$

onde $B(E) = \det(A)\, e^{\bar{\nu}}$ .Finalmente usamos a Fórmula do Traço, equação (13) do capítulo 7 para $G - \overline{G}$:

$$G(E)-\overline{G}(E)\cong\frac{-i}{\hbar}\sum_{P}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau_p\, e^{i\,m\,S_p/\hbar}}{\sqrt{\det\left(M_p^m-I\right)}}=-\frac{d}{dE}\sum_{p}\sum_{m}\frac{1}{m}\frac{e^{i\,m\,S_p/\hbar}}{\sqrt{\det\left(M^m-I\right)}}$$

pois $\tau_p=\dfrac{\partial S_p}{\partial E}$. Estamos também supondo que $\sigma_p=0$ para simplificar a apresentação.

Assim, a Equação (18) fica

$$\Delta(E)\approx B(E)\exp\left\{-i\pi\overline{N}(E)\right\}\quad\prod_{P}\exp\left\{-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\exp\left\{imS_p/\hbar\right\}}{m\sqrt{\det\left(M_p^m-I\right)}}\right\}\tag{19}$$

Para o caso de órbitas instáveis diretas em dois graus de liberdade, $\sqrt{\det\left(M_p^m-I\right)}=2\sinh m\mu/2$. Ao invez de usar a expansão completa do inverso do seno hiperbólico como fizemos no capítulo 7, vamos simplesmente aproximar $2\sin hm\mu/2\approx$ $\exp(m\mu/2)$ (veja a referência [32] para um cálculo completo). Nessa aproximação a somatória sobre m fica

$$=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{imS_p/\hbar}}{m\sqrt{\det\left(M_p^m-I\right)}}\approx-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{imS_p/\hbar-m\mu_p/2}}{m}=\log\left(1-e^{iS_p/\hbar-\mu_p/2}\right)$$

e

$$\Delta(E)\approx B(E)\quad\prod_{P}\left(1-\exp\left\{\frac{-\mu_p}{2}+\frac{iS_p}{\hbar}\right\}\right)\exp\left\{-i\pi\overline{N}(E)\right\}\tag{20}$$

que é um produto sobre órbitas primitivas, assim como $\varsigma(E)$ pode ser escrita como um produto sobre números primos ! Vamos então ressomar (20): temos que

$$\prod_{p}(1-e^{\varphi_p})=(1-e^{\varphi_1})(1-e^{\varphi_2})\ldots(1-e^{\varphi_k})\ldots$$

$$=1-\sum_{p}e^{\varphi_p}+\sum_{p\neq p'}e^{\varphi_p+\varphi_{p'}}\ldots$$

Cada contribuição na série acima possui um expoente que combina 0,1,2, etc órbitas primitivas. Definindo o período de cada termo como a soma dos períodos das órbitas envolvidas, podemos re-ordenar a soma em ordem de períodos crescentes e escrever

$$\Delta(E)=B(E)\,e^{-i\pi\overline{N}(E)}\quad\sum_{n=0}^{\infty}e^{i\,\overline{S}_n/\hbar-\overline{\mu}_n/2}\tag{21}$$

onde cada terno agora é chamado de *pseudo orbita* e tem período, ação e estabilidade dadas por

$$\tau_n\equiv\sum m_p\tau_p\quad,$$

$$\overline{S}_n = \sum_P m_p S_p \quad ,$$

$$\overline{\mu}_n = \sum_P m_p \mu_p \quad .$$

e os m_p são 0 ou 1.

Usamos agora a analogia com a fórmula de Riemann-Soegel para ressonar a cauda da somatória e obtemos

$$\Delta(E) = B(E) \sum_{n=0}^{\tau_n < \tau^*(E)} e^{-\overline{\mu}_n/2} \cos\left(\overline{S}_n / \hbar - \pi \overline{N}(E)\right) \qquad (24)$$

onde a soma é sobre pseudo-órbitas com período

$$\tau_n \equiv \sum m_p \tau_p \qquad (25)$$

menores que $\tau^*(E)$, onde o cosseno é estacionário:

$$\frac{d}{dE}\left(\frac{\overline{S}_n}{\hbar} - \pi \overline{N}\right) = 0$$

ou

$$\tau^*(E) = h\overline{n}(E) / 2 \quad . \qquad (26)$$

O resultado da ressomação acima, equação (24), é bastante interessante e tem sido bastante explorado. A função Δ(E), por sua analogia com $\varsigma\left(\frac{1}{2} + iE\right)$ é chamada *Função Zeta Dinâmica*.

8.3 Outras Somas

Além das somas parciais sobre repetições e da ressomação de Berry-Keating, outros tipos têm sido propostos. Dentre estas vale a pena mencionar a Expansão de Curvatura, de Cvitanovic-Eckhardt, também baseada em funções zeta dinâmicas, e a Soma Homoclínica de Ozório de Almeida.

A Expansão de Curvatura [35] consiste em identificar órbitas periódicas "básicas" de tal forma que órbitas primitivas mais complexas se assemelhem a uma "combinação linear" dessas órbitas (ou ciclos) básicos. Assim fazemos

$$\Delta(E) = B(E) \quad e^{-i\pi \overline{N}(E)} \quad \prod_p \left(1 - t_p\right)$$

onde

$$t_p = \exp\left\{\frac{-\mu_p}{2} + \frac{i S_p}{\hbar}\right\} = e^{\varphi_p}$$

e expandimos a produtória. No caso de haver apenas duas órbitas básicas a expansão fica

$$\prod_p (1-t_p) = (1-t_0)(1-t_1)(1-t_{10})(1-t_{100})(1-t_{101})\ldots$$

$$= 1 - t_0 - t_1 - (t_{10} - t_1 t_0) - (t_{100} - t_{10} t_{10}) + \ldots$$

onde a órbita associada à t_{10} é próxima à órbita $t_1 \oplus t_0$, etc. Assim, os termos entre parênteses devem ser pequenos e a soma convergente.

A <u>Soma Homoclínica</u> é feita diretamente a partir da fórmula do traço e é motivada pela constatação numérica de que vários estados quânticos aparecem concentrados em órbitas periódicas instáveis simples, com concentrações também altas nas proximidades das variedades estáveis e instáveis da órbita periódica. Como a soma sobre repetições desta única órbita não produz pólos, a idéia é somar as contribuições de órbitas no emaranhado homoclínico [36]. Poincaré demonstrou a existência de várias famílias de órbitas periódicas longas que se acumulam nas homoclínicas para $\tau \to \infty$. Essas órbitas passam a maior parte do tempo próximas da órbita periódica instável (ponto fixo) e podem ser aproximadas por ela. Ozório de Almeida faz um cálculo cuidadoso dessas contribuições e mostra que, se o coeficiente μ (de instabilidade) não for muito grande, é possível a existência de pólos em $n(E)$ quando não apenas a ação da órbita periódica for quantizada mas também quando a ação "loop homoclínico", formado pelos ramos das variedades estável e instável até seu primeiro cruzamento, como visto em uma seção de Poincaré, for quantizada. Nos referimos ao trabalho de Ozorio de Almeida [36] para maiores detalhes.