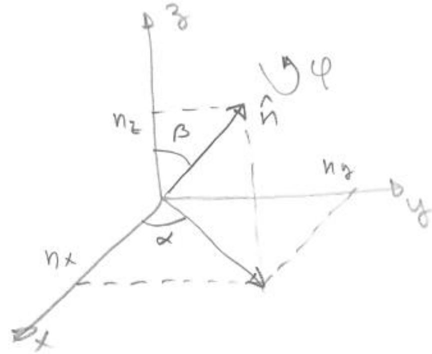
APÊNDICE

Matriz de Rotação em torno de um Eixo Arbitrário

Existem várias maneiras de obter a matriz de rotação em torno de

$$\hat{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta)$$

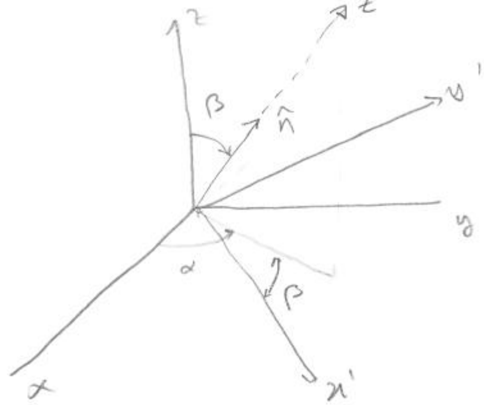
por um ângulo φ. A representação de $\hat{n}$ é ilustrada abaixo



$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Apresento aqui 3 deduções da matriz $R(\varphi, \hat{n})$ que são interessantes para entender o processo da rotação: (A) "força bruta"; (B) com ângulos de Euler; (C) usando geometria. A terceira forma é a mais simples e elegante.

(A) Força Bruta — A idéia é projetar o vetor a ser rodado, $\vec{v}$, na base x', y', z' onde $\hat{z}' = \hat{n}$, $\hat{x}'$ está no plano $\hat{n} \wedge \hat{z}$ e $\hat{y}'$ no plano $\hat{x} \wedge \hat{y}$. Rodamos em torno de z' e retornamos à base original:



$$\begin{cases} \hat{x}' = (\cos\beta\cos\alpha\,,\ \cos\beta\sin\alpha\,,\ -\sin\beta) \\ \hat{y}' = (-\sin\alpha\,,\ \cos\alpha\,,\ 0) \\ \hat{z}' = (\sin\beta\cos\alpha\,,\ \sin\beta\sin\alpha\,,\ \cos\beta) = \hat{n} \end{cases}$$

invertendo,

$$\begin{cases} \hat{x} = \cos\beta\cos\alpha\,\hat{x}' - \sin\alpha\,\hat{y}' + \sin\beta\cos\alpha\,\hat{z}' \\ \hat{y} = \cos\beta\sin\alpha\,\hat{x}' + \cos\alpha\,\hat{y}' + \sin\beta\sin\alpha\,\hat{z}' \\ \hat{z} = -\sin\beta\,\hat{x}' + \cos\beta\,\hat{z}' \end{cases}$$

Então, dado $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ temos

$$\vec{v} = (v_x\cos\beta\cos\alpha + v_y\cos\beta\sin\alpha - v_z\sin\beta)\,\hat{x}' + (-v_x\sin\alpha + v_y\cos\alpha)\,\hat{y}' +$$
$$(v_x\sin\beta\cos\alpha + v_y\sin\beta\sin\alpha + v_z\cos\beta)\,\hat{z}'$$

$$\equiv v_x'\,\hat{x}' + v_y'\,\hat{y}' + v_z'\,\hat{z}'$$

Rodando:

$$R(\varphi,\hat{z}')\,\vec{v} = (v_x'\cos\varphi - v_y'\sin\varphi)\,\hat{x}' + (v_x'\sin\varphi + v_y'\cos\varphi)\,\hat{y}' + v_z'\,\hat{z}'$$
$$\equiv A\,\hat{x}' + B\,\hat{y}' + C\,\hat{z}'$$

Voltamos agora para a base original:

$$R(\varphi,\hat{n})\,\vec{v} = (A\cos\beta\cos\alpha - B\sin\alpha + C\sin\beta\cos\alpha)\,\hat{x} +$$
$$(A\cos\beta\sin\alpha + B\cos\alpha + C\sin\beta\sin\alpha)\,\hat{y} + (-A\sin\beta + C\cos\beta)\,\hat{z}$$

Substituindo A, B, C em termos de v_x', v_y', v_z' e esses em termos de v_x, v_y, v_z obtemos uma equação linear que podemos escrever na forma

$$R(\varphi, \hat{n})\vec{v} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_3 \end{pmatrix} .$$

Obteremos a matriz explicitamente usando o método geométrico. O leitor pode calcular t.b. com o método acima e ver que os resultados coincidem.

(B) Ângulos de Euler — Podemos fazer as operações da seguinte forma: (1) levamos força bruta usando ângulos de Euler da seguinte forma: (1) levamos o sistema (x', y', z') para (x, y, z). Com isso $\hat{n}$ é levado em $\hat{z}$; (2) rodamos de φ em torno de $\hat{z}$; (3) levamos o sistema de volta à sua posição original:

$$R_{\hat{n}}(\varphi) = R_{y'}(\beta)\, R_z(\alpha)\, R_z(\varphi)\, R_z^{-1}(\alpha)\, R_{y'}^{-1}(\beta)$$

$$= R_{y'}(\beta)\, R_z(\varphi)\, R_{y'}^{-1}(\beta)$$ pois as rotações z comutam.

Rodar de β em torno de y' pode ser feito com o mesmo truque: trazemos y' p/ y, rodamos em torno de y e levamos de volta:

$$R_{y'}(\beta) = R_3(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_3^{-1}(\alpha)$$

$$R_{y'}^{-1}(\beta) = R_3(\alpha)\, R_y^{-1}(\beta)\, R_3^{-1}(\alpha)$$ e

$$R_{\hat{n}}(\varphi) = R_3(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_3^{-1}(\alpha)\, R_3(\varphi)\, R_3(\alpha)\, R_y^{-1}(\beta)\, R_3^{-1}(\alpha)$$

$$= R_3(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_3(\varphi)\, R_y^{-1}(\beta)\, R_3^{-1}(\alpha)$$

$$= T_{\alpha\beta}\, R_3(\varphi)\, T_{\alpha\beta}^{-1}$$

Veja que $R_3(\alpha) R_y(\beta) R_3(\varphi)$ é uma rotação de Euler. Veja o item (E) adiante

$$T_{\alpha\beta} = R_z(\alpha)\, R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha & -\sin\alpha & \sin\beta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$T_{\alpha\beta}^{-1} = T_{\alpha\beta}^{T} \qquad \text{e}$$

$$R_{\hat{n}}(\varphi) = T_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{\alpha\beta}^{T}$$

Veja que podemos escrever $\cos\alpha = \dfrac{n_x}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}}$; $\sin\alpha = \dfrac{n_y}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}}$.

$$\cos\beta = n_z \quad ; \quad \sin\beta = \sqrt{n_x^2+n_y^2}$$

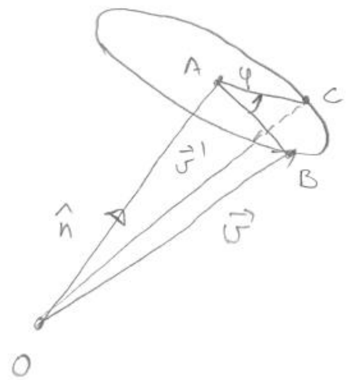
e

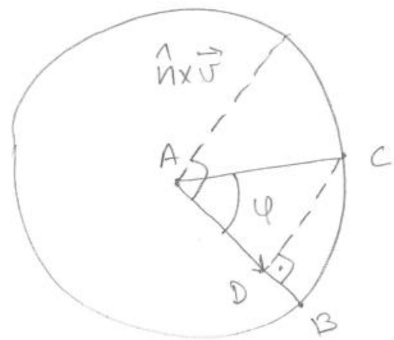
$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dfrac{n_x n_z}{\rho} & -\dfrac{n_y}{\rho} & n_x \\ \dfrac{n_y n_z}{\rho} & \dfrac{n_x}{\rho} & n_y \\ -\rho & 0 & n_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \rho \equiv \sqrt{n_x^2+n_y^2}$$

Novamente NÃO faremos o cálculo explícito de $T_{\alpha\beta} R_z(\varphi) T_{\alpha\beta}^T$. Nesse formato é mais fácil comparar com o resultado geométrico. Veja que podemos escrever

$$R_{\hat{n}}(\varphi) = T_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{\alpha\beta}^{T} + T_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_{\alpha\beta}^{T} \cos\varphi + T_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_{\alpha\beta}^{T} \sin\varphi$$

(c) MÉTODO GEOMÉTRICO

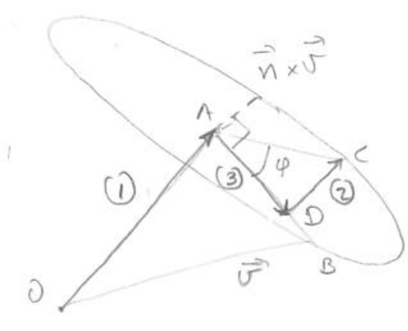




Rodamos $\vec{v}$ em torno de $\hat{n}$ e obtemos $\vec{v}'$. Vamos decompor $\vec{v}'$ em três partes ortogonais: uma na direção de $\hat{n}$, outra na direção de $\hat{n}\times\vec{v}$ e outra na direção de $\vec{AB}$. A primeira parte é

$$\left(\hat{n}\cdot\vec{v}'\right)\hat{n} = \left(\hat{n}\cdot\vec{v}\right)\cdot\hat{n}$$

pois as projeções de $\vec{v}'$ e $\vec{v}$ na direção de $\hat{n}$ são iguais.



$|\vec{AC}| = |\vec{AB}| = |\vec{n}\times\vec{v}|$

A parte (3) é $\vec{AD}$:

$$\vec{AB} = \vec{v} - \vec{OA} = \vec{v} - (\hat{n}\cdot\vec{v})\,\hat{n}$$

e

$$\vec{AD} = \left(\vec{v} - (\hat{n}\cdot\vec{v})\,\hat{n}\right)\cos\varphi$$

A parte (2) é $\vec{DC} \parallel \hat{n}\times\vec{v}$

$$\vec{DC} = (\hat{n}\times\vec{v})\sin\varphi$$

Então

$$\vec{v}' = \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{v}) + (\vec{v} - \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{v}))\cos\varphi + (\hat{n}\times\vec{v})\sin\varphi$$

$$= \left[\hat{n}\hat{n} + (\mathbb{1} - \hat{n}\hat{n})\cos\varphi + \mathcal{A}\sin\varphi\right]\vec{v}$$

onde $\hat{n}\hat{n}$ = díada = $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}(n_x \; n_y \; n_z) = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_xn_y & n_xn_z \\ n_xn_y & n_y^2 & n_yn_z \\ n_xn_z & n_yn_z & n_z^2 \end{pmatrix}$

e $\mathcal{A}\vec{v} = \hat{n}\times\vec{v} \Rightarrow \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}$

A matriz de rotação é então

$$R(\varphi,\hat{n}) = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_xn_y & n_xn_z \\ n_xn_y & n_y^2 & n_yn_z \\ n_xn_z & n_yn_z & n_z^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-n_x^2 & -n_xn_y & -n_xn_z \\ -n_xn_y & 1-n_y^2 & -n_yn_z \\ -n_xn_z & -n_yn_z & 1-n_z^2 \end{pmatrix}\cos\varphi$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}\sin\varphi$$

Veja que se $\vec{v} = a\hat{n}$ teremos

$$(\hat{n}\hat{n})\vec{v} = a(\hat{n}\cdot\hat{n})\hat{n} = \vec{v}$$
$$(1-\hat{n}\hat{n})\vec{v} = \vec{v} - \vec{v} = 0$$
$$\mathcal{A}\vec{v} = \hat{n}\times\vec{v} = 0$$

e $\vec{v}' = \vec{v}$, como esperado. Compare $R(\varphi,\hat{n})$ com o resultado no final da página 4. Você pode mostrar que os termos são iguais.

(D) O análogo quântico

Na parte (B) mostramos que

$$R_{\hat{n}}(\varphi) = T_{\alpha\beta} R_{\hat{z}}(\varphi) T_{\alpha\beta}^{T} \quad \text{onde} \quad T_{\alpha\beta} = R_{\hat{z}}(\alpha) R_{\hat{y}}(\beta)$$

Transpondo esse resultado para a mecânica quântica teremos

$$\mathcal{D}(\hat{n},\varphi) = T(\alpha,\beta)\,\mathcal{D}(\hat{z},\varphi)\,T^{+}(\alpha,\beta) \quad \text{onde}$$

$$T(\alpha,\beta) = \mathcal{D}(\hat{z},\alpha)\,\mathcal{D}(\hat{y},\beta) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & -\sin\beta/2 \\ \sin\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\beta/2 & -e^{-i\alpha/2}\sin\beta/2 \\ e^{i\alpha/2}\sin\beta/2 & e^{i\alpha/2}\cos\beta/2 \end{pmatrix}$$

Vamos então calcular $\mathcal{D}(\hat{n},\varphi)$:

$$T(\alpha,\beta)\,\mathcal{D}(\hat{z},\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\beta/2 & -e^{-i\alpha/2}\sin\beta/2 \\ e^{i\alpha/2}\sin\beta/2 & e^{i\alpha/2}\cos\beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\varphi)/2}\cos\beta/2 & -e^{-i(\alpha-\varphi)/2}\sin\beta/2 \\ e^{i(\alpha-\varphi)/2}\sin\beta/2 & e^{i(\alpha+\varphi)/2}\cos\beta/2 \end{pmatrix} \quad e$$

$$T(\alpha,\beta)\,\mathcal{D}(\hat{z},\varphi)\,T^{+}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\varphi)/2}\cos\beta/2 & -e^{-i(\alpha-\varphi)/2}\sin\beta/2 \\ e^{i(\alpha-\varphi)/2}\sin\beta/2 & e^{i(\alpha+\varphi)/2}\cos\beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2}\cos\beta/2 & e^{-i\alpha/2}\sin\beta/2 \\ -e^{i\alpha/2}\sin\beta/2 & e^{-i\alpha/2}\cos\beta/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos^2\beta/2 + e^{i\varphi/2}\sin^2\beta/2 & e^{-i\alpha}\sin\beta/2\cos\beta/2\,(e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}) \\ e^{i\alpha}\sin\beta/2\cos\beta/2\,(e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}) & e^{-i\varphi/2}\sin^2\beta/2 + e^{i\varphi/2}\cos^2\beta/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 - i\sin\varphi/2\cos\beta & -ie^{-i\alpha}\sin\beta\sin\varphi/2 \\ -ie^{i\alpha}\sin\beta\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 + i\sin\varphi/2\cos\beta \end{pmatrix}$$

Lembrando que

$$n_x = \sin\beta\cos\alpha$$
$$n_y = \sin\beta\sin\alpha \longrightarrow \sin\beta\, e^{i\alpha} = n_x + i n_y$$
$$n_z = \cos\beta$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 - in_z\sin\varphi/2 & -i(n_x - in_y)\sin\varphi/2 \\ -i(n_x + in_y)\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 + in_z\sin\varphi/2 \end{pmatrix}$$

que pode ser comparada com a expressão na página 101.

(E) Relação com o operador de Rotação de Euler:

$$\mathcal{D}(\hat{n},\varphi) = \underbrace{\mathcal{D}(\hat{z},\alpha)\,\mathcal{D}(\hat{y},\beta)\,\mathcal{D}(\hat{z},\varphi)}_{\mathcal{D}(\alpha,\beta,\varphi)}\,\underbrace{\mathcal{D}^{\dagger}(\hat{y},\beta)\,\mathcal{D}^{\dagger}(\hat{z},\alpha)}_{\mathcal{D}(\hat{y},-\beta)\,\mathcal{D}(\hat{z},-\alpha)}$$

$$\mathcal{D}(\hat{n},\varphi) = \mathcal{D}(\alpha,\beta,\varphi)\,\mathcal{D}(\hat{y},-\beta)\,\mathcal{D}(\hat{z},-\alpha)$$