(G) Tensores no $\mathbb{R}^3$ versus tensores irredutíveis

No $\mathbb{R}^3$ vetores se transformam quando os eixos são rodados. Se R_{ij} é a matriz ortogonal de rotação, então

$$v_i' = \sum_j R_{ij} v_j$$

onde v_i = componente de $\vec{v}$ nos eixos originais e v_i' = componente de $\vec{v}$ nos eixos rodados. Com dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ podemos construir a díada

$$A_{ij} = v_i u_j$$

e, nos eixos rodados teremos

$$A_{ij}' = \left(\sum_l R_{il} v_l\right)\left(\sum_m R_{jm} u_m\right) = \sum_{l,m} R_{il} R_{jm} A_{lm}$$

Qualquer quantidade A_{ij} que se transforma dessa maneira por rotações é um tensor de segunda ordem. Essa equação pode ser escrita como $A' = R A R^T$.

Na mecânica quântica definimos um tensor irredutível de segunda ordem como um objeto de apenas 5 componentes que se transforma como

$$\mathcal{D}(R)\, T_q^{(2)}\, \mathcal{D}^\dagger(R) = \sum_{q'=-2}^{2} \mathcal{D}_{q'q}^{(2)}\, T_{q'}^{(2)}$$

Como entender essa discrepância de 9 versus 5 componentes?

Começamos separando A_{ij} como na pág. 145 como:

$$A = c\,\mathbb{1} + A^a + A^s$$

onde

$$c = tr(A)/3$$

$$A^a_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = \text{parte anti-simétrica}$$

$$A^s_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) - c\,\delta_{ij} = \text{parte simétrica de traço nulo.}$$

Vamos então transformar A por partes:

$$A' = RAR^T = c\,R\mathbb{1}R^T + RA^aR^T + RA^sR^T$$

$$\equiv c\,\mathbb{1} + A^{a)} + A^{s)} .$$

O primeiro termo é invariante por rotações e, portanto, é um escalar.
A parte anti-simétrica pode ser escrita como

$$A^a = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{w} \equiv \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

de tal forma que $A^a v = \vec{w} \times \vec{v}$. Como A^a só depende dessas três componentes, escrevemos $A^a = A^a(\vec{w})$. Calculemos RA^aR^T para o caso simples de rotação em torno de $\hat{z}$:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Obtemos

$$RA^aR^T = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y\cos\varphi + w_x\sin\varphi \\ w_z & 0 & w_y\sin\varphi - w_x\cos\varphi \\ -w_y\cos\varphi - w_x\sin\varphi & -w_y\sin\varphi + w_x\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

como $R\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \cos\varphi - w_y \sin\varphi \\ w_x \sin\varphi + w_y \cos\varphi \\ w_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} w_x' \\ w_y' \\ w_z' \end{pmatrix}$ vemos que

$$R A^a R^T = \begin{pmatrix} 0 & -w_z' & w_y' \\ w_z' & 0 & -w_x' \\ -w_y' & w_x' & 0 \end{pmatrix}$$ ou seja

$$\boxed{R A^a(\vec{w}) R^T = A^a(R\vec{w})}$$ $\Rightarrow$ estamos apenas rodando o vetor $\vec{w}$ e $A^a(\vec{w})$ é, na verdade, um vetor. A única parte não trivial é a última, com 5 componentes, A^s. Esse é o tensor irredutível. Veja que as componentes w_i' só dependem de w_i, não das componentes de A^s. Essas últimas também não se misturam com c, ou $\vec{w}$. Um tensor usual de 9 componentes se decompõe em: 1 escalar, 1 vetor, 1 tensor irredutível.

Como se decompõe um tensor A_{ijk}, de 27 componentes? Podemos construir tal vetor como uma "tríade" $v_i u_j w_k$. Na mecânica quântica isso requer a soma $\vec{J} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 \equiv \vec{F} + \vec{L}_3$, com $l_1 = l_2 = l_3 = 1$. Assim $f = 2, 1, 0$ e temos

$f = 2 \rightarrow j = 3, 2, 1$

$f = 1 \rightarrow j = 2, 1, 0 \longrightarrow$

$f = 0 \rightarrow j = 1$

$j = 3 \Rightarrow$ 3-tensor, 7 componentes

$j = 2 \Rightarrow 2\times$ 2-tensores, 10 compo.

$j = 1 \Rightarrow 3\times$ vetores, 9 comp.

$j = 0$ $1\times$ escalar, 1 comp.

(+)

27 comp.

Temos então um tensor $T_q^{(3)}$, dois tensores $T_q^{(2)}$, três vetores $T_q^{(1)}$ e um escalar $T_0^{(0)}$.