

3.8 O modelo de Schwinger para o Momento Angular

A Álgebra de momento angular pode ser mapeada na Álgebra de dois osciladores harmônicos independentes, que demonstraremos pelo sub-escritor (1) e (2). Tudo que tiver o índice (1) combina com (2). Para cada índice valem as regras de comutação usuais:

$$N_1 \equiv a_1^\dagger a_1 \quad ; \quad N_2 = a_2^\dagger a_2$$

$$[a_i, a_i^\dagger] = [a_2, a_2^\dagger] = 1$$

$$[N_1, a_1^\dagger] = a_1^\dagger \quad ; \quad [N_2, a_2^\dagger] = a_2^\dagger$$

$$[N_1, a_1] = -a_1 \quad ; \quad [N_2, a_2] = -a_2$$

Os auto-estados comuns aos operadores N_1 e N_2 são

$$|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle .$$

Em particular temos:

$$a_1^\dagger |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1+1} |n_1+1, n_2\rangle$$

$$a_2^\dagger |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2+1} |n_1, n_2+1\rangle$$

$$a_1 |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1} |n_1-1, n_2\rangle$$

$$a_2 |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2} |n_1, n_2-1\rangle$$

$$a_1 |0, 0\rangle = a_2 |0, 0\rangle = 0$$

OBS. \cup SAKURAI USA índices (+) e (-) em vez de (1) e (2), o que é um pouco confuso.

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!}} |00\rangle$$

Definimos agora

$$J_+ = \hbar a_1^\dagger a_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} J_x = \frac{\hbar}{2} (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) \\ J_y = \frac{\hbar}{2i} (a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1) \end{cases}$$

$$J_- = \hbar a_2^\dagger a_1$$

$$J_3 = \frac{\hbar}{2} (a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) = \frac{\hbar}{2} (N_1 - N_2)$$

$$N = N_1 + N_2$$

$$J^2 \equiv J_3^2 + \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) = \hbar^2 \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right)$$

É fácil mostrar que J_+, J_-, J_3 satisfazem uma álgebra de momento angular, i.e.,

$$[J_3, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3$$

$$[J^2, J_3] = [J^2, J_\pm] = 0$$

Vamos mostrar a 1ª dessas identidades como exemplo (o livro mostra a 2ª delas):

$$\begin{aligned} [J_3, J_+] &= \frac{\hbar^2}{2} [N_1 - N_2, a_1^\dagger a_2] = \frac{\hbar^2}{2} \{ [N_1, a_1^\dagger] a_2 - a_1^\dagger [N_2, a_2] \} \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \{ a_1^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_2 \} = \hbar^2 a_1^\dagger a_2 = \hbar J_+ \end{aligned}$$

Além disso vemos que

13!

$$J_+ |n_1, n_2\rangle = \hbar a_1^\dagger a_2 |n_1, n_2\rangle = \hbar \sqrt{(n_1+1)n_2} |n_1+1, n_2-1\rangle$$

$$J_- |n_1, n_2\rangle = \hbar a_2^\dagger a_1 |n_1, n_2\rangle = \hbar \sqrt{n_1(n_2+1)} |n_1-1, n_2+1\rangle$$

$$J_3 |n_1, n_2\rangle = \frac{\hbar}{2}(n_1 - n_2) |n_1, n_2\rangle = \hbar \left(\frac{n_1 - n_2}{2}\right) |n_1, n_2\rangle$$

Para entendermos o que está acontecendo notamos que a ação de J_\pm e J_3 NÃO altera a soma $n_1 + n_2$, que tem o papel de j . O operador J_+ aumenta n_1 e diminui n_2 de uma unidade, enquanto J_- faz o contrário. Então $\frac{n_1 - n_2}{2}$ tem o papel de m .

Fazendo então

$$\frac{n_1 + n_2}{2} = j \quad \rightarrow \quad n_1 = j + m$$

$$\frac{n_1 - n_2}{2} = m \quad \rightarrow \quad n_2 = j - m$$

As relações acima recaem exatamente nas relações pt J_\pm e J_3 . O estado $|n_1, n_2\rangle$ então é associado ao estado $|j, m\rangle$:

$$|j, m\rangle = |n_1 = j + m, n_2 = j - m\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{j+m} (a_2^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} |0, 0\rangle$$

Veja ainda que o auto-valor de J^2 fica

$$\hbar^2 \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1\right) = \hbar^2 j(j+1) \quad \text{pois} \quad \frac{n_1 + n_2}{2} = \frac{N}{2} = j$$

Exemplo 1 : $J = 1/2$

$$(a) \quad m = -1/2 \quad n_1 = 0, n_2 = 1 \quad \rightarrow \quad |0, 1\rangle$$

$$(b) \quad m = +1/2 \quad n_1 = 1, n_2 = 0 \quad \rightarrow \quad |1, 0\rangle$$

Exemplo 2 : $J=1$

- (a) $m=-1$ $n_1=0, n_2=2$ $|02\rangle$
- (b) $m=0$ $n_1=n_2=1$ $|11\rangle$
- (c) $m=1$ $n_1=2, n_2=0$ $|20\rangle$

APLICAÇÃO: OBTENÇÃO da fórmula para as matrizes de rotação

Na seção 3.5 vimos que a ação de um operador de rotação sobre um estado $|jm\rangle$ pode ser escrita como (veja eq. 117)

$$D(R)|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle \langle jm'| D(R) |jm\rangle \equiv \sum_{m'} |jm'\rangle d_{m'm}^{(j)}(R)$$

Usando a parametrização de Euler da $D(R)$ vimos ainda que

$$D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(m'\alpha + m\gamma)} \langle jm'| e^{\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}} |jm\rangle \equiv e^{-i(m'\alpha + m\gamma)} d_{m'm}^{(j)}(\beta)$$

Vamos usar o formalismo de Schwinger para calcular $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$ para qualquer valor de (j) .

Chamando $e^{-iJ_y\beta/\hbar} \equiv D(\beta)$ temos

$$\begin{aligned} D(\beta)|jm\rangle &= \frac{D(\beta) (a_1^+)^{j+m} (a_2^+)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} |0\rangle \\ &= \frac{[D(\beta) a_1^+ D^{-1}(\beta)]^{j+m} [D(\beta) a_2^+ D^{-1}(\beta)]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} D(\beta) |0\rangle \end{aligned}$$

onde inserimos $D(\beta) D^{-1}(\beta)$ em cada operador a_1^+ e a_2^+ .

Para calcular os termos entre colchetes usamos a fórmula 137

$$e^{iG\lambda} A e^{-iG\lambda} = A + i\lambda [G, A] + \frac{i^2 \lambda^2}{2!} [G, [G, A]] + \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} G \rightarrow -J_0/\hbar \\ \lambda \rightarrow \beta \\ A \rightarrow a_1^+ \text{ ou } a_2^+ \end{array} \right.$$

Os comutadores que precisamos calcular são

$$[-J_0/\hbar, a_1^+] = -\frac{1}{2i} [a_1^+ a_2 - a_2^+ a_1, a_1^+] = \frac{1}{2i} [a_2^+ a_1, a_1^+] = \frac{a_2^+}{2i}$$

$$[-J_0/\hbar, [-J_0/\hbar, a_1^+]] = -\frac{1}{2i} [a_1^+ a_2 - a_2^+ a_1, \frac{a_2^+}{2i}] = \frac{a_1^+}{4}$$

continuando o cálculo vemos que sempre dá algo proporcional a a_1^+ ou a_2^+ que podem ser coletados resultando em

$$D(\beta) a_1^+ D^{-1}(\beta) = a_1^+ \cos \beta/2 + a_2^+ \sin \beta/2$$

$$D(\beta) a_2^+ D^{-1}(\beta) = a_2^+ \cos \beta/2 - a_1^+ \sin \beta/2$$

Substituindo de volta e lembrando que $(x+y)^N = \sum_{k=0}^N \frac{N!}{k!(N-k)!} x^{N-k} y^k$

obtemos

$$\begin{aligned} D(\beta) |j, m\rangle &= \sum_{k, l=0}^j \frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m-k)! k! (j-m-l)! l!} \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \times \\ & [a_1^+ \cos \beta/2]^{j+m-k} [a_2^+ \sin \beta/2]^k [-a_1^+ \sin \beta/2]^{j-m-l} [a_2^+ \cos \beta/2]^l |0\rangle \\ &= \sum_{m'} |j, m'\rangle d_{m'm}^{(j)} = \sum_{m'} \frac{d_{m'm}^{(j)} (a_1^+)^{j+m'} (a_2^+)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} |0\rangle \end{aligned}$$

Como a_1^+ e a_2^+ comutam, basta igualar os coeficientes e identificar

$d_{m'm}^{(j)}$:

$$a_1^+ : \quad 2j - l - k = j + m' \rightarrow l = j - k - m'$$

$$a_2^+ : \quad k + l = j - m' \rightarrow \text{resumo } l \Rightarrow \text{consistente}$$

$$\begin{aligned} \cos p/2 : j+m-k+l &= 2j-2k+m-n' \\ \sin p/2 : j-m-l+k &= 2k-m+n' \\ (-1) : j-m-l &= k+m'-m \end{aligned}$$

Então

$$d_{m'm}^{(j)}(P) = \sum_k (-1)^{k-m'} \frac{\sqrt{(j+m)! (j-n)! (j+m')! (j-n')!}}{(j+m-k)! k! (k-m+m')! (j-k-n')!} \quad (\cos p/2)^{2j-2k+m-m'} (\sin p/2)^{2k-m+m'}$$

que é um resultado bastante impressionante! A soma sobre k vai até o último fatoriais negativo no denominador.

3.9 A desigualdade de Bell - Considere duas partículas

de spin 1/2 no estado singleto $j=0, m=0$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+-\rangle - |-+\rangle]$$

Suponha que essas partículas estejam se movendo em direções opostas e que dois observadores A e B possam realizar medidas de seus spins:



Quando A mede S_z o resultado pode ser $\pm \hbar/2$ com 50% probabilidade. No entanto, se A mede $+\hbar/2$ para a partícula 1, então o estado após a medida será $|+-\rangle$ e B terá que medir $-\hbar/2$ para a partícula 2. É como se a partícula 2 fosse informada do que aconteceu com a 1 instantaneamente. Esse "paradoxo", onde alguma informação parece estar ocorrendo entre $1 \rightarrow 2$ instantaneamente é conhecido como EPR (Einstein-Podolsky-Rosen).

No entanto, qual a surpresa? Se fossem duas bolas, AZUL e VERMELHA, A pode receber cada uma com 50% de chance mas pegada a VERMELHA, B só pode pegar a AZUL! Parece óbvio.

No entanto o problema NÃO é tão simples, pois podemos escolher medir S_x . É como se cada bola fosse AZUL (VERMELHA e verde / Amarela ao mesmo tempo.

VAMOS então replicar o experimento:

- A pode medir S_x ou S_z
- B pode medir S_x apenas

USANDO $|z, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|x+\rangle \pm |x-\rangle]$ podemos escrever

$$|00\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(|x+\rangle + |x-\rangle) \otimes (|x+\rangle - |x-\rangle) - (|x+\rangle - |x-\rangle) \otimes (|x+\rangle + |x-\rangle) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [-|x+, x-\rangle + |x-, x+\rangle]$$

onde $|x e_1, x e_2\rangle \equiv [\text{partícula 1 em } |x e_1\rangle] \otimes [\text{partícula 2 em } |x e_2\rangle]$

Considere as 3 situações seguintes:

- 1) Se A med S_z com $+\hbar/2$, estado = $|+\rangle = |+\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [|x+\rangle - |x-\rangle]$
e B tem 50% de medir $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$ p/ $S_x \rightarrow$ sem correlação
- 2) Se A med S_x e B med S_x a correlação é de 100%: os resultados são $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$ ou $-\hbar/2$ e $+\hbar/2$
- 3) Se A NÃO faz medida alguma, B pode medir $\pm\hbar/2$ para S_x com 50% de chances.

O resultado da medida de B depende do que é medido por A, mesmo que A e B estejam vários ANOS-luz de distância.

Isso é às vezes chamado de NÃO-localidade da Mec. Quântica, pois estados SÃO correlacionados mesmo muito longe uns dos outros.

Isso é muito estranho e pode sugerir que a teoria quântica é incompleta. Considere a seguinte teoria alternativa:

- | S_x e S_z NÃO podem ser medidos simultaneamente. No
- | entanto, em um grande conjunto de partículas de spin $\hbar/2$,
- | digamos que uma fração delas tem a seguinte propriedade:
- | - se S_z for medido o resultado é $+\hbar/2$ com certeza
- | - se S_x for medido " " " " $-\hbar/2$ com certeza
- | Essa partícula será considerada $(\hat{z}+, \hat{x}-)$. Ela tem duas
- | componentes de spin dados, mas só um pode ser medido de
- | cada vez.

Essa descrição vai concordar com a Mec. Quântica se medirmos S_z e depois S_x em um ensemble de partículas $|+\rangle$ (Mec Quântica) ou em um ensemble com 50% de partículas $(\hat{z}+, \hat{x}+)$ e 50% $(\hat{z}+, \hat{x}-)$ (Teoria Alternativa).

J. S. Bell mostrou em 1964 que podia-se verificar experimentalmente qual das teorias é realmente correta. Vamos ver como.

Se tomarmos um par de partículas no estado singleto, spin total zero, então elas tem que ser pareadas da seguinte forma:

<u>partícula 1</u>		<u>partícula 2</u>	<u>classe</u>
$(\hat{z}+, \hat{x}-)$	\longleftrightarrow	$(\hat{z}-, \hat{x}+)$	(a)
$(\hat{z}+, \hat{x}+)$	\longleftrightarrow	$(\hat{z}-, \hat{x}-)$	(b)
$(\hat{z}-, \hat{x}+)$	\longleftrightarrow	$(\hat{z}+, \hat{x}-)$	(c)
$(\hat{z}-, \hat{x}-)$	\longleftrightarrow	$(\hat{z}+, \hat{x}+)$	(d)

e cada classe deve constituir 25% da população de partículas. O ensemble é um ensemble de pares de partículas.

Veja que se A mede S_z da partícula 1 em um par da classe (a), então ele obterá $\pm \hbar/2$ com certeza. Além disso, o estado da partícula 2 não é afetado: continua sendo $|\hat{e}^-, \hat{n}^+\rangle$. Como distinguir essas classes do estado quântico único $|00\rangle$?

Para isso temos que introduzir um terceiro direç! Sejam então $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ três vetores quaisquer, não necessariamente ortogonais. Temos agora 8 classes diferentes no ensemble; cada uma com uma certa população:

POPULAÇÃO	partícula 1	partícula 2
N_1	$(\hat{a}^+, \hat{b}^+, \hat{c}^+)$	$(\hat{a}^-, \hat{b}^-, \hat{c}^-)$
N_2	$(\hat{a}^+, \hat{b}^+, \hat{c}^-)$	$(\hat{a}^-, \hat{b}^-, \hat{c}^+)$
N_3	$(\hat{a}^+, \hat{b}^-, \hat{c}^+)$	$(\hat{a}^-, \hat{b}^+, \hat{c}^-)$
N_4	$(\hat{a}^+, \hat{b}^-, \hat{c}^-)$	$(\hat{a}^-, \hat{b}^+, \hat{c}^+)$
N_5	$(\hat{a}^-, \hat{b}^+, \hat{c}^+)$	$(\hat{a}^+, \hat{b}^-, \hat{c}^-)$
N_6	$(\hat{a}^-, \hat{b}^+, \hat{c}^-)$	$(\hat{a}^+, \hat{b}^-, \hat{c}^+)$
N_7	$(\hat{a}^-, \hat{b}^-, \hat{c}^+)$	$(\hat{a}^+, \hat{b}^+, \hat{c}^-)$
N_8	$(\hat{a}^-, \hat{b}^-, \hat{c}^-)$	$(\hat{a}^+, \hat{b}^+, \hat{c}^+)$

Suponha que A meça $\vec{S} \cdot \vec{a}$ com resultados $\pm \hbar/2$ e B meça $\vec{S} \cdot \vec{b}$ com $\pm \hbar/2$. Isso é possível para as classes 3 e 4 APENAS se A

probabilidade de isso ocorrer é

$$P(\hat{a}^+, \hat{b}^+) = \frac{N_3 + N_4}{N} \quad ; \quad N \equiv \sum_{i=1}^8 N_i$$

\uparrow \uparrow
 partícula 1 partícula 2

Da mesma forma:

$$P(\hat{a}^+, \hat{c}^+) = \frac{N_2 + N_4}{N} \quad ; \quad P(\hat{c}^+, \hat{b}^+) = \frac{N_3 + N_7}{N}$$

Como os N_i são positivos em núlos, $N_2 + N_7 \gg 0$, ou 142

$$N_3 + N_4 \leq \frac{[N_3 + N_4] + [N_2 + N_7]}{(N_2 + N_4) + (N_3 + N_7)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\hat{a}_+, \hat{b}_+) \leq P(\hat{a}_+, \hat{c}_+) + P(\hat{c}_+, \hat{b}_+)} = \text{DESIGUALDADE DE BELL}$$

VAMOS MOSTRAR AGORA QUE ESSA DESIGUALDADE PODE SER VIOLADA!

De acordo com a teoria quântica temos um ensemble puro: todas as partículas estão no estado singleto $|00\rangle$. Então, se a med $S_a = \vec{S} \cdot \hat{a}$ e obtém $+h/2$ (prob = 1/2) então a partícula 2 está com certeza em $|\hat{a}^-\rangle$. Qual a probabilidade de medirmos $S_b = \vec{S} \cdot \hat{b}$ e obtermos $+h/2$?

Lembra que se $\hat{a} = \hat{z}$ então

$$\begin{aligned} |\hat{n}^+\rangle &= \cos\alpha/2 e^{-i\phi/2} |+\rangle + \sin\alpha/2 e^{+i\phi/2} |-\rangle \\ |\hat{n}^-\rangle &= -\sin\alpha/2 e^{-i\phi/2} |+\rangle + \cos\alpha/2 e^{+i\phi/2} |-\rangle \end{aligned}$$

onde $\hat{n} = (\sin\alpha\cos\phi, \sin\alpha\sin\phi, \cos\alpha)$. Tomando $\alpha=0$ e $\beta = \hat{\alpha}$ ângulo entre \hat{z} e \hat{n} , se estamos em $|\hat{z}^-\rangle$, a prob. de obter $|\hat{n}^+\rangle$ é $\sin^2\beta/2$. Como a direção \hat{z} é arbitrária, basta tomar $\hat{a} = \hat{z}$, $\theta_{ab} = \beta = \hat{\alpha}$ ângulo entre \hat{a} e \hat{b} . Temos

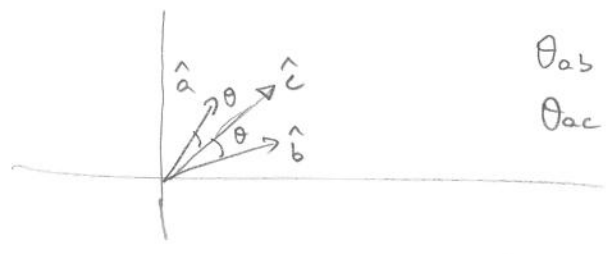
$$P(\hat{a}_+, \hat{b}_+) = \frac{1}{2} \times \sin^2\theta_{ab}/2$$

O mesmo vale para os outros termos de Bell. Obtemos

$$\sin^2\theta_{ab}/2 \leq \sin^2\frac{\theta_{ac}}{2} + \sin^2\theta_{cb}/2$$

O que não pode valer sempre!

Exemplo

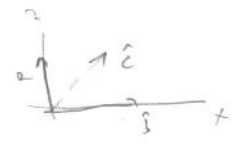


$$\theta_{ab} = 2\theta$$

$$\theta_{ac} = \theta_{bc} = \theta$$

então $\sin^2 \theta \leq 2 \sin^2 \theta/2$

Se $\theta = \pi/4 \rightarrow 0.5 \leq 0.293 \Rightarrow$ violada



As teorias locais alternativas NÃO podem ser corretas! Essas violações foram medidas experimentalmente e todas as previsões quânticas foram, até agora, verificadas.

3.10 Operadores Tensoriais e o Teorema de Wigner-Eckart

Na teoria clássica as componentes de um vetor sujeito a uma rotação se transformam de acordo com

$$V_i \rightarrow \sum_j R_{ij} V_j$$

Na mecânica quântica vamos definir um operador vetorial de tal forma que essa mesma relação valha para os valores médios de V_i :

Se $|\alpha\rangle \rightarrow D(R)|\alpha\rangle$ então

$$\langle \alpha | V_i | \alpha \rangle \rightarrow \langle \alpha | D^\dagger(R) V_i D(R) | \alpha \rangle = \sum_j R_{ij} \langle \alpha | V_j | \alpha \rangle$$

ou seja,

$$D^\dagger(R) V_i D(R) = \sum_j R_{ij} V_j$$

onde R_{ij} é a matriz de rotação correspondente a $D(R)$.

Vamos então tomar uma rotação infinitesimal na direção z:

$$D(R) = 1 - \frac{i\epsilon J_z}{\hbar}$$

$$R(\hat{z}, \epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então:

$$\left(1 + \frac{i\epsilon J_z}{\hbar}\right) V_i \left(1 - \frac{i\epsilon J_z}{\hbar}\right) = R_{ij} V_j \quad \text{ou}$$

$$V_i + \frac{i\epsilon}{\hbar} [J_z, V_i] = R_{ij} V_j \quad ;$$

$i=1$	$V_x + \frac{i\epsilon}{\hbar} [J_z, V_x] = V_x - \epsilon V_y$	$[V_x, J_z] = -i\hbar V_y$
$i=2$	$V_y + \frac{i\epsilon}{\hbar} [J_z, V_y] = \epsilon V_x + V_y$	$[V_y, J_z] = i\hbar V_x$
$i=3$	$V_z + \frac{i\epsilon}{\hbar} [J_z, V_z] = V_z$	$[V_z, J_z] = 0$

Fazendo rotações infinitesimais nas direções x e y vamos que

$$\boxed{[V_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} V_k}$$

Um tripla de operadores V_x, V_y, V_z satisfazendo essas relações sendo definidos como operadores vetoriais.

Exemplos

(1) J_x, J_y, J_z

(2) x, y, z

(3) p_x, p_y, p_z

Veja que essa definição de operador vetorial por meio de comutadores é totalmente equivalente à definição em termos de operadores de rotação.

Vamos mostrar isso explicitamente com rotações na direção z . Nesse caso

$$\mathcal{D}^\dagger(R_z) \vec{V} \mathcal{D}(R_z) = R_z \vec{V} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}^\dagger(R_z) V_x \mathcal{D}(R_z) = V_x \cos\varphi - V_y \sin\varphi$$

$$\mathcal{D}^\dagger(R_z) V_y \mathcal{D}(R_z) = V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi$$

$$\mathcal{D}^\dagger(R_z) V_z \mathcal{D}(R_z) = V_z$$

Por outro lado, podemos calcular diretamente o lado direito dessas expressões assumindo $[V_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} V_k$. Por exemplo, para $i=x, j=z$:

$$\begin{aligned} e^{iJ_3\varphi/\hbar} V_x e^{-iJ_3\varphi/\hbar} &= \left(1 + \frac{i\varphi}{\hbar} J_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{i\varphi}{\hbar}\right)^2 J_3^2 + \dots\right) V_x \left(1 - \frac{i\varphi}{\hbar} J_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{i\varphi}{\hbar}\right)^2 J_3^2 + \dots\right) \\ &= V_x + \frac{i\varphi}{\hbar} [J_3, V_x] - \frac{\varphi^2}{2\hbar^2} [J_3, [J_3, V_x]] - \frac{i\varphi^3}{3!\hbar^3} [J_3, [J_3, [J_3, V_x]]] + \dots \\ &= V_x - \varphi V_y - \frac{\varphi^2}{2\hbar^2} V_x + \frac{\varphi^3}{3!\hbar^3} V_y + \dots \\ &= V_x \cos\varphi - V_y \sin\varphi \end{aligned}$$

O teorema de Wigner-Eckart para operadores vetoriais

diz que

$$\langle \alpha, j, m | V_i | \alpha, j, m' \rangle = c(\alpha, j) \langle \alpha, j, m | J_i | \alpha, j, m' \rangle,$$

i. e., dentro do sub-espaço onde α e j são fixos, $\mathcal{E}(\alpha, j)$,

\vec{V} é proporcional a \vec{J} .

A prova dessa relação está no Cohen-Tannoudji, D_x,

onde mostra-se ainda que

$$c(\alpha, j) = \frac{\langle \vec{J} \cdot \vec{V} \rangle_{\alpha, j}}{j(j+1)\hbar^2}$$

com $\langle \vec{J} \cdot \vec{V} \rangle$ o valor médio de $\vec{J} \cdot \vec{V}$ em qualquer estado

do sub-espaço $\mathcal{E}(\alpha, j)$. Essa versão é também conhecida como Teorema da Projeção.

Vamos aqui mostrar algo equivalente para operadores tensoriais.

No caso $k=1$ o tensor esferico está diretamente associado com um operador vetorial. Esquecendo a constante $\sqrt{3/4\pi}$ temos

$$\begin{aligned}
T_0^{(1)} &= V_z & V_x &= -\frac{(T_1^{(1)} - T_{-1}^{(1)})}{\sqrt{2}} \\
T_1^{(1)} &= -\frac{(V_x + iV_y)}{\sqrt{2}} & \rightarrow & V_y &= -\frac{(T_1^{(1)} + T_{-1}^{(1)})}{i\sqrt{2}} \\
T_{-1}^{(1)} &= \frac{(V_x - iV_y)}{\sqrt{2}} & V_z &= T_0^{(1)}
\end{aligned}$$

Aplicando a lei de transformação $\mathcal{D}^+ V_i \mathcal{D} = R_{ij} V_j$, para $R=R_z$, obtém

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_z^+ T_1^{(1)} \mathcal{D}_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{D}_z^+ (V_x + iV_y) \mathcal{D}_z = \frac{1}{\sqrt{2}} [V_x \cos\varphi - V_y \sin\varphi + iV_x \sin\varphi + iV_y \cos\varphi] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x e^{i\varphi} + iV_y e^{i\varphi}) = e^{i\varphi} T_1^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_z^+ T_{-1}^{(1)} \mathcal{D}_z = e^{-i\varphi} T_{-1}^{(1)}$$

$$\mathcal{D}_z^+ T_0^{(1)} \mathcal{D}_z = T_0^{(1)}$$

Essas relações assumem a forma simples (trocar $\varphi \rightarrow -\varphi$)

$$\mathcal{D}_z T_q^{(1)} \mathcal{D}_z^+ = e^{-i\varphi q} T_q^{(1)} = \sum_{q'=-1}^1 \mathcal{D}_{q'q}^{(1)} T_{q'}^{(1)}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{q'q}^{(1)} &= \langle 1q' | \mathcal{D}_z | 1q \rangle = \langle 1q' | e^{-iJ_z \varphi / \hbar} | 1q \rangle \\
&= e^{-i\varphi q} \delta_{qq'}
\end{aligned}$$

A definição de operadores tensoriais é um pouco mais complicada.

Embora um tensor de ordem 2 seja muitas vezes representado por uma matriz com 9 componentes, ela pode ser decomposta assim:

$$A_{ij} = \frac{\text{tr}(A)}{3} \delta_{ij} + \frac{A_{ij} - A_{ji}}{2} + \left(\frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} - \frac{\text{tr}(A)}{3} \delta_{ij} \right)$$

\uparrow escalar (1 componente)
 \uparrow matriz anti-simétrica \approx vetor (3 componentes)
 \uparrow matriz simétrica com traço nulo (5 componentes)

\leftarrow $= 1 + 3 + 5 = 9$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}$ | $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ em \vec{e}_i | $\vec{J} = \vec{w} \times \vec{J}$

Só a última parte de fato se transforma como um tensor de ordem 2. O número de "componentes irreduzíveis" de um tensor cartesiano de ordem k é sempre $2k+1$. *

TENSORES ESFÉRICOS de ordem k

com $2k+1$ componentes são definidos da seguinte forma: escrevemos $Y_{lm} \equiv T_q^{(k)}$ com $k=l$, $q=m$ e onde aparece

$$n_z = \frac{z}{r} \rightarrow V_z$$

$$n_y = \frac{y}{r} \rightarrow V_y$$

$$n_x = \frac{x}{r} \rightarrow V_x$$

$k=1$

$$T_0^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \rightarrow \sqrt{\frac{3}{4\pi}} V_z$$

$$T_{\pm 1}^{(1)} = \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x \pm iy}{\sqrt{2} r} \rightarrow \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{V_x \pm i V_y}{\sqrt{2}}$$

Os $T_q^{(k)}$ assim definidos comportam-se com momentos angulares e vamos generalizar suas propriedades para definir tensores genéricos.

* Na Mec. Quântica isso faz muito sentido. J é o gerador de rotações e os sub-espaços irreduzíveis de J tem dimensão $2l+1$, e NÃO k^2 .

Vamos então definir um operador tensorial de ordem k como um conjunto de $2k+1$ operadores que se transformam como

$$\mathcal{D}(R) T_q^{(k)} \mathcal{D}^\dagger(R) = \sum_{q'=-k}^k \mathcal{D}_{q'q}^{(k)} T_{q'}^{(k)}$$

onde

$$\mathcal{D}(R) = e^{-i \frac{\vec{J} \cdot \vec{n}}{\hbar} \varphi}$$

$$\mathcal{D}_{qq'}^{(k)} = \langle kq' | \mathcal{D}(R) | kq \rangle$$

Essa regra pode ser re-escrita em termos de relações de comutação, análogas ao caso dos operadores vetoriais. Tomando

$$\mathcal{D}(R) = 1 - i \frac{\vec{J} \cdot \hat{n} \varepsilon}{\hbar}$$

e usando $\hat{n} = \hat{z}$ vemos

$$\left(1 - i \frac{J_3 \varepsilon}{\hbar}\right) T_q^{(k)} \left(1 + i \frac{J_3 \varepsilon}{\hbar}\right) = \sum_{q'} \left[\delta_{qq'} - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \langle kq' | J_3 | kq \rangle \right] T_{q'}^{(k)}$$

$$T_q^{(k)} - \frac{i\varepsilon}{\hbar} [J_3, T_q^{(k)}] = T_q^{(k)} - i\varepsilon q T_q^{(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} [J_3, T_q^{(k)}] &= \hbar q T_q^{(k)} \\ [J_\pm, T_q^{(k)}] &= \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} T_{q \pm 1}^{(k)} \end{aligned}}$$

A última expressão é obtida usando $\hat{n} = \hat{x} \pm i\hat{y}$ e fica como exercício.

Exercício: Mostre que a definição acima e as relações entre $T_q^{(1)}$ e V_i levam as relações de comutação corretas para V_i ,
 $[V_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} V_k$.

SOLUÇÃO: Para $j=2$, $[J_3, T_q^{(1)}] = \hbar q T_q^{(1)}$:

$$[J_3, V_3] = [J_3, T_0^{(1)}] = 0$$

$$[J_3, V_x] = \frac{1}{\sqrt{2}} [J_3, T_1^{(1)}] + \frac{1}{\sqrt{2}} [J_3, T_{-1}^{(1)}] = \frac{-\hbar T_1^{(1)}}{\sqrt{2}} - \frac{\hbar T_{-1}^{(1)}}{\sqrt{2}} = i\hbar V_y$$

$$[J_3, V_y] = \frac{i}{\sqrt{2}} [J_3, T_1^{(1)}] + \frac{i}{\sqrt{2}} [J_3, T_{-1}^{(1)}] = \frac{i\hbar T_1^{(1)}}{\sqrt{2}} - \frac{i\hbar T_{-1}^{(1)}}{\sqrt{2}} = -i\hbar V_x$$

Regra de Seleção - m

$$\langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle = 0$$

A menos que $m' = q + m$.

$$\langle \alpha' j' m' | [J_3, T_q^{(k)}] - \hbar q T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle = 0$$

$$\hbar m' \langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle - \hbar m \langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle - \hbar q \langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle = 0$$

$$\hbar (m' - m - q) \langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle = 0$$

TEOREMA DE WIGNER - ECKART

$$\langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle = \underbrace{\langle j k, m q | j k, j' m' \rangle}_{\substack{\text{Clebsch - Gordan} \\ \text{da soma de} \\ (j, m) + (k, q) \rightarrow (j', m')}} \frac{\langle \alpha' j' || T_q^{(k)} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

independente de m, m', q
basta calcular $q=0$

$= 0$ A NÃO SER QUE $m+q = m'$
 $|j-k| \leq j' \leq j+k$

PROVA - Usando a 2ª relação de comutação da pag. 145 temos

$$\langle \alpha' j' m' | [J_{\pm}, T_q^{(k)}] | \alpha j m \rangle = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle \alpha' j' m' | T_{q \pm 1}^{(k)} | \alpha j m \rangle$$

Aplicando J_{\pm} temos

$$\sqrt{(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)} \langle \alpha' j' m' \pm 1 | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle \alpha' j' m | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle + \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle \alpha' j' m | T_{q \pm 1}^{(k)} | \alpha j m \rangle$$

FAZENDO

$$\begin{aligned} j' &\rightarrow j & m' &\rightarrow -m \\ j &\rightarrow j_1 & m &\rightarrow -m_1 \\ k &\rightarrow j_2 & q &\rightarrow -m_2 \end{aligned}$$

= relação de recorrência NA PAG. 132a :

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle \alpha' j' m' \pm 1 | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle \begin{matrix} j' \rightarrow j \\ m' \rightarrow m \\ \text{etc} \end{matrix} =$$

$$\sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)} \langle \alpha' j_1 m_1 | T_q^{(k)} | \alpha j m \pm 1 \rangle \begin{matrix} j_1 \rightarrow j \\ \text{etc} \end{matrix} +$$

$$\sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)} \langle \alpha' j_2 m_2 | T_{q \pm 1}^{(k)} | \alpha j m \rangle \begin{matrix} j_2 \rightarrow j \\ \text{etc} \end{matrix}$$

Como essas relações são homogêneas, do tipo $\sum a_{ij} x_j = 0$ e $\sum a_{ij} y_j = 0$ as soluções devem ser proporcionais e a constante de proporcionalidade não pode envolver os m, m' e q , senão os coeficientes mudam. Assim, tomando o 1º termo

$$\begin{aligned} \langle \alpha' j' m' \pm 1 | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle &\sim \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, j_2, j m \pm 1 \rangle \\ &= \langle j_1, m_1 - q, j_2, m_2 | j, j_2, j' - (m' \pm 1) \rangle \\ &= \langle j_1, m_1 - q, j_2, m_2 | j, j_2, j' m' \pm 1 \rangle \quad \text{de} \end{aligned}$$

$$\langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle = \langle j_1, m_1 - q, j_2, m_2 | j, j_2, j' m' \rangle \times \left[\text{função independente de } m, m', q \right]$$

Exemplo 1 - Para um tensor de grau 0, um escalar $T_0^{(0)} = S$

$$\langle \alpha' j' m' | S | \alpha j m \rangle = \underbrace{\langle j_0, m_0 | j_0, j' m' \rangle}_{\delta_{j'j} \delta_{m'm}} \times \frac{\langle \alpha' j' || S || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

Pois somam $(j, m) + (0, 0) = (j', m') = (j, m)$

Exemplo 2 - Para um tensor de grau 1, vetor \vec{V} com

Componentes $V_0 = V_z, V_1 = -(V_x + iV_y)/\sqrt{2}, V_2 = (V_x - iV_y)/\sqrt{2}$

Operadores $(j, m) + (1, q) \rightarrow (j', m') \Rightarrow j' = j+1, j, |j-1|$

$m+q = m' \rightarrow \Delta m = m' - m = q$

$\Delta j = j' - j = \pm 1$ ou 0 se $j \gg 1$

se $j=0 \quad j'=1 \Rightarrow \Delta j = 1$
 $m=0 \quad m'=q$

O significado do resultado de Wigner-Eckart é que, no subespaço onde $(\alpha' j')$ e (αj) são fixos, os elementos de matriz de $T_q^{(k)}$ são sempre proporcionais ao coeficiente de Clebsch-Gordan $\langle j' k' m' | j k m \rangle$, independente do operador. Toda a informação a cerca de qual operador estamos trabalhando fica na constante que multiplica esse matrix fixo.

No caso $k=1$, i.e., para tensores de 1ª ordem = vetores essa constante pode ser obtida em função de $T_q^{(1)}$. Veja Cohen-Tannoudji, complemento Dx.

Como exemplo, suponha que seja possível calcular $\langle \alpha' j' 0 | T_0^{(k)} | \alpha j 0 \rangle$.

Então
$$\langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle = \frac{\langle j' k' m' | j k m \rangle}{\langle j' k' 0 0 | j k 0 \rangle} \langle \alpha' j' 0 | T_0^{(k)} | \alpha j 0 \rangle$$

(a)

$k=1$

$T_0^{(1)} = V_z$

$T_{\pm}^{(1)} = \mp \left(\frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}} \right)$

$\vec{V} = \vec{r} ; \vec{V} = \vec{p} , \vec{V} = \vec{L} , \text{ etc.}$

(b) $k=2$

$Y_{lm} \rightarrow T_{(a)}^{(k)}$

$k=l$
 $q=m$

$\frac{z}{r} = V_z ; \frac{y}{r} = V_y , \frac{x}{r} = V_x$

$Y_{2,\pm 2} \sim \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi} \sim \frac{(x \pm iy)^2}{r^2} \rightarrow T_{\pm 2}^{(2)} = (V_x \pm iV_y)^2$

$Y_{2,\pm 1} \sim \mp \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\varphi} = \mp \sin\theta \cos\theta \cos\varphi - i \sin\theta \cos\theta \sin\varphi$
 $= \mp \frac{xz}{r^2} - \frac{iyz}{r^2} \rightarrow T_{\pm 1}^{(2)} = V_z (-iV_y \mp V_x)$

$Y_{20} \sim 3\cos^2\theta - 1 = 3\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1 \rightarrow T_0^{(2)} = 3V_z^2 - 1$

(c) Se $X_{q_1}^{(k_1)}$ e $Z_{q_2}^{(k_2)}$ são tensores de ordem k_1 e k_2 , então

$T_q^{(k)} = \sum_{q_1, q_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, k_1, k_2, q \rangle X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)}$

é um tensor de ordem k .

Tomando $k_1 = k_2 = 1$ podemos construir tensores de ordem 2, $1 \leq 0$.

Para isso precisamos dos Coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$\begin{aligned}
 |22\rangle &= |11\rangle \\
 |21\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|10\rangle + |01\rangle] \\
 |20\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} [|1-1\rangle + |11\rangle + 2|00\rangle] \\
 |2-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|-10\rangle + |0-1\rangle] \\
 |2-2\rangle &= |-1-1\rangle \\
 |11\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|10\rangle - |01\rangle] \\
 |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1-1\rangle - |11\rangle] \\
 |1-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|-10\rangle + |0-1\rangle] \\
 |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} [|-11\rangle + |1-1\rangle - |00\rangle]
 \end{aligned}$$

↑
BASE NOVA
 $k = k_1 + k_2$

↑
BASE PRODUTO ORIGINAL
 $|k_1 m_1\rangle \otimes |k_2 m_2\rangle \equiv |m_1 m_2\rangle$

$|k_1 k_2 k m\rangle \equiv |km\rangle$

Enkf tenso:

$$T_0^{(2)} = \sum_{q_1+q_2=0} \langle q_1 q_2 | 00 \rangle X_{q_1}^{(1)} Z_{q_2}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} [X_{-1}^{(1)} Z_1^{(1)} + X_1^{(1)} Z_{-1}^{(1)} - X_0^{(1)} Z_0^{(1)}]$$

$$T_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [X_1^{(1)} Z_0^{(1)} - X_0^{(1)} Z_1^{(1)}]; \quad T_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [X_1^{(1)} Z_{-1}^{(1)} - X_{-1}^{(1)} Z_1^{(1)}]; \quad T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-X_{-1}^{(1)} Z_0^{(1)} + X_0^{(1)} Z_{-1}^{(1)}]$$

$$T_2^{(2)} = X_1^{(1)} Z_1^{(1)} ; \quad T_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [X_1^{(1)} Z_0^{(1)} + X_0^{(1)} Z_1^{(1)}]; \quad T_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} [X_1^{(1)} Z_{-1}^{(1)} + X_{-1}^{(1)} Z_1^{(1)} + 2X_0^{(1)} Z_0^{(1)}]$$

$$T_{-2}^{(2)} = X_{-1}^{(1)} Z_{-1}^{(1)} ; \quad T_{-1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [X_{-1}^{(1)} Z_0^{(1)} + X_0^{(1)} Z_{-1}^{(1)}] ;$$

Como um exemplo explicito tomamos $X=Z=r$, i.e.,

$$X_1^{(1)} = Z_1^{(1)} = r_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)$$

$$X_{-1}^{(1)} = Z_{-1}^{(1)} = r_- = \frac{x-iy}{\sqrt{2}}$$

$$X_0^{(1)} = Z_0^{(1)} = z$$

$$U_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2r_+r_- - z^2) = -r^2/\sqrt{3}$$

$$U_4^{(1)} = 0$$

$$U_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}[2r_+r_- + 2z^2] = \frac{1}{\sqrt{6}}[-x^2-y^2+2z^2] = -\frac{1}{\sqrt{6}}(r^2-3z^2)$$

$$U_2^{(2)} = r_+^2 = \frac{1}{2}(x^2-y^2) + ixy \rightarrow U_2^{(2)} + U_{-2}^{(2)} = x^2-y^2$$

$$U_{-2}^{(2)} = r_-^2 = \frac{1}{2}(x^2-y^2) - ixy$$

$$U_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[2r_+z] = -3(x+iy) ; U_{-1}^{(2)} = 3(x-iy)$$

Compare com pag. 150 p/ Y_{2q}

O operador $Q = 3z^2 - r^2$ e conhecido como operador quadrupolo. O problema 28 b do SAKURAI ad que calculamos

$$A \equiv \langle \alpha j m' | x^2 - y^2 | \alpha j j \rangle \text{ em termos de}$$

$$\langle Q \rangle = \langle \alpha j j | 3z^2 - r^2 | \alpha j j \rangle .$$

Para isso usamos

$$A = \langle \alpha j m' | U_2^{(2)} - U_{-2}^{(2)} | \alpha j j \rangle = \langle jzjz || jzjm' \rangle \langle \alpha j || U^{(2)} || \alpha j \rangle - \langle jzj-2 || jzjm' \rangle \langle \alpha j || U^{(2)} || \alpha j \rangle$$

$$\langle Q \rangle = \sqrt{6} \langle \alpha j j | U_0^{(2)} | \alpha j j \rangle = \langle jzj0 || jzjj \rangle \langle \alpha j || U^{(2)} || \alpha j \rangle$$

$$A = \frac{\langle 0 \rangle}{\langle j_2 j_0 | j_2 j_j \rangle} \left[\langle j_2 j_2 | j_2 j_m \rangle - \langle j_2 j_{-2} | j_2 j_m \rangle \right]$$

Outro exemplo : Seja $K_1 = K_2 = 1/2$. En \mathbb{D}

$$|11\rangle = |++\rangle$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+-\rangle + |-+\rangle]$$

$$|1-1\rangle = |--\rangle$$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+-\rangle - |-+\rangle]$$

$$U_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [S_{1+} S_{2-} - S_{1-} S_{2+}]$$

$$U_1^{(1)} = S_{1+} S_{2+} ; U_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [S_{1+} S_{2-} - S_{1-} S_{2+}] ; U_{-1}^{(1)} = S_{1-} S_{2-}$$

Outro exemplo ainda Seja $X \rightarrow r$, $Z \rightarrow \mathcal{J}$

$$|3/2, 3/2\rangle = |11+\rangle$$

$$|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |10+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |11-\rangle$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |10-\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1-1+\rangle$$

$$|3/2, -3/2\rangle = |1-1-\rangle$$

$$|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |10+\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |11-\rangle$$

$$|1/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1-1+\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |10-\rangle$$

$$T_{1/2}^{(1/2)} = \sqrt{\frac{1}{3}} \mathcal{J} S_+ - \sqrt{\frac{2}{3}} r_+ S_-$$

$$T_{-1/2}^{(1/2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} r_+ S_+ - \sqrt{\frac{1}{3}} \mathcal{J} S_-$$

$$T_{3/2}^{(3/2)} = r_+ S_+ ; T_{1/2}^{(3/2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{J} S_+ + \sqrt{\frac{1}{3}} r_+ S_-$$

$$T_{-3/2}^{(3/2)} = r_- S_- ; T_{-1/2}^{(3/2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{J} S_- + \sqrt{\frac{1}{3}} r_- S_+$$

VAMOS agora tomar $X \rightarrow \mathbb{R}$; $Z \rightarrow \mathbb{P}$

$$T_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} [r_+ p_+ + r_+ p_- - 3 p_3] = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-\frac{1}{2} (x-iy)(p_x + ip_y) - \frac{1}{2} (x+iy)(p_x - ip_y) - 3 p_3 \right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} [-x p_x - y p_y - 3 p_3] = -\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbb{1} r \cdot \mathbb{P}$$

$$T_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [r_+ p_3 - 3 p_+] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{-(x+iy)}{\sqrt{2}} p_3 + 3 \frac{(p_x + ip_y)}{\sqrt{2}} \right] = \frac{1}{2} [-i L_x + L_y] = -\frac{i}{2} L_+$$

$$T_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [r_+ p_- - r_- p_+] = \frac{-1}{2\sqrt{2}} [(x+iy)(p_x - ip_y) - (x-iy)(p_x + ip_y)] = \frac{-i}{\sqrt{2}} (y p_x - x p_y) = \frac{i L_z}{\sqrt{2}}$$

$$T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [r_- p_3 - 3 p_-] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(x-iy)}{\sqrt{2}} p_3 - 3 \frac{(p_x - ip_y)}{\sqrt{2}} \right] = \frac{1}{2} [-i L_x - L_y] = -\frac{i}{2} L_-$$

Note que com dois vetores construímos:

1 tensor de ordem 2 + 1 tensor de ordem 1 + 1 escalar
 \downarrow
 5 + 3 + 1 = 9

que é o número de componentes da dada $X_i Z_j$, já fatorado em sua componentes irreduzíveis. Veja a página 145.

Vamos agora demonstrar o teorema da projeção enunciado na página 1445 para operadores vetoriais. Para $k=1$ e $\alpha'=\alpha, j'=j$, temos

$$\langle \alpha j m' | V | \alpha j m \rangle = \langle j 1, m q | j 1 j m' \rangle C_V(\alpha, j)$$

onde $C_V(\alpha, j)$ depende do operador V , de α e j , mas NÃO de m, m', q .

Para $V = J$ temos também

$$\langle \alpha j m' | J | \alpha j m \rangle = \langle j 1, m q | j 1 j m' \rangle C_J(\alpha, j).$$

Dividindo uma relação pela outra encontramos

$$\langle \alpha j m' | V | \alpha j m \rangle = \frac{\langle \alpha j m' | J | \alpha j m \rangle C_V(\alpha, j)}{C_J(\alpha, j)}$$

o que mostra que, no sub-espaço $E(\alpha, j)$, onde α e j são fixos, V é proporcional a J . Como $C_J(\alpha, j)$ não pode depender de m , esse coeficiente só é função de α e j e podemos re-escrever

$$\langle \alpha j m' | V | \alpha j m \rangle = D_V(\alpha, j) \langle \alpha j m' | J | \alpha j m \rangle.$$

Podemos agora re-escrever essa relação de proporcionalidade dentro de $E(\alpha, j)$ usando o projetor $P(\alpha, j)$, que projeta qualquer estado nesse sub-espaço:

$$P(\alpha, j) \sum_{\alpha', j', m'} e_{\alpha' j' m'} | \alpha' j' m' \rangle \equiv \sum_{m'} e_{\alpha j m'} | \alpha j m' \rangle : \\ P = \sum_m | \alpha j m \rangle \langle \alpha j m |$$

$$P V P = D_V(\alpha, j) P J P$$

É claro que $[P, J] = 0$, pois J só altera m , NÃO α ou j .

Tomemos agora $V \cdot J$ no lugar de V :

15

$$P J \cdot V P = J \cdot (P V P) = D_V(\alpha, j) J \cdot P J P = D_V(\alpha, j) P J^2 P$$

então,

$$\begin{aligned} \langle \alpha_j m' | J \cdot V | \alpha_j m \rangle &= D_V(\alpha, j) \langle \alpha_j m' | J^2 | \alpha_j m \rangle \\ &= D_V(\alpha, j) \hbar^2 j(j+1) \delta_{mm'} \end{aligned}$$

e portanto

$$D_V(\alpha, j) = \frac{\langle \alpha_j m | J \cdot V | \alpha_j m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)}$$

o que demonstra o teorema.

1) Seja $D^{(j)}(R) = D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$

$$\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | D^{(j)}(R) | j_1, j_2, m'_1, m'_2 \rangle = \langle j_1, m_1 | D^{(j_1)} | j_1, m'_1 \rangle \langle j_2, m_2 | D^{(j_2)} | j_2, m'_2 \rangle$$

$$= D_{m_1, m'_1}^{(j_1)} D_{m_2, m'_2}^{(j_2)}$$

$$= \sum_{\substack{j_1, m \\ j_2, m'}} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle \langle j_1, j_2, j, m | D^{(j)} | j_1, j_2, j', m' \rangle \langle j_1, j_2, j', m' | j_1, j_2, m'_1, m'_2 \rangle$$

$$= \sum_{\substack{j, m \\ j', m'}} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle D_{m, m'}^{(j)} \delta_{j, j'} \langle j_1, j_2, j', m' | j_1, j_2, m'_1, m'_2 \rangle \Rightarrow$$

$$D_{m_1, m'_1}^{(j_1)} D_{m_2, m'_2}^{(j_2)} = \sum_{j, m, m'} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle \langle j_1, j_2, j', m' | j_1, j_2, m'_1, m'_2 \rangle D_{m, m'}^{(j)}$$

Clebsch-Gordan Series

2) $D^+ T_q^{(k)} D = \sum_{q_1, q_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, k, k, q \rangle D^+ X_{q_1}^{(k_1)} D D^+ Z_{q_2}^{(k_2)} D$

$$= \sum_{q_1, q_2, q'_1, q'_2} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, k, k, q \rangle \underbrace{D_{q_1, q'_1}^{(k_1)*} D_{q_2, q'_2}^{(k_2)*}}_{D_{q'_1, q_1}^{(k_1)}(R^{-1}) D_{q'_2, q_2}^{(k_2)}(R^{-1})} X_{q'_1}^{(k_1)} Z_{q'_2}^{(k_2)}$$

$$= \sum_{j, m, m'} \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, k, k, q \rangle \langle k_1, k_2, q_1, q_2 | k, k, j, m \rangle \langle k, k, j, m | k_1, k_2, q'_1, q'_2 \rangle D_{m, m'}^{(j)}(R^{-1}) X_{q'_1}^{(k_1)} Z_{q'_2}^{(k_2)}$$

Como $\sum_{m_1, m_2} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, j', m' \rangle = \delta_{j, j'} \delta_{m, m'}$
(ortogonalidade de de)

$$\begin{aligned}
D^{\dagger} T_q^{(k)} D &= \sum_{\substack{q_1 q_2 \\ j m m'}} \delta_{kj} \delta_{qm} \langle k_1 k_2 j m' | k_1 k_2 q_1 q_2 \rangle D_{m m'}^{(j)}(\vec{R}^{-1}) \chi_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)} \\
&= \sum_{\substack{q_1 q_2 \\ j m'}} \langle k_1 k_2 k m' | k_1 k_2 q_1 q_2 \rangle D_{q m'}^{(j)}(\vec{R}^{-1}) \chi_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)} \\
&= \sum_{m'} D_{q m'}^{(j)}(\vec{R}^{-1}) \left[\sum_{q_1 q_2} \langle k_1 k_2 k m' | k_1 k_2 q_1 q_2 \rangle \chi_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)} \right] \\
&= \sum_{m'} D_{m' q}^{(j)*}(\vec{R}) T_{m'}^{(k)}
\end{aligned}$$