

6 - Fótons e o Campo Eletromagnético

Neste capítulo vamos aplicar o formalismo de partículas idênticas para descrever fótons, partículas associadas ao campo eletromagnético. Os fótons, no entanto, são bastante peculiares por terem massa zero e por não estarem em repouso em nenhum referencial. As outras características importantes são:

- no espaço livre, carregam momento $p = \hbar k$
 - carregam energia $E = pc$, ou $\hbar \omega_k = \hbar kc$
 - o valor de $\mathbf{J} \cdot \hat{k}$ é sempre $\pm \hbar$, onde \mathbf{J} é o momento angular total e \hat{k} a direção de propagação.
- Dizemos que a helicidade do fóton é positiva ou negativa.

Como $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ e $\mathbf{L} \cdot \hat{k} = 0$ (pois $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$), o fóton é um bóson de spin 1. Vamos então associar os operadores $a_+^\dagger(\mathbf{k})$ e $a_-^\dagger(\mathbf{k})$ à criação de fóton com momento \mathbf{k} e helicidades (+) e (-) respectivamente.

Vamos supor que o sistema está em uma caixa de volume L^3 com condições de contorno periódicas, de forma que

$$\begin{aligned}
 k_x &= 2\pi n_x / L \\
 k_y &= 2\pi n_y / L \\
 k_z &= 2\pi n_z / L
 \end{aligned}$$

com $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

As relações de comutação são

$$[a_{+}(k), a_{+}^{\dagger}(k')] = [a_{-}(k), a_{-}^{\dagger}(k')] = \delta_{k,k'}$$

e todos os outros comutadores se anulam.

Os operadores importantes são:

- ENERGIA
$$H = \sum_{k} c \hbar k [a_{+}^{\dagger}(k) a_{+}(k) + a_{-}^{\dagger}(k) a_{-}(k)]$$

- MOMENTO LINEAR
$$P = \sum_{k} \hbar k [a_{+}^{\dagger}(k) a_{+}(k) + a_{-}^{\dagger}(k) a_{-}(k)]$$

- N° de FÓTONS
$$N = \sum_{k} [a_{+}^{\dagger}(k) a_{+}(k) + a_{-}^{\dagger}(k) a_{-}(k)]$$

Podemos ainda escrever o operador

$$J(k) = \hbar [a_{+}^{\dagger}(k) a_{+}(k) - a_{-}^{\dagger}(k) a_{-}(k)]$$

que representa o momento angular na direção \hat{k} de fótons com k .

Operadores de momento angular são geradores de rotações. Assim, cada $J(k)$ deve gerar uma rotação em torno do eixo \hat{k} por meio do

operador
$$-i J(k) \alpha / \hbar$$

$$U(\alpha) = e$$

onde α é o ângulo de rotação.

Podemos verificar que o efeito dessa rotação em $a_{\pm}^{\dagger}(k)$ é

$$U(\alpha) a_{\pm}^{\dagger} U^{\dagger}(\alpha) = e^{\mp i \alpha} a_{\pm}^{\dagger}$$

PROVA Seja

$$V(k) = \frac{j(k)}{k} = a_+^+(k) a_+(k) - a_-^+(k) a_-(k)$$

$$U(\alpha) = e^{-i\alpha V}$$

$$[V(k), a_+^+(k)] = a_+^+$$

$$[V(k), a_-^+(k)] = -a_-^+$$

USAMOS AGORA A FÓRMULA

$$e^{-i\lambda A} B e^{i\lambda A} = B - i\lambda [A, B] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

que, se $[A, [A, B]] = \beta B$ simplifica para

$$e^{-i\lambda A} B e^{i\lambda A} = B \cos(\lambda\sqrt{\beta}) - i \frac{[A, B]}{\sqrt{\beta}} \sin(\lambda\sqrt{\beta})$$

Para $\lambda = \alpha$, $A = V$, $B = a_{\pm}^+$,

$$[A, B] = \pm B$$

$$[A, [A, B]] = \pm [A, B] = B \Rightarrow \beta = 1$$

e obtemos

$$U(\alpha) a_{\pm}^+ U^\dagger(\alpha) = a_{\pm}^+ \cos(\alpha) \mp i a_{\pm}^+ \sin(\alpha) = a_{\pm}^+ e^{\mp i\alpha}$$

Vemos que a_{\pm}^+ se transformam com as componentes $T_1^{(1)}$ e $T_1^{(-1)}$ de um tensor de ordem 1. Introduzimos então combinações de $T_1^{(\pm 1)}$ que correspondem a componentes de um vetor no plano perpendicular a \hat{k} :

$$a_1^+(\hbar\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-a_+^+(\hbar\kappa) + a_-^+(\hbar\kappa))$$

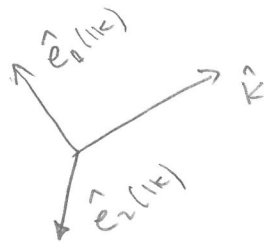
$$a_2^+(\hbar\kappa) = \frac{i}{\sqrt{2}} (a_+^+(\hbar\kappa) + a_-^+(\hbar\kappa))$$

Veja que

$$U a_1^+ U^\dagger = a_1^+ \cos \alpha + a_2^+ \sin \alpha$$

$$U a_2^+ U^\dagger = -a_1^+ \sin \alpha + a_2^+ \cos \alpha$$

No sistema de versores $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k}$ dado por um sistema ortogonal onde



$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k}$$

podemos definir os operadores vetoriais

$$\begin{cases} a_1^+(\hbar\kappa) \hat{e}_1 + a_2^+(\hbar\kappa) \hat{e}_2 = -a_+^+(\hbar\kappa) \hat{e}^{(-)} - a_-^+(\hbar\kappa) \hat{e}^{(+)} \\ a_1(\hbar\kappa) \hat{e}_1 + a_2(\hbar\kappa) \hat{e}_2 = a_+(\hbar\kappa) \hat{e}^{(+)} + a_-(\hbar\kappa) \hat{e}^{(-)} \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \hat{e}^{(+)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) \\ \hat{e}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 - i\hat{e}_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}^{(-)} - \hat{e}^{(+)}) \\ \hat{e}_2 = +\frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{e}^{(-)} + \hat{e}^{(+)}) \end{cases}$$

Veja que

$$\left(\hat{e}^{(+)} \right)^\dagger \cdot \hat{e}^{(-)} = 0$$

$$\hat{e}^{(+)} \times \hat{e}^{(-)} = i\hat{k}$$

e

$$a_+^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^+ + ia_2^+)$$

$$a_-^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^+ - ia_2^+)$$

e que

$$[a_1(k), a_1^\dagger(k)] = [a_2(k), a_2^\dagger(k)] = 1.$$

Gostaríamos agora de escrever operadores na representação de coordenadas. Isso poderia ser feito usando

$$\langle r | k \rangle = L^{-3/2} e^{i k \cdot r}$$

e fazendo a transformação de Fourier dos operadores vetoriais que definimos. Isso implicaria em

$$\Psi^\dagger(r) = L^{-3/2} \sum_k [a_1^\dagger(k) \hat{e}_k^{(1)} + a_2^\dagger(k) \hat{e}_k^{(2)}] e^{-i k \cdot r}$$

No entanto, vamos definir um operador de campo ligeiramente modificado:

$$\begin{cases} A^{(+)}(r) = \sqrt{4\pi\hbar c^2} L^{-3/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [a_1(k) \hat{e}_k^{(1)} + a_2(k) \hat{e}_k^{(2)}] e^{i k \cdot r} \\ A^{(-)}(r) = \sqrt{4\pi\hbar c^2} L^{-3/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [a_1^\dagger(k) \hat{e}_k^{(1)} + a_2^\dagger(k) \hat{e}_k^{(2)}] e^{-i k \cdot r} \end{cases}$$

A razão para a inclusão do termo $1/\sqrt{2\omega_k}$ é tornar a expressão da energia mais simples e fácil de relacionar com a energia clássica do campo eletromagnético. O fato de Ψ^\dagger não funcionar bem há ver com a massa nula do fóton. De fato, é estranho criar um fóton na posição r , pois eles sempre tem velocidade c .

Note que, devido às duas helicidades do fóton, definiremos um operador vetorial de criação de fótons. Mostraremos que esse vetor é, essencialmente, o potencial vetor de Eletromagnetismo clássico.

Para isso vamos primeiro escrever a dependência temporal de $A^{(\pm)}$ na representação de Heisenberg. Veja que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\mathbf{k}} c \hbar \mathbf{k} (a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{c \hbar \mathbf{k}}{2} \left[(a_1^\dagger + i a_2^\dagger)(a_1 - i a_2) + (a_1^\dagger - i a_2^\dagger)(a_1 + i a_2) \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} c \hbar \mathbf{k} (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) \quad e \end{aligned}$$

$$i \hbar \frac{d a_{\pm}^\dagger(\mathbf{k})}{dt} = [a_{\pm}^\dagger(\mathbf{k}), \mathcal{H}] = -c \hbar \mathbf{k} a_{\pm}^\dagger = -\hbar \omega_{\mathbf{k}} a_{\pm}^\dagger \quad e$$

$$a_{\pm}^\dagger(\mathbf{k}, t) = e^{+i \omega_{\mathbf{k}} t} a_{\pm}^\dagger(\mathbf{k})$$

Da mesma forma, $a_{\pm}(\mathbf{k}, t) = e^{-i \omega_{\mathbf{k}} t} a_{\pm}(\mathbf{k})$, o mesmo valendo para a_2^\dagger e a_2 . Substituindo em A^+ e A^- obtemos suas dependências temporais. Definimos agora o operador hermitiano

$$A(\mathbf{r}, t) = A^{(+)}(\mathbf{r}, t) + A^{(-)}(\mathbf{r}, t),$$

dado por

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{4 \pi \hbar c^2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2 \omega_{\mathbf{k}}}} \left[(a_1(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} + a_2(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + (a_1^\dagger(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} + a_2^\dagger(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right]$$

É fácil ver que

$$\nabla \cdot A(r, t) = 0$$

pois, na base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ o fator $e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{\pm i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ ($\lambda=1,2$) que depende de x ou y . Além disso, cada componente de A satisfaz a equação de onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A(r, t) = 0$$

De fato,

$$\begin{aligned} \nabla^2 (e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{\pm i(-xk_x + yk_y + zk_z)} \\ &= -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -k^2 e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{\pm i\omega_k t}) = -\frac{\omega_k^2}{c^2} e^{\pm i\omega_k t} = -k^2 e^{\pm i\omega_k t}$$

$$e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} = 0$$

Definimos então os operadores hermitianos

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times A$$

que correspondem aos campos elétrico e magnético no Gauge de Coulomb, onde o potencial eletrostático é nulo (veja páginas 42 e 43.)

Definimos também

$$E = E^{(+)} + E^{(-)}$$

$$B = B^{(+)} + B^{(-)}$$

onde as componentes \pm são calculadas com $A^{(\pm)}$...

$$E^{(+)}(r,t) = \frac{i\sqrt{2\pi\hbar}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}} \left(a_1(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} + a_2(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(2)} \right) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)}$$

Multiplicamos tudo por $\frac{e^{-i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}'}t)}}{L^{3/2}}$, integramos sobre r e usamos

$$\frac{1}{L^3} \int e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k} - \mathbf{k}')} d^3r = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

obtemos

$$a_1(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} + a_2(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(2)} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{L^{-3/2}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} \int E^{(+)}(r,t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} d^3r$$

Da mesma forma podemos calcular $B^{(+)}$ (e $B^{(-)}$). Usando o sistema de coordenadas $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k}$ vemos que $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = kz$ e

$$\nabla \times (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{e}_1) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^{ikz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = ik e^{ikz} \hat{e}_2 = ie^{ikz} (\mathbf{k} \times \hat{e}_1)$$

$$\nabla \times (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{e}_2) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & e^{ikz} & 0 \end{vmatrix} = -ik e^{ikz} \hat{e}_1 = ie^{ikz} (\mathbf{k} \times \hat{e}_2)$$

Assim obtemos

$$B^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{i\sqrt{2\pi\hbar c^2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{1}(\mathbf{k}) (\mathbf{k} \times \hat{e}_1) + a_{2}(\mathbf{k}) (\mathbf{k} \times \hat{e}_2) \right] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)}$$

e

$$a_{1}(\mathbf{k}) (\mathbf{k} \times \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(1)}) + a_{2}(\mathbf{k}) (\mathbf{k} \times \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi\hbar c^2}} \frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}{L^{3/2}} \int e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' - \omega_{\mathbf{k}}t)} B^{(+)}(\mathbf{r}', t) d^3r'$$

Na próxima seção vamos mostrar que estas definições estão de acordo com nossas expectativas clássicas.

6.2 - ENERGIA, Momento e Momento Angular do Campo de Radiação

Da definição de $a_{1}(\mathbf{k})$ e $a_{2}(\mathbf{k})$ vem que

$$\begin{aligned} a_{1}^{+}(\mathbf{k}) a_{1}(\mathbf{k}) + a_{2}^{+}(\mathbf{k}) a_{2}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2} (-a_{+}^{+} + a_{-}^{+}) (-a_{+} + a_{-}) + \frac{1}{2} (a_{+}^{+} + a_{-}^{+}) (a_{+} - a_{-}) \\ &= a_{+}^{+} a_{+} + a_{-}^{+} a_{-} \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} [a_{1}^{+}(\mathbf{k}) a_{1}(\mathbf{k}) + a_{2}^{+}(\mathbf{k}) a_{2}(\mathbf{k})] \quad (\text{veja pg. anterior}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} (a_{1}^{+}(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} + a_{2}^{+}(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}) \cdot (a_{1}(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} + a_{2}(\mathbf{k}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \int d^3r d^3r' \mathbb{E}^{(-)}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbb{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \int d^3r \mathbb{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbb{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$$

Exercício : Mostre que

$$(A) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \int d^3r \mathbb{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbb{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) - 2 \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}$$

$$(B) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \int \mathbb{B}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbb{B}^{(+)}(\mathbf{r}, t) d^3r$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \mathbb{B}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbb{B}^{(-)}(\mathbf{r}, t) d^3r - 2 \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}$$

Exercício : Mostre que

$$(A) \quad \int \mathbb{E}^{+}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbb{E}^{+}(\mathbf{r}, t) d^3r = - \int \mathbb{B}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbb{B}^{(+)}(\mathbf{r}, t) d^3r$$

DICA: SUBSTITUA A expressão para \mathbb{E}^{+} na pag. 143 e veja que a integral em d^3r produzirá uma $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$. idem para $\mathbb{B}^{(+)}$.

$$(B) \quad \int \mathbb{E}^{-}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbb{E}^{-}(\mathbf{r}, t) d^3r = - \int \mathbb{B}^{-}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbb{B}^{-}(\mathbf{r}, t) d^3r$$

Usando os resultados dos exercícios vemos que

$$\frac{1}{8\pi} \int (\mathbb{E}^2 + \mathbb{B}^2) d^3r = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbb{E}^{(-)} \cdot \mathbb{E}^{+} + \mathbb{E}^{+} \cdot \mathbb{E}^{-}) + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbb{B}^{(-)} \cdot \mathbb{B}^{+} + \mathbb{B}^{+} \cdot \mathbb{B}^{-})$$

$$= \frac{1}{4} \mathcal{H} + \frac{1}{4} \mathcal{H} + \frac{1}{2} \sum \hbar \omega_{\mathbf{k}} + \frac{\mathcal{H}}{4} + \frac{\mathcal{H}}{4} + \frac{1}{2} \sum \hbar \omega_{\mathbf{k}}$$

$$= \mathcal{H} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}$$

$$\frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^2(\mathbf{r},t)) d^3r = \mathcal{H} + E_0$$

$$E_0 = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} = \text{energia de ponto zero}$$

que, a menos de E_0 , reconhecemos como a energia do campo eletromagnético.

○ momento linear também pode ser escrito em termos dos campos.

Começamos com

$$\frac{1}{2\pi c} \int \mathbf{E}^-(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}^{(+)}(\mathbf{r},t) d^3r =$$

$$\frac{1}{2\pi c} \frac{2\pi\hbar c}{L^3} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{k}}}} (a_1^+(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}'}^1 + a_2^+(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}'}^2) \times (a_1(\mathbf{k}) \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^1 + a_2(\mathbf{k}) \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^2)$$

$$\int e^{i\pi(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'} d^3r' e^{i(\omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}})t}$$

$$\frac{L^3 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}{L^3 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}$$

$$= \hbar \sum_{\mathbf{k}} (a_1^+ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^1 + a_2^+ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^2) \times (a_1 \underbrace{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_1}_{\mathbf{k} \hat{\mathbf{e}}_2} + a_2 \underbrace{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_2}_{-\mathbf{k} \hat{\mathbf{e}}_1})$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \hbar [a_1^+ a_1 \mathbf{k} \hat{\mathbf{k}} - a_2^+ a_2 (-\mathbf{k} \hat{\mathbf{k}})] = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} (a_1^+(\mathbf{k}) a_1(\mathbf{k}) + a_2^+(\mathbf{k}) a_2(\mathbf{k}))$$

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2\pi c} \int \mathbf{E}^-(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}^+(\mathbf{r},t) d^3r$$

O momento angular é um pouco mais complicado. A expressão clássica é

$$\vec{J} = \frac{1}{4\pi c} \int [\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})] d^3r$$

Usando a identidade

$$[\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})]_x = \sum_i E_i (\vec{r} \times \nabla)_x A_i + (\vec{E} \times \vec{A})_x + \nabla \cdot (\vec{E} (zA_y - yA_z))$$

vemos que o último termo, ao ser integrado em todo o espaço, produz um "termo de superfície", que supomos se anular p/ $L \rightarrow \infty$.

Assim
$$\vec{J} = \frac{1}{4\pi c} \int [\vec{E} \cdot (\vec{r} \times \nabla) \vec{A}] d^3r + \frac{1}{4\pi c} \int (\vec{E} \times \vec{A}) d^3r$$

A versão quântica é obtida substituindo $\vec{E} \rightarrow \vec{E}^{(+)}(r,t) + \vec{E}^{-}(r,t)$ e o mesmo para \vec{A} . Os termos diretos, envolvendo \vec{E}^{+} e \vec{A}^{+} ou \vec{E}^{-} e \vec{A}^{-} , se cancelam e os cruzados se somam. \odot

$$\vec{J} = \frac{1}{2\pi c} \int \sum_i E_i^{(+)} (\vec{r} \times \nabla) A_i^{(+)} d^3r + \frac{1}{2\pi c} \int (\vec{E}^{(-)} \times \vec{A}^{(+)}) d^3r$$

$$\equiv \vec{J}_L + \vec{J}_S$$

O último termo de fato tem a ver com o spin dos fótons. As componentes x, y e z desse termo podem ser re-escritas como

$$L_{Sx} = \frac{1}{2\pi c} (E_y^- A_z^+ - E_z^- A_y^+)$$

$$= \frac{1}{2\pi c} (E_x^- \ E_y^- \ E_z^-) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x^+ \\ A_y^+ \\ A_z^+ \end{pmatrix}$$

$$\equiv \frac{i}{2\pi \hbar c} E^- S_x A^+$$

$$S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Da mesma forma

$$L_{Sy} = \frac{i}{2\pi \hbar c} E^- S_y A^+$$

$$L_{Sz} = \frac{i}{2\pi \hbar c} E^- S_z A^+$$

$$S_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou d

Assim,

$$L_S = \frac{i}{2\pi \hbar c} \int E^- \vec{S} A^+ d^3r$$

É fácil ver que os auto-valores de S_i são $\pm \hbar$ e 0 e

que $[S_x, S_y] = i \hbar S_z$,

mostrando que fótons são de fato partículas de spin 1.

A componente de spin do momento Angular do campo de fótons pode ser escrita novamente em termos dos operadores de criação e aniquilação:

$$\vec{E}^{(-)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i \frac{\sqrt{4\pi\hbar}}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} (a_{1(\vec{k})}^{\dagger} \hat{e}^{(1)} + a_{2(\vec{k})}^{\dagger} \hat{e}^{(2)}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)}$$

$$\vec{A}^{(+)} = \frac{\sqrt{4\pi\hbar c^2}}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}}} (a_{1(\vec{k}')} \hat{e}^{(1)} + a_{2(\vec{k}')} \hat{e}^{(2)}) e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}'}t)}$$

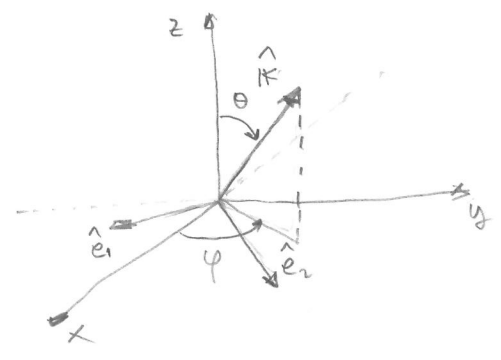
Ao substituir em

$$\mathbb{L}_S = \frac{i}{2\pi\hbar c} \int \vec{E}^{(-)} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}^{(+)} d^3r$$

A integral sobre d^3r $L^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}')$ e obtemos

$$\mathbb{L}_S = \sum_{\vec{k}} (a_{1(\vec{k})}^{\dagger} \hat{e}_{\vec{k}}^{(1)} + a_{2(\vec{k})}^{\dagger} \hat{e}_{\vec{k}}^{(2)}) \vec{\nabla} (a_{1(\vec{k})} \hat{e}_{\vec{k}}^{(1)} + a_{2(\vec{k})} \hat{e}_{\vec{k}}^{(2)})$$

Para cada direção \vec{k} existem os versores $\hat{e}_{\vec{k}}^{(1)}$ e $\hat{e}_{\vec{k}}^{(2)}$. Podemos escolhê-los da seguinte forma em relação a um referencial fixo:



$$\begin{aligned} \hat{k} &= (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \\ \hat{e}_1 &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \\ \hat{e}_2 &= (\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 &= \hat{k} \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 &= \hat{e}_1 \cdot \hat{k} = \hat{e}_2 \cdot \hat{k} = 0 \end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} -a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\theta \cos\varphi \\ a_1 \cos\varphi + a_2 \cos\theta \sin\varphi \\ -a_2 \sin\theta \end{pmatrix}$$

A componente z de \mathbb{L}_S , por exemplo, fica:

$$S_z (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) = \hbar \begin{pmatrix} -i(a_1 \cos\varphi + a_2 \cos\theta \sin\varphi) \\ i(-a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\theta \cos\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$L_{sz} = -i\hbar \sum_{\mathbf{k}} \left\{ (-a_1^\dagger \sin\varphi + a_2^\dagger \cos\theta \cos\varphi) (a_1 \cos\varphi + a_2 \cos\theta \sin\varphi) - (a_1^\dagger \cos\varphi + a_2^\dagger \cos\theta \sin\varphi) (-a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\theta \cos\varphi) \right\}$$

onde os operadores $a_\lambda(\mathbf{k})$ e $a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$ dependem de \mathbf{k} também.

CASOS PARTICULARES

(A) Campo na direção z: $a_\lambda(\mathbf{k}), a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \neq 0$ só se $\mathbf{k} = k\hat{z}$.

Nesse caso $\theta = \varphi = 0$ sempre e

$$L_{sz} = -i\hbar \sum_{\mathbf{k}} (a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2) = \hbar \sum_{\mathbf{k}} (a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)$$

(B) Campo uniforme: $a_\lambda(\mathbf{k})$ e $a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$ independentes de $\hat{\mathbf{k}}$, de forma que o número de fótons é o mesmo em todas as direções.

Nesse caso $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int_{\mathbf{k}} d^3k d\Omega$ e a integral em $d\Omega$ é zero, pois todas as funções são ímpares.

O operador \mathbb{J} também pode ser escrito em termos do operador \vec{J} de um campo. A partir dos operadores $a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k})$ criamos a base de estados de 1 fóton

$|\mathbf{k}\sigma\rangle \equiv$ fóton com momento \mathbf{k} e helicidade $\hbar\sigma$, $\sigma = \pm$

Assim

$$\mathbb{J} = \sum_{\substack{\mathbf{k}\sigma \\ \mathbf{k}'\sigma'}} a_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{k}') a_{\sigma}(\mathbf{k}) \langle \mathbf{k}'\sigma' | \mathbb{J} | \mathbf{k}\sigma \rangle$$

Para uma direção fixa \hat{n} ,

$$J_n = \sum_{\substack{\mathbf{k}\sigma \\ \mathbf{k}'\sigma'}} a_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{k}') a_{\sigma}(\mathbf{k}) \langle \mathbf{k}'\sigma' | J_n | \mathbf{k}\sigma \rangle$$

e

$$[J_n, a_{\nu}^{\dagger}(\vec{n})] = \sum_{\substack{\mathbf{k}\sigma \\ \mathbf{k}'\sigma'}} a_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{k}') \underbrace{[a_{\sigma}(\mathbf{k}), a_{\nu}^{\dagger}(\vec{n})]}_{\delta_{\sigma\nu} \delta_{\mathbf{k}, \vec{n}}} \langle \mathbf{k}'\sigma' | J_n | \mathbf{k}\sigma \rangle$$

$$= \sum_{\mathbf{k}\sigma'} a_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{k}') \underbrace{\langle \mathbf{k}'\sigma' | J_n | \vec{n}\nu \rangle}_{\hbar\nu \delta_{\sigma'\nu} \delta_{\mathbf{k}', \vec{n}}}$$

$$= \hbar\nu a_{\nu}^{\dagger}(\vec{n})$$

Para concluir esta seção escrevemos o 4-vetor energia-momento em notação relativística:

$$X^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$$

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu = (ct, -\mathbf{r})$$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

4-vetor energia momento

$$\underline{P}^\mu = \left(\frac{E}{c}, \underline{P} \right) = - \frac{1}{2\pi c} \int \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial^\mu A^+(\mathbf{r}, t) d^3r$$

A componente $\mu=0$ é trivial, pois $\frac{1}{c} \frac{\partial A^+}{\partial t} = -\mathbf{E}^+$. Para $\mu \neq 0$

usamos a relação vetorial

$$[\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}^+)]_i = \epsilon_{ijk} E_j \epsilon_{k\ell m} \partial_\ell A_m^+$$

$$= (\delta_{ie} \delta_{\ell m} - \delta_{im} \delta_{\ell e}) E_j \partial_\ell A_m^+ = \sum_j E_j^+ \partial_i A_j^+ - \sum_j E_j^+ \partial_j A_i^+$$

$$= \sum_j E_j^+ \partial_i A_j^+ - \underbrace{\sum_j \partial_j (E_j^+ A_i^+)}_{\text{termo de superfície}} + \underbrace{\sum_j (\partial_j E_j^+) A_i^+}_{\nabla \cdot \mathbf{E} = 0}$$

$$= \mathbf{E}^{(-)} \cdot \partial^i \mathbf{A}^+$$

6.3 - Interação com partículas carregadas

149

A radiação eletromagnética interage com partículas carregadas, de forma que o momento das partículas é afetado pela radiação e esta também é afetada pelo movimento das cargas, que geram correntes e emitem radiação se aceleradas.

A Hamiltoniana de um sistema de partículas idênticas na base discreta de uma partícula é

$$H_0 = \sum_{k, \alpha} \langle k | H_0 | k \rangle a_{k, \alpha}^\dagger a_{k, \alpha} + \frac{1}{2} \sum_{qrst} \langle qr | V_i | ts \rangle a_q^\dagger a_r^\dagger a_s a_t$$

No caso de espectro contínuo na base de posição r e spin (e outros números quânticos discretos) σ , as somas viram integrais. Se

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)$$

$$V_i = V_i(r_k - r_l) \quad (\text{como repulsão Coulombiana})$$

então

$$\langle r' | H_0 | r \rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V(r) \right) \delta(r - r')$$

$$\langle r' r'' | V_i | r''' r'''' \rangle = V_i(r', r'') \delta(r' - r''') \delta(r'' - r''')$$

$$H_0 = \sum_{\sigma} \int \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(r) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \hat{\Psi}_{\sigma}(r) d^3r + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \sigma'} \int d^3r d^3r' \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(r) \hat{\Psi}_{\sigma'}^{\dagger}(r') V(r, r') \hat{\Psi}_{\sigma}(r) \hat{\Psi}_{\sigma'}(r')$$

No caso de um unico elctron de carga -e NA

presença de um campo de radiação, o segundo termo de \mathcal{H} não existe, mas tem que fazer

$$p \rightarrow p + \frac{e}{c} A \quad \text{ou} \quad (e > 0)$$

$$-i\hbar \nabla \rightarrow -i\hbar \nabla + \frac{e}{c} A$$

e adicionar a energia do campo. A Hamiltoniana completa fica:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{E}^{(-)} \cdot \mathbf{E}^{(+)} d^3r + \frac{1}{2m} \int \hat{\Psi}^\dagger \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} A \right)^2 \Psi d^3r + \int V \Psi^\dagger \Psi d^3r$$

onde não levamos o spin em consideração.

Nosso interesse aqui é estudar a emissão e absorção de fótons por um elctron em um átomo, com fizemos no capítulo 2. Nesse caso $V = -\frac{Ze^2}{r}$ e podemos tratar a interação de forma perturbativa.

Devido à interação, o estado fundamental do sistema átomo + campo não é $|\Psi_{\text{átomo}}\rangle \times |\Psi_{\text{campo}}\rangle$. Veremos que mesmo na presença de um campo com zero fótons, o elctron pode decair de um estado excitado emitindo um fóton. Esse processo é conhecido como EMISSION ESPONTÂNEA.

Abrindo o termo cinético teremos

$$\hat{\Psi}^\dagger \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 \hat{\Psi} + \frac{e\hbar}{ic} \nabla \cdot (A \hat{\Psi}) + \frac{e\hbar}{ci} A \cdot \nabla \hat{\Psi} + \frac{e^2}{c^2} A \cdot A \hat{\Psi} \right]$$

como $\nabla \cdot (A \Psi) = (\nabla \cdot A) \Psi + (A \cdot \nabla) \Psi$ e $\nabla \cdot A = 0$, no

Gauge de Coulomb, podemos re-escrever

Devido à ortogonalidade dos estados de fótons, no caso de absorção só o operador $a_{(\lambda)}^{(\lambda)}(k)$ contribui, pois

$$\langle \dots n_i^{(\lambda)}(k) - 1 \dots | a_{(\lambda')}^{(\lambda)}(k') | \dots n_i^{(\lambda)}(k) \dots \rangle$$

$$= \sqrt{n_i^{(\lambda)}(k)} \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Analogamente, no caso de emissão apenas $a_{(\lambda)}^+(\lambda)$ contribui

com $\sqrt{n_i^{(\lambda)}(k) + 1} \delta_{kk'}$.

Os operadores de criação/aniquilação de elétrons, por outro lado, também podem ser tratados com as relações de comutação e integrações por partes. Os detalhes estão na próxima página.

O resultado final é:

$$\langle \Psi_f | \hat{D}_1 | \Psi_i \rangle = \frac{e}{mc} \frac{\sqrt{4\pi\hbar^2}}{L^3\hbar} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{ \frac{\sqrt{n_i^{(\lambda)}}}{\sqrt{n_i^{(\lambda)}+1}} \right\} \int d^3r e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Psi_f^*(\mathbf{r}) \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \cdot \frac{i}{\hbar} \nabla \Psi_i(\mathbf{r})$$

onde $\left\{ \begin{matrix} \sqrt{n_i} / \sqrt{n_i+1} \\ \pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} / -i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \\ e / e \end{matrix} \right\}$ vale para absorção / emissão.

CÁLCULO DA PARTE ELETRÔNICA

Temos que calcular

$$\int \langle 0 | \hat{\Psi}(r') \underbrace{\Psi_f^*(r') \hat{\Psi}^\dagger(r') \hat{\Psi}(r)}_{= -\hat{\Psi}^\dagger(r') \hat{\Psi}(r') + \delta(r-r')} \Psi_i(r'') \hat{\Psi}^\dagger(r'') | 0 \rangle e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r d^3r' d^3r''$$

$$= \int \langle 0 | \hat{\Psi}(r) \hat{\Psi}^\dagger(r'') | 0 \rangle \Psi_f^*(r) \Psi_i(r'') e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r d^3r''$$

Integrando por partes,

$$(\nabla \hat{\Psi}(r)) \Psi_f^*(r) e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \nabla [\hat{\Psi}(r) \Psi_f^*(r) e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] - \hat{\Psi}(r) \nabla (\Psi_f^*(r) e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}})$$

o gradiente gera um termo de superfície que assumimos ser nulo. Fazendo ainda

$$\hat{\Psi}(r) \hat{\Psi}^\dagger(r'') = -\hat{\Psi}^\dagger(r'') \hat{\Psi}(r) + \delta(r-r'')$$

obtemos

$$= - \int \nabla (\Psi_f^*(r) e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \Psi_i(r) d^3r$$

$$= \int \Psi_f^*(r) e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla \Psi_i(r) d^3r, \text{ onde integramos por}$$

partes mais uma vez.

Se o campo de radiação tem uma configuração "clássica", com grande número de fótons de várias frequências (note que esse NÃO é o caso de um laser) podemos calcular a taxa de transição usando a Regra de Ouro:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \rho(E_k) |\langle \psi_f | \hat{H}_1 | \psi_i \rangle|^2$$

OBS: os estados do Atômico são discretos, mas os fótons estão em um quase-contínuo.

onde $\rho(E_k)$ é a densidade de estados ^(de fótons) por polarização com momento $\hbar k = \hbar P/\hbar$

$$dN = \frac{dV}{h^3} = \frac{L^3 k^2 dk d\Omega_k}{(2\pi)^3 \hbar^3} = \frac{L^3 \omega_k^2 d\omega_k d\Omega_k}{(2\pi)^3 c^3} = \frac{L^3 \omega_k^2 d(\hbar \omega_k)}{8\pi^3 \hbar c^3} d\Omega_k$$

$$\rho(E_k) = \frac{dN}{dE_k} = \frac{L^3 \omega_k^2}{8\pi^3 \hbar c^3} d\Omega_k = \text{densidade de fótons com } \hat{k} \text{ dentro de } d\Omega_k$$

Chamando

$$\langle f | e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \cdot \mathbf{V} | i \rangle \equiv \frac{1}{m} \int \psi_f^*(\mathbf{r}) e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla \psi_i(\mathbf{r}) d^3r$$

obtemos

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{L^3 \omega_k^2}{8\pi^3 \hbar c^3} \frac{e^2}{c^2} \frac{4\pi \hbar^2}{L^3} \frac{1}{2\omega_k} \bar{n}_{i,f}^{(\lambda)} |\langle f | e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \cdot \mathbf{V} | i \rangle|^2$$

ou

$$W = \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega_k \bar{n}_{i,f}^{(\lambda)} |\langle f | e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \cdot \mathbf{V} | i \rangle|^2 d\Omega_{\hat{k}} \quad ; \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

onde USAMOS

- $n_i \rightarrow \bar{n}_i$ p/ absorção (# médio inicial de fótons)
- $n_{i+1} \rightarrow \bar{n}_f$ p/ emissão (# médio final de fótons).

Se $n_i=0$, $n_f=1$ teremos o caso de EMISSÃO ESPONTÂNEA.

Na aproximação de dipolo $e^{ik \cdot r} \approx 1$, Usando

Ainda

$$\frac{1}{m} \langle f | p | i \rangle = -i \omega_{fi} \langle f | r | i \rangle$$

(veja página 47, cap. 2), o elemento de matriz fica

$$\begin{aligned}
 |\langle f | \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \cdot \mathbf{r} | i \rangle|^2 W_{fi} &= W_{fi}^2 \langle f | \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \cdot \mathbf{r} | i \rangle \langle i | \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \cdot \mathbf{r} | f \rangle \\
 &= \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \cdot \langle f | \mathbf{r} | i \rangle \langle i | \mathbf{r} | f \rangle \cdot \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} W_{fi}^2 \\
 &= \langle f | \mathbf{r} | i \rangle \underbrace{(\hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)})}_{\text{diagonal = matriz}} \langle i | \mathbf{r} | f \rangle W_{fi}^2
 \end{aligned}$$

Se somarmos W sobre as duas polarizações e integramos sobre todas as direções obtemos

$$\int \underbrace{(\hat{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} + \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(2)} \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(2)})}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} d\Omega_{\mathbf{k}} = \int [1 - \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}] d\Omega_{\mathbf{k}} = 4\pi \cdot 1 - \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

Assim, $\rho | N_f = 1$, e $\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_{fi} \equiv \omega$

$$\begin{aligned}
 W_T &= \sum_{\lambda=1}^2 \int d\Omega_{\mathbf{k}} W = \frac{4\alpha}{3c^2} W^3 |\langle f | \mathbf{r} | i \rangle|^2 \\
 &= \frac{4\alpha W^3}{3c^2} \left[|\langle f | \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{x}} | i \rangle|^2 + |\langle f | \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{y}} | i \rangle|^2 + |\langle f | \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}} | i \rangle|^2 \right]
 \end{aligned}$$

No caso $|i\rangle = |n l m\rangle$; $|f\rangle = |n' l' m'\rangle$ e se

somarmos sobre m' vemos que

$$\sum_{m'} |\langle n' l' m' | \mathbf{r} | n l m \rangle|^2 = \begin{cases} \frac{l+1}{2l+1} (R_{n l' l'})^2 & \text{se } l' = l+1 \\ \frac{l}{2l+1} (R_{n l' l'})^2 & \text{se } l' = l-1 \end{cases}$$

como calculamos nas páginas 49 \rightarrow 51.

Exercício: Refaça os cálculos das páginas 49 a 51 nesse contexto. Obs: $R_{n\ell}^{nl} = \int_0^\infty R_{n\ell}(r) R_{n\ell}(r) r^2 dr$.

Exercício: Calcule a taxa de emissão espontânea do Hidrogênio $\downarrow 2p \rightarrow 1s$. Calcule $1/\tau =$ meia vida do estado $2p$.

Exercício: Mostre que $\int \hat{r} \hat{r} d\Omega_r = \frac{4\pi}{3} \mathbb{1}$. Dica: use $\hat{r} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$.

6.4 - Elementos de Óptica Quântica

Tratar cargas e campos quanticamente de forma exata é bastante complicado. Em óptica quântica tratamos, em geral, as cargas de forma clássica, e o campo de radiação de forma exata. Para isso re-escrivemos (veja pg 151)

$$H_i = \frac{e}{c} \frac{\hbar}{2mi} \left[\int \Psi^\dagger \nabla \cdot \mathbf{A} \Psi d^3r - \int \nabla \Psi^\dagger \cdot \mathbf{A} \Psi d^3r \right] \rightarrow -\frac{1}{c} \int \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3r$$

onde a corrente $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$ é tratada classicamente. Lembre que

$$\frac{-e\hbar}{2mi} \int (\Psi^\dagger \nabla \Psi - \nabla \Psi^\dagger \Psi) d^3r = \mathcal{J}$$

A Hamiltoniana total agora fica

$$H = \frac{1}{2\pi} \int \mathbb{E}^{(+)} \cdot \mathbb{E}^{(+)} d^3r - \frac{1}{c} \int \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3r$$

e podemos estudar o efeito de uma distribuição de cargas sobre o campo eletromagnético, desprezando o efeito deste sobre as cargas.

Na representação de momento usamos

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{4\pi k c^2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right] \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$$

$$J(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{L^{3/2}} \int d^3r J(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$$

e obtemos

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) - \sqrt{4\pi \hbar} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[J(\mathbf{k}, t) a_{\lambda}(\mathbf{k}) + J(\mathbf{k}, t)^* a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) \right] \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left[\hbar \omega_{\mathbf{k}} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) + f_{\mathbf{k}, \lambda}(t) a_{\lambda}(\mathbf{k}) + f_{\mathbf{k}, \lambda}^*(t) a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) \right]$$

onde

$$f_{\mathbf{k}, \lambda}(t) = -\sqrt{\frac{2\pi \hbar}{\omega_{\mathbf{k}}}} J(\mathbf{k}, t) \cdot \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$$

Essa Hamiltoniana representa uma coleção de osciladores harmônicos forçados e desacoplados! Esse problema tem solução exata, como descrevo no tópico especial "Oscilador Harmônico forçado". A solução depende da transformação de Fourier de $f_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$:

$$J(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}, \lambda) \equiv \frac{1}{L^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3r J(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$$

Se o estado inicial do campo de radiação é o vácuo, então, na representação de interação, e a menos de uma fase

$$\tilde{T}(-\infty, +\infty) |0\rangle \equiv S |0\rangle = \prod_{\text{modos}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^{\dagger}} |0\rangle$$

$$\alpha = \frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{2\pi \hbar}{\omega_{\mathbf{k}}}} J(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}, \lambda)$$

$$S|0\rangle = \exp\left\{-\pi \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\hbar \omega_{\mathbf{k}}} |j(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}, \lambda)|^2\right\} \times$$

$$\exp\left\{i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}} j(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}, \lambda) \alpha_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})\right\} |0\rangle$$

que é um estado coerente! O número médio de fótons em cada modo é dado por

$$\langle n \rangle = |\alpha|^2 = \frac{2\pi}{\hbar \omega_{\mathbf{k}}} |j(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}, \lambda)|^2$$

e a probabilidade de encontrarmos m fótons em um modo específico é

$$P(m) = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{m!} |\alpha|^{2m}$$

6.5 - Coerência, Inferência e Propriedades Estatísticas