7 - Teoria Relativística do Elétron

Neste capítulo vamos desenvolver a teoria quântica relativística para elétrons de forma similar à teoria dos fótons. Três ingredientes são fundamentais:

(A) elétrons estão intimamente associados a pósitrons, partículas de mesma massa e spin 1/2, mas de carga $+e$. De fato, elétrons e pósitrons são criados simultaneamente em certos processos envolvendo o campo eletromagnético.

(B) Para e^- ou e^+ livres de momento $\mathbf{p}$ e energia E_p,

$$E_p = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

onde m = massa de repouso.

(C) Como no caso dos fótons, apenas $J_p = \vec{J}\cdot\hat{p}$ comuta com a energia H. Assim elétrons e pósitrons também têm helicidade positiva ou negativa; mas nesse caso seu valor é $\pm \hbar/2$. (*)

Na representação de momento, introduzimos então:

$a^+_{\substack{R\\L}}(\mathbf{p})$, $a_{\substack{R\\L}}(\mathbf{p})$ = op. de criação e aniquil. de e^- com helicidade positiva/negativa

$b^+_{\substack{R\\L}}(\mathbf{p})$, $b_{\substack{R\\L}}(\mathbf{p})$ = op. de criação e aniquilação de e^+ com helicidade positiva/negativa.

(*) Comentário sobre a helicidade dos elétrons:

Na teoria relativística de um partícula em um potencial central, apenas $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ comuta com H. Dessa forma, a única maneira de medirmos $\vec{S}$ para uma partícula em um auto-estado de energia sem perturbá-la, é medir $\vec{J}$ na direção de $\vec{p}$, pois $\vec{L} \cdot \vec{p} = 0$ e $\vec{J} \cdot \hat{p} = \vec{S} \cdot \hat{p}$ mede apenas o spin. Essas observações valem também para elétrons livres, que é um caso particular de $V = 0$ (veja página 220).

Esses operadores devem satisfazer as relações de anticomutação de férmions:

$$a_R(\mathbb{P})\, a_R^+(\mathbb{P}') + a_R^+(\mathbb{P}')\, a_R(\mathbb{P}) = \delta(\mathbb{P}-\mathbb{P}')$$

$$a_L(\mathbb{P})\, a_L^+(\mathbb{P}') + a_L^+(\mathbb{P}')\, a_L(\mathbb{P}) = \delta(\mathbb{P}-\mathbb{P}')$$

$$b_R(\mathbb{P})\, b_R^+(\mathbb{P}') + b_R^+(\mathbb{P}')\, b_R(\mathbb{P}) = \delta(\mathbb{P}-\mathbb{P}')$$

$$b_L(\mathbb{P})\, b_L^+(\mathbb{P}') + b_L^+(\mathbb{P}')\, b_L(\mathbb{P}) = \delta(\mathbb{P}-\mathbb{P}')$$

e todas as outras combinações tendo anticomutador nulo. Com isso podemos escrever os operadores energia, momento, carga e J_p como:

$$\mathcal{H} = \int E_p \left[a_R^+(\mathbb{P})a_R(\mathbb{P}) + a_L^+(\mathbb{P})a_L(\mathbb{P}) + b_R^+(\mathbb{P})\, b_R(\mathbb{P}) + b_L^+(\mathbb{P})\, b_L(\mathbb{P})\right] d^3p$$

$$\mathbb{P} = \int \mathbb{P} \left[a_R^+(\mathbb{P})\, a_R(\mathbb{P}) + a_L^+(\mathbb{P})\, a_L(\mathbb{P}) + b_R^+(\mathbb{P})\, b_R(\mathbb{P}) + b_L^+(\mathbb{P})\, b_L(\mathbb{P})\right] d^3p$$

$$Q = e\int \left[-a_R^+(\mathbb{P})\, a_R(\mathbb{P}) - a_L^+(\mathbb{P})\, a_L(\mathbb{P}) + b_R^+(\mathbb{P})\, b_R(\mathbb{P}) + b_L^+(\mathbb{P})\, b_L(\mathbb{P})\right] d^3p$$

$$J_p = \frac{\hbar}{2}\left[a_R^+(\mathbb{P})\, a_R(\mathbb{P}) - a_L^+(\mathbb{P})\, a_L(\mathbb{P}) + b_R^+(\mathbb{P})\, b_R(\mathbb{P}) - b_L^+(\mathbb{P})\, b_L(\mathbb{P})\right]$$

= spin por unidade de volume no espaço de momento.

Queremos agora construir operadores de campo $\hat{\Psi}(\mathbb{r})$ de tal forma que $\mathcal{H}$, $\mathbb{P}$ e Q possam ser escritos como

$$K = \int \hat{\Psi}^+(\mathbb{r})\, K\, \Psi(\mathbb{r})\, d^3r$$

onde K é o operador correspondente de uma partícula.

A tentativa natural para a energia seria

$$\mathcal{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbb{r}) \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4}\, \hat{\Psi}(\mathbb{r})\, d^3 r \quad .$$

Isso, no entanto, não é bom, pois ao expandirmos a raiz quadrada não aparecem infinitas derivadas de $\hat{\Psi}$. Apenas no limite não-relativístico podemos aproximar a raiz por

$$mc^2 \sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \nabla^2} \approx mc^2 - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} = mc^2 + \frac{\mathbb{P}^2}{2m} \, .$$

A saída para esse problema está em duas observações feitas por Dirac. A primeira é a seguinte: nas integrais definindo $\mathcal{H}$, $\mathbb{P}$ e $\mathcal{Q}$, fazemos $\mathbb{P} \to -\mathbb{P}$ nos termos envolvendo b e $b^\dagger$:

$$\int d^3p \; E_p \, b_R^\dagger(\mathbb{P})\, b_R(\mathbb{P}) = \int d^3p \, E_p \, b_R^\dagger(-\mathbb{P})\, b_R(-\mathbb{P})$$

$$= -\int d^3p \, E_p \, b_R(-\mathbb{P})\, b_R^\dagger(-\mathbb{P}) + C$$

A constante C apareceu devido à função δ da relação de comutação. O mesmo truque pode ser aplicado para as componentes L. Com isso os 4 operadores ficam, a menos dessas constantes,

$$\mathcal{H} = \int d^3p \, E_p \left[a_R^\dagger(\mathbb{P}) a_R(\mathbb{P}) + a_L^\dagger(\mathbb{P}) a_L(\mathbb{P}) - b_R(-\mathbb{P}) b_R^\dagger(-\mathbb{P}) - b_L(-\mathbb{P}) b_L^\dagger(-\mathbb{P}) \right]$$

$$\mathbb{P} = \int d^3p \; \mathbb{P} \left[a_R^\dagger(\mathbb{P}) a_R(\mathbb{P}) + a_L^\dagger(\mathbb{P}) a_L(\mathbb{P}) + b_R(-\mathbb{P}) b_R^\dagger(-\mathbb{P}) + b_L(-\mathbb{P}) b_L^\dagger(-\mathbb{P}) \right]$$

$$\mathcal{Q} = e \int d^3p \left[-a_R^\dagger(\mathbb{P}) a_R(\mathbb{P}) - a_L^\dagger(\mathbb{P}) a_L(\mathbb{P}) - b_R(-\mathbb{P}) b_R^\dagger(-\mathbb{P}) - b_L(-\mathbb{P}) b_L^\dagger(-\mathbb{P}) \right]$$

$$J_p = \frac{\hbar}{2}\left[a^{\dagger}_R(\mathbb{P})\,a_R(\mathbb{P}) - a^{\dagger}_L(\mathbb{P})\,a_L(\mathbb{P}) - b_R(-\mathbb{P})\,b^{\dagger}_R(-\mathbb{P}) + b_L(-\mathbb{P})\,b^{\dagger}_L(-\mathbb{P})\right]$$

Então vemos que

$b_L(-\mathbb{P})$ = operador de aniquilação de pósitrons com momento $-\mathbb{P}$, helicidade negativa e energia E_p

= operador de criação de elétrons (pois contribuem com carga negativa), de momento $+\mathbb{P}$, energia $-E_p$ e helicidade positiva!

A energia negativa pode ser interpretada como solução da equação

$$E_p^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \;\rightarrow\; E_p = \pm\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}.$$

Propomos então a construção do operador de campo

$$\hat{\Psi}(\mathbb{r}) = \hat{\Psi}^{(+)}(\mathbb{r}) + \hat{\Psi}^{(-)}(\mathbb{r})$$

com componentes de elétron e pósitron dados por

$$\hat{\Psi}^{(+)}(\mathbb{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\left[u^{(R)}(\mathbb{P})\,a_R(\mathbb{P}) + u^{(L)}(\mathbb{P})\,a_L(\mathbb{P})\right]e^{\frac{i}{\hbar}\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}}\,d^3p$$

$$\hat{\Psi}^{(-)}(\mathbb{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\left[v^{(R)}(-\mathbb{P})\,b^{\dagger}_R(\mathbb{P}) + v^{(L)}(-\mathbb{P})\,b^{\dagger}_L(\mathbb{P})\right]e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}}\,d^3p$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\left[v^{(R)}(\mathbb{P})\,b^{\dagger}_R(-\mathbb{P}) + v^{(L)}(\mathbb{P})\,b^{\dagger}_L(-\mathbb{P})\right]e^{\frac{i}{\hbar}\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}}\,d^3p$$

Os coeficientes u e v são análogos dos versores $\hat{e}^{(1)}_{1k}$ e $\hat{e}^{(2)}_{1k}$ do campo eletromagnético. Agora, no entanto, precisamos de pelo menos 4 desses versores, que são $u^{(R)}$, $u^{(L)}$, $v^{(R)}$ e $v^{(L)}$, pois temos elétrons e pósitrons, cada um com duas helicidades. Poderíamos supor que

$$u^{(R)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(L)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(R)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(L)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mas isso não é correto. Vamos apenas supor que esses 4 vetores são normalizados e ortogonais entre si. Determinaremos suas componentes em breve. Assim,

$$0 = u^{(R)\dagger} \cdot u^{(L)} = u^{(R)\dagger} \cdot v^{L} = u^{(R)\dagger} \cdot v^{R} = u^{(L)\dagger} \cdot v^{(L)} = u^{(L)\dagger} v^{(R)} = v^{(L)\dagger} \cdot v^{(R)}$$

$$1 = u^{(R)\dagger} \cdot u^{(R)} = u^{(L)\dagger} \cdot u^{(L)} = v^{(R)\dagger} \cdot v^{(R)} = v^{(L)\dagger} v^{(L)}.$$

Com essas definições podemos escrever

$$\mathbb{P} = \int \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \frac{\hbar}{i} \nabla \hat{\Psi}(\mathbf{r})\, d^3r$$

$$\mathbb{Q} = -\frac{e}{2} \int \left[\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) - \tilde{\Psi}(\mathbf{r}) \tilde{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \right] d^3r$$

$$= -e \int \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r})\, d^3r + e \int \langle 0 | \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) | 0 \rangle\, d^3r$$

onde $\sim$ indica transposto.

PROVA – Invertendo as transformadas de Fourier

obtemos

$$u^R(\mathbb{P})\, a_R(\mathbb{P}) + u^L(\mathbb{P})\, a_L(\mathbb{P}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \hat{\Psi}^{(+)}(\mathbb{r})\, e^{-i\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}/\hbar}\, d^3r$$

$$v^R(\mathbb{P})\, b_R^+(-\mathbb{P}) + v^L(\mathbb{P})\, b_L^+(-\mathbb{P}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \hat{\Psi}^{(-)}(\mathbb{r})\, e^{-i\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}/\hbar}\, d^3r .$$

Somando tudo:

$$u^R(\mathbb{P})\, a^R(\mathbb{P}) + u^L(\mathbb{P})\, a^L(\mathbb{P}) + v^R(\mathbb{P})\, b_R^+(-\mathbb{P}) + v^L(\mathbb{P})\, b_L^+(-\mathbb{P}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \hat{\Psi}(\mathbb{r})\, e^{-i\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}/\hbar}\, d^3r ,$$

Como os coeficientes u, v são ortonormais podemos escrever

$$\mathbb{P} = \int d^3p\, P \left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \hat{\Psi}^+(\mathbb{r}')\, e^{i\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}'/\hbar}\, d^3r' \right] \cdot \left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \hat{\Psi}(\mathbb{r})\, e^{-i\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}/\hbar}\, d^3r \right]$$

$$= \int d^3p\, \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\, \hat{\Psi}^+(\mathbb{r}')\, \hat{\Psi}(\mathbb{r}) \left(i\hbar \nabla_r\, e^{i\mathbb{P}\cdot(\mathbb{r}'-\mathbb{r})/\hbar} \right) d^3r\, d^3r'$$

Integrando por partes,

$$\hat{\Psi}^+(\mathbb{r}')\, \Psi(\mathbb{r}) \left[i\hbar \nabla_r\, e^{i\mathbb{P}\cdot(\mathbb{r}'-\mathbb{r})/\hbar} \right] = i\hbar \nabla_r \left[\hat{\Psi}^+(\mathbb{r}')\, \hat{\Psi}(\mathbb{r})\, e^{\frac{i\mathbb{P}\cdot(\mathbb{r}'-\mathbb{r})}{\hbar}} \right]$$

$$- \hat{\Psi}^+(\mathbb{r}') \left(i\hbar \nabla_r \hat{\Psi}(\mathbb{r}) \right) e^{i\mathbb{P}\cdot(\mathbb{r}'-\mathbb{r})/\hbar} .$$

Desprezando o primeiro termo (supondo que $\hat{\Psi}^+\hat{\Psi}$ vai a zero no infinito), podemos fazer a integral sobre $\mathbb{P}$, que dá $(2\pi\hbar)^3\,\delta(\mathbb{r}-\mathbb{r}')$. A delta mata a integral em $\mathbb{r}'$ e sobra

$$\mathbb{P} = \int d^3r\, \hat{\Psi}^+(\mathbb{r})\, \frac{\hbar}{i} \nabla \hat{\Psi}(\mathbb{r}) .$$

A demonstração das expressões para Q fica como exercício.

Uma dica para a 1ª expressão é re-escrever

$$Q = -\frac{e}{2}\int \Big[a_R^\dagger(\mathbf{p})\, a_R(\mathbf{p}) - a_R(\mathbf{p})\, a_R^\dagger(\mathbf{p}) + a_L^\dagger(\mathbf{p}) a_L(\mathbf{p}) - a_L(\mathbf{p})\, a_L^\dagger(\mathbf{p})$$
$$- b_R^\dagger(\mathbf{p})\, b_R(\mathbf{p}) + b_R(\mathbf{p})\, b_R^\dagger(\mathbf{p}) - b_L^\dagger(\mathbf{p})\, b_L(\mathbf{p}) + b_L(\mathbf{p})\, b_L^\dagger(\mathbf{p}) \Big] d^3p$$

(veja páginas 165a, 165b)

ORDENAMENTO NORMAL ou ORDENAMENTO DE WICK

Definimos

$$-:\hat{\Psi}(\mathbf{r})\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}'): \; = \; :\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\Psi}(\mathbf{r}): \; \equiv \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\Psi}(\mathbf{r}) - \langle 0|\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\Psi}(\mathbf{r})|0\rangle$$

tal que o valor esperado desses produtos no vácuo seja nulo.

Com isso

$$Q = -e\int :\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}): \, d^3r \, .$$

O problema com essas definições é que $\langle 0|\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})|0\rangle$ é infinito. Isso ocorre porque destruir um elétron equivale a criar um pósitron. Em $\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}$ vão aparecer termos como $a^\dagger a$ e $b\, b^\dagger$, de forma que esse valor médio diverge. Vamos voltar a esse ponto mais adiante. Por enquanto vamos ignorar esses infinitos, medindo tudo em relação ao vácuo.

Operador de Carga

(I)
$$Q = e\int\left[-a_R^\dagger(\mathbf{p})a_R(\mathbf{p}) - a_L^\dagger(\mathbf{p})a_L(\mathbf{p}) + b_R^\dagger(\mathbf{p})b_R(\mathbf{p}) + b_L^\dagger(\mathbf{p})b_L(\mathbf{p})\right]d^3p$$

$$= -\frac{e}{2}\int\left[a_R^\dagger a_R + a_L^\dagger a_L + b_R b_R^\dagger + b_L b_L^\dagger\right]d^3p$$
$$+\frac{e}{2}\int\left[a_R a_R^\dagger + a_L a_L^\dagger + b_R^\dagger b_R + b_L^\dagger b_L\right]d^3p$$

$$= -\frac{e}{2}\int d^3r\, \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + \frac{e}{2}\int d^3r\, \tilde{\psi}(\mathbf{r})\tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\, d^3p$$

O operador de carga definido na página 160 tem valor esperado $\langle 0|Q|0\rangle = 0$, onde $|0\rangle$ é definido como o estado sem elétrons ou pósitrons com energia positiva. Note que as constantes C devido às comutações se cancelam. É necessário usar o transposto "~" no segundo termo pois $u^{R\dagger}\cdot u^R = 1 \Rightarrow \tilde{u}^R\cdot\tilde{u}^{R\dagger} = \tilde{u}^R\cdot u^{R*} = 1$, etc.

(II) Partindo de

$$Q = -e\int d^3p\left[a_R^\dagger(\mathbf{p})a_R(\mathbf{p}) + a_L^\dagger(\mathbf{p})a_L(\mathbf{p}) + b_R(-\mathbf{p})b_R^\dagger(-\mathbf{p}) + b_L(-\mathbf{p})b_L^\dagger(-\mathbf{p})\right]$$
$$= -e\int d^3p\left[a_R^\dagger(\mathbf{p})a_R(\mathbf{p}) + a_L^\dagger(\mathbf{p})a_L(\mathbf{p}) + b_R(\mathbf{p})b_R^\dagger(\mathbf{p}) + b_L(\mathbf{p})b_L^\dagger(\mathbf{p})\right]$$

$$= -e\int d^3r\, \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$$

Nesse caso a expressão para Q envolve a constante C que de fato fica sobrando. O valor médio $\langle 0|Q|0\rangle$ agora não é nulo, devido aos operadores $b^\dagger(\mathbf{p})$.

Para corrigir esse problema, que aparece devido à omissão de C, subtraimos de Q seu valor esperado no vácuo:

$$Q = -e\int d^3r\, \Psi^\dagger(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r}) + e\int d^3r\, \langle 0|\,\Psi^\dagger(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r})\,|0\rangle$$

7.2 - A equação de Dirac

Falta agora mostrar que a energia também pode ser escrita na forma

$$\mathcal{H} = \int \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\, H\, \hat{\Psi}(\mathbf{r})\, d^3r$$

onde $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \Psi^{+}(\mathbf{r}) + \Psi^{-}(\mathbf{r})$ é dado na pag. 162 e $\mathcal{H}$ na página 161. Como os vetores u e v são ortogonais, essa igualdade é obtida se impusermos que

$$H\, u^{(R,L)}(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} = E_p\, u^{(R,L)}(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \quad \text{e}$$

$$H\, v^{(R,L)}(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} = -E_p\, v^{(R,L)}(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} .$$

Como a equação de Schrödinger é da forma $i\hbar \dfrac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = H\hat{\Psi}$, H só pode conter derivadas de 1ª ordem no espaço, senão a equação não será invariante de Lorentz. Então procuramos H na forma

$$\boxed{H = c\,\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar}{i}\nabla + \beta m c^2}$$

Como H vai atuar em vetores de 4 componentes, é de se supor que $\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ e β sejam matrizes 4×4.

Com essa escolha as equações de autovalor acima ficam:

$$(c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2)\, u^{(R,L)}(p) = E_p\, u^{(R,L)}$$

$$(c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2)\, v^{(R,L)}(p) = -E_p\, v^{(R,L)}$$

Os vetores u^R, u^L, v^R e v^L são então autovetores de

$$\boxed{H_p = c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2}$$

cujos auto-valores são $\pm E_p$, cada um duplamente degenerado. Para que H seja hermitiano, $\vec{\alpha}$ e β devem ser hermitianas.

Podemos determinar $\vec{\alpha}$ e β usando o fato de que H_p^2 tem apenas um autovalor, E_p^2, 4 vezes degenerado:

$$H_p^2\, \vec{v}(p) = E_p^2\, \vec{v}(p)$$

ou

$$(c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2)(c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2) = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$c^2(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z)^2 + c(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z)\beta + c\beta(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z)$$

$$+\beta^2 m^2 c^4 = c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m^2c^4 .$$

Essa igualdade é satisfeita se

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1$$

$$\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = \alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y = \alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_z = 0$$

$$\alpha_x\beta + \beta\alpha_x = \alpha_y\beta + \beta\alpha_y = \alpha_z\beta + \beta\alpha_z = 0 .$$

Essas equações não tem solução se a dimensão das matrizes for menor do que 4. Em 4 dimensões a solução convencional é

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

onde $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli 2x2.

Veja que os 4 <u>espinores</u> $u^{(R)}, u^{(L)}, v^{(R)}, v^{(L)}$ formam uma base, pois são autovetores de um operador hermiteano. A relação de fecho é

$$u^{(R)}u^{(R)\dagger} + u^{(L)}u^{(L)\dagger} + v^{(R)}v^{(R)\dagger} + v^{(L)}v^{(L)\dagger} = I$$

As relações de anticomutação dos operadores de criação e aniquilação a's e b's (pag. 160) e a ortonormalidade dos u's e v's levam diretamente às relações para os campos:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r})\,\hat{\psi}(\mathbf{r}') + \hat{\psi}(\mathbf{r}')\,\hat{\psi}(\mathbf{r}) = 0$$
$$\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\,\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') + \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}')\,\psi^{\dagger}(\mathbf{r}) = 0$$
$$\hat{\psi}(\mathbf{r})\,\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') + \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}')\,\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

<u>Exercício</u>: verifique essas relações usando as expressões para o campo na página 162.

Exercício. Mostre que

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \mathbb{P}] = \frac{\hbar}{i}\nabla\hat{\Psi}(\mathbf{r})$$

Solução.

$$[\hat{\Psi}, \mathbb{P}] = \int \hat{\Psi}(\mathbf{r})\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}')\frac{\hbar}{i}\nabla_{\mathbf{r}'}\hat{\Psi}(\mathbf{r}')\,d^3r' - \int \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}')\frac{\hbar}{i}\nabla_{\mathbf{r}'}\hat{\Psi}(\mathbf{r}')\hat{\Psi}(\mathbf{r})\,d^3r'$$

No segundo termo fazemos $(\nabla_{\mathbf{r}'}\hat{\Psi}(\mathbf{r}'))\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}'}(\hat{\Psi}(\mathbf{r}')\hat{\Psi}(\mathbf{r}))$

$= -\nabla_{\mathbf{r}'}(\hat{\Psi}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}')) = -\hat{\Psi}(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}'}\hat{\Psi}(\mathbf{r}')$ e

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \mathbb{P}] = \int [\underbrace{\hat{\Psi}(\mathbf{r})\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') + \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}')\hat{\Psi}(\mathbf{r})}_{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}]\frac{\hbar}{i}\nabla_{\mathbf{r}'}\hat{\Psi}(\mathbf{r}')\,d^3r'$$

$$= \frac{\hbar}{i}\nabla\hat{\Psi}(\mathbf{r})$$

Finalmente podemos olhar a dependência temporal dos campos na representação de Heisenberg. Usando

$$\mathcal{H} = \int E_{p'}[a_R^{\dagger}(\mathbf{p}')a_R(\mathbf{p}') + a_L^{\dagger}(\mathbf{p}')a_L(\mathbf{p}') + b_R^{\dagger}(\mathbf{p}')b_R(\mathbf{p}') + b_L^{\dagger}(\mathbf{p}')b_L(\mathbf{p}')]\,d^3p'$$

$$i\hbar\frac{da_R(\mathbf{p})}{dt} = [a_R(\mathbf{p}), \mathcal{H}] = \int E_{p'}\,a_R(\mathbf{p})a_R^{\dagger}(\mathbf{p}')a_R(\mathbf{p}')\,d^3p'$$

$$-\int E_{p'}\,a_R^{\dagger}(\mathbf{p}')a_R(\mathbf{p}')a_R(\mathbf{p})\,d^3p'$$

$$= \int E_{p'}[\underbrace{a_R(\mathbf{p})a_R^{\dagger}(\mathbf{p}') + a_R^{\dagger}(\mathbf{p}')a_R(\mathbf{p})}_{\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')}]a_R(\mathbf{p}')\,d^3p' = E_p\,a_R(\mathbf{p})$$

Fazendo o mesmo para os outros operadores obtemos

$$a_{R,L}(\mathbb{P},t) = a_{R,L}(\mathbb{P})\, e^{-iE_p t/\hbar}$$

$$b^+_{R,L}(\mathbb{P},t) = b^+_{R,L}(\mathbb{P})\, e^{iE_p t/\hbar}$$

e

$$\psi^+(\mathbb{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \left[u^{(R)}(\mathbb{P})\, a_R(\mathbb{P}) + u^{(L)}(\mathbb{P})\, a_L(\mathbb{P}) \right] e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbb{P}\cdot\mathbb{r} - E_p t)}\, d^3\mathbb{P}$$

$$\psi^-(\mathbb{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \left[v^{(R)}(\mathbb{P})\, b^+_R(-\mathbb{P}) + v^{(L)}(\mathbb{P})\, b^+_L(-\mathbb{P}) \right] e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbb{P}\cdot\mathbb{r} + E_p t)}\, d^3\mathbb{P}$$

Como $H u^{(R,L)} e^{i\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}/\hbar} = E_p u^{(R,L)} e^{i\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}/\hbar}$ e $H v^{(R,L)} e^{\frac{i\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}}{\hbar}} = -E_p v^{(R,L)} e^{i\mathbb{P}\cdot\mathbb{r}/\hbar}$, cada componente acima, e portanto o campo como um todo, satisfaz a equação

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbb{r},t)}{\partial t} = \left(\frac{c\hbar}{i} \vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m c^2 \right) \hat{\psi}(\mathbb{r},t)}$$

que é a Equação de Dirac para o elétron.

NOTAÇÃO RELATIVÍSTICA

Usando $x^\mu = (ct, \mathbb{r})$ e $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$ podemos re-escrever a eq. de Dirac na forma

$$\frac{\beta}{c}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} + \beta\vec{\alpha}\cdot\nabla\hat{\psi} + \frac{i\beta^2 mc}{\hbar}\hat{\psi} = 0$$

Definindo as <u>matrizes de Dirac</u>

$$\gamma^0 = \beta \quad , \quad \gamma^1 = \beta\alpha_x \quad , \gamma^2 = \beta\alpha_y \quad , \gamma^3 = \beta\alpha_z$$

e

$$K = mc/\hbar$$

obtemos

$$\boxed{\gamma^\mu \frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial x^\mu} + iK\hat{\Psi} = 0}$$

onde está implícita a soma sobre $\mu = 0, 1, 2, 3$. Notações ainda mais compactas podem ser usadas, como $\partial/\partial x^\mu \rightarrow \partial_\mu$ ou ainda $\gamma^\mu \partial_\mu = \not{\partial}$. Nesse caso a equação de Dirac fica

$$(\not{\partial} + iK)\hat{\Psi} = 0 .$$

As relações de anti-comutação para β e $\vec{\alpha}$ ficam também mais compactas em termos dos γ's:

$$\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}}$$

Por exemplo, para $\mu = \nu = 0$

$$2\gamma^0\gamma^0 = 2\beta^2 = 2$$

e para $\mu = \nu = 1$

$$2\gamma^1\gamma^1 = 2\beta\alpha_x\beta\alpha_x = -2\beta^2\alpha_x^2 = -2 .$$

Os operadores para o 4-vetor energia momento são

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbb{P}\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\nabla\right)$$

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbb{P}\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, i\hbar\nabla\right).$$

INTERAÇÃO COM CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

Para elétrons, $q = -e$, fazemos

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu \quad ; \quad p_\mu \rightarrow p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu$$

$$A^\mu = (\phi, \mathbb{A}) \quad ; \quad A_\mu = (\phi, -\mathbb{A})$$

Como $p_\mu = i\hbar\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, +\nabla\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$$p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu = i\hbar\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie}{\hbar c}\phi, \nabla + \frac{ie\mathbb{A}}{\hbar c}\right) = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)$$

Assim obtemos

$$\boxed{\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\hat{\Psi} + i\kappa\hat{\Psi} = 0}$$

ou, multiplicando tudo por $i\hbar c\beta$,

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\hat{\Psi} + \left(i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla - e\vec{\alpha}\cdot\mathbb{A}\right)\hat{\Psi} - \beta mc^2\hat{\Psi} = 0$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial t} = \left[c\vec{\alpha}\cdot\left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbb{A}\right) - e\phi + \beta mc^2\right]\hat{\Psi}}$$

EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE

Definimos o campo adjunto de Dirac por

$$\boxed{\bar{\Psi} = \Psi^{+} \gamma^{0}}$$

Para obter a equação de continuidade vamos conjugar a eq. de Dirac:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \right) \hat{\Psi}^{+} (\gamma^{\mu})^{+} - i\kappa \hat{\Psi}^{+} = 0$$

Multiplicando à direita por γ^{0} vemos que

$$\hat{\Psi}^{+} (\gamma^{0})^{+} \gamma^{0} = \hat{\Psi}^{+} (\gamma^{0}) \gamma^{0} = \bar{\Psi} \gamma^{0}$$

$$\hat{\Psi}^{+} (\gamma^{k})^{+} \gamma^{0} = -\hat{\Psi}^{+} (\gamma^{k}) \gamma^{0} = \hat{\Psi}^{+} \gamma^{0} \gamma^{k} = \bar{\Psi} \gamma^{k} \quad , k=1,2,3$$

e

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \right) \bar{\Psi} \gamma^{\mu} - i\kappa \bar{\Psi} = 0}$$

Multiplicando à direita por Ψ e somando com a equação original multiplicada à esquerda por $\bar{\Psi}$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu}) \Psi + \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Psi) = 0 \quad \text{cujo transposto é}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\tilde{\Psi} \tilde{\gamma}^{\mu} \tilde{\bar{\Psi}}) = 0$$

Essas equações podem ser convenientemente combinadas na forma

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[-\frac{ec}{2}\left(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi - \tilde{\Psi}\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\bar{\Psi}}\right)\right] \equiv \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

onde a corrente J^μ é

$$J^\mu = (c\rho, \mathbb{J}) = -ec : \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi :$$

7.3 - Invariância Relativística

A equação de Dirac deve ser invariante por transformações de Lorentz. Se em um referencial inercial R vale

$$\gamma^\mu \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbb{r},t)}{\partial x^\mu} + iK\hat{\Psi}(\mathbb{r},t) = 0$$

então em outro referencial inercial R' deve valer

$$\gamma^\mu \frac{\partial \Psi'(\mathbb{r}',t')}{\partial x'^\mu} + iK\hat{\Psi}'(\mathbb{r}',t') = 0$$

onde

$$\hat{\Psi}'(\mathbb{r}',t') = U^+\hat{\Psi}(\mathbb{r}',t')U = S\hat{\Psi}(\mathbb{r},t)$$

e S é uma matriz 4x4 que define a transformação e U é um operador unitário. Essa equação diz que o operador transformado é uma combinação linear que mistura as várias componentes do spinor original. Nessa equação $(\mathbb{r}',t')$ está relacionado à $(\mathbb{r},t)$ pela transformação de Lorentz. Veja também SAKURAI, Ad. Quant. Mech. pag. 95-99

Uma transformação de Lorentz geral é dada por

$$\boxed{x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + b^{\mu}}$$

de tal forma que o <u>intervalo</u>

$$dx^{\nu} dx_{\nu} = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

seja preservado, i.e.,

$$dx'^{\mu} dx'_{\mu} = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = dx^{\nu} dx_{\nu} .$$

Isso implica que

$$\boxed{a^{\mu}{}_{\lambda}\, a_{\mu}{}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\lambda}}$$

Lembre que $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ e $g_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} = g_{\mu}{}^{\nu}$

é a métrica de Minkowski. Além disso

$$g_{\mu\nu}\, a^{\mu}{}_{\lambda} \equiv a_{\nu\lambda} \quad \text{etc}$$

Escrevemos

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\, a^{\nu}{}_{\mu} .$$

Como a inversa de $a^{\mu}{}_{\nu}$ é $a_{\mu}{}^{\nu}$ podemos inverter a transformação:

$$a_{\mu}{}^{\lambda} x'^{\mu} = a_{\mu}{}^{\lambda} a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a_{\mu}{}^{\lambda} b^{\mu}$$

$$= x^{\lambda} + \underbrace{a_{\mu}{}^{\lambda} b^{\mu}}_{\equiv -b'^{\lambda}} \quad \text{e}$$

$$x^{\mu} = a_{\nu}{}^{\mu} x'^{\nu} + b'^{\mu}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = a_{\mu}{}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} .$$

Vamos então transformar a equação de Dirac:

$$\gamma^{\mu} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x^{\mu}} + i\kappa \hat{\psi} = 0$$

$$\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} a^{\nu}{}_{\mu} (S^{-1}\psi') + i\kappa (S^{-1}\psi') = 0$$

$$S \gamma^{\mu} a^{\nu}{}_{\mu} S^{-1} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} (\psi') + i\kappa\psi' = 0$$

e a condição para invariância é

$$S \gamma^{\mu} a^{\nu}{}_{\mu} S^{-1} \equiv \gamma^{\nu}$$

ou

$$\boxed{a^{\nu}{}_{\mu} \gamma^{\mu} = S^{-1} \gamma^{\nu} S}$$

Vamos agora usar essa equação para escrever S explicitamente para uma dada transformação $a^{\nu}{}_{\mu}$.

Consideramos uma transformação infinitesimal

$$a^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$$

e sua correspondente matriz

$$S = 1 + dS .$$

Usamos :

(1) $$a^{\mu}{}_{\lambda}\, a_{\mu}{}^{\nu} = (\delta^{\mu}{}_{\lambda} + \varepsilon^{\mu}{}_{\lambda})(\delta_{\mu}{}^{\nu} + \varepsilon_{\mu}{}^{\nu}) \equiv \delta^{\nu}{}_{\lambda} \quad \text{ou}$$

$$\varepsilon^{\mu}{}_{\lambda}\,\delta_{\mu}{}^{\nu} = -\,\delta^{\mu}{}_{\lambda}\,\varepsilon_{\mu}{}^{\nu} \rightarrow \boxed{\varepsilon^{\nu}{}_{\lambda} = -\,\varepsilon_{\lambda}{}^{\nu}}$$

(2) $$a^{\nu}{}_{\mu}\,\gamma^{\mu} = S^{-1}\gamma^{\nu} S$$

$$(\delta^{\nu}{}_{\mu} + \varepsilon^{\nu}{}_{\mu})\gamma^{\mu} = (1 - dS)\,\gamma^{\nu}(1 + dS)$$

$$\varepsilon^{\nu}{}_{\mu}\,\gamma^{\mu} = -\,dS\,\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} dS \quad \text{ou} \quad \boxed{[\gamma^{\nu}, dS] = \varepsilon^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu}}$$

cuja solução é $$\boxed{dS = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}}$$

PROVA $$[\gamma^{\lambda}, dS] = \frac{1}{4}\gamma^{\lambda}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}(-\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda} + 2g^{\mu\lambda})\gamma^{\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}(-\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu} + 2g^{\lambda\nu})$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}g^{\mu\lambda}\gamma^{\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}g^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda}{}_{\nu}\gamma^{\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu}{}^{\lambda}\gamma^{\mu} = \varepsilon^{\lambda}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

$$\Rightarrow \quad S = 1 + \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$$

Um conjunto de transformações particularmente importante é o sub-grupo das rotações, que está associado ao momento angular.

Considere então

$$t' = t$$
$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\varphi\, \hat{n} \times \mathbf{r}$$

que representa uma rotação por $d\varphi$ na direção $\hat{n}$. Abrindo o produto vetorial encontramos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left[\mathbb{1} + \underbrace{d\varphi \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ +n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}}_{\varepsilon^{\mu}{}_{\nu}\ ;\ \mu,\nu = 1,2,3} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e $\qquad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$. Vamos também definir

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right] = i\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - g^{\mu\nu}\right) .$$

Assim,

$$dS = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\left[-i\Sigma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\right] = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}$$

pois $g^{\mu\nu} \neq 0$ só na diagonal, onde $\varepsilon_{\mu\nu} = 0$. Pela sua definição como um comutador, $\Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu}$ e só existem 3 valores de Σ independentes, que vamos re-nomear para:

$$\Sigma_x = \Sigma^{23} \quad ; \quad \Sigma_y = \Sigma^{31} \quad ; \quad \Sigma_z = \Sigma^{12}$$

---

* OBS. Note que $\varepsilon_{00} = 0$ e $\Sigma^{00} = 0$. Podemos então somar sobre μ, ν de 1 a 4 que apenas a parte espacial vai contribuir. De fato todas as componentes $\varepsilon_{0\nu} = \varepsilon_{\nu 0} = 0$.

Assim obtemos ($\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$)

$$dS = -\frac{i}{4}\left[+n_z \Sigma^{12} - n_y \Sigma^{13} - n_z \Sigma^{21} + n_x \Sigma^{23} + n_y \Sigma^{31} - n_x \Sigma^{32} \right] d\varphi$$

$$= -\frac{i}{2}\left[n_x \Sigma_x + n_y \Sigma_y + n_z \Sigma_z \right] d\varphi = -\frac{i}{2}\, \hat{n}\cdot\vec{\Sigma}\, d\varphi$$

Exercício. Mostre que

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \qquad k = 1,2,3$$

Exercício. Mostre que

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Finalmente voltamos à transformação do operador do campo

$$\hat{\Psi}'(\mathbb{r}',t') = U^{+}\hat{\Psi}(\mathbb{r}',t')U = S\hat{\Psi}(\mathbb{r},t)$$

com $\quad S = 1 - \frac{i\,d\varphi}{2}\hat{n}\cdot\vec{\Sigma}$

U = transf. unitária próxima da identidade

$\mathbb{r}' = \mathbb{r} + d\varphi\, \hat{n}\times\mathbb{r}$

$t' = t$

$$U^{+}\hat{\Psi}(\mathbb{r} + d\varphi\,\hat{n}\times\mathbb{r}, t)U = \left(1 - \frac{i\,d\varphi}{2}\hat{n}\cdot\vec{\Sigma}\right)\hat{\Psi}(\mathbb{r},t)$$

$$U^{+}\Psi(\mathbb{r},t)U + \underbrace{U^{+}\left[d\varphi\, \nabla\hat{\Psi}\cdot(\hat{n}\times\mathbb{r})\right]U}_{\simeq\, d\varphi\, \nabla\hat{\Psi}\cdot(\hat{n}\times\mathbb{r})} = \hat{\Psi}(\mathbb{r},t) - \frac{i\,d\varphi}{2}\,\hat{n}\cdot\vec{\Sigma}\,\hat{\Psi}(\mathbb{r},t)$$

$$U^{+}\Psi(\mathbb{r},t)U = \left[1 - \frac{i\,d\varphi}{2}\,\hat{n}\cdot\vec{\Sigma} - d\varphi\,\hat{n}\cdot(\mathbb{r}\times\nabla)\right]\hat{\Psi}(\mathbb{r},t)$$

$$= \left[1 - \frac{i}{\hbar}d\varphi\,\hat{n}\cdot\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} + \mathbb{L}\right)\right]\hat{\Psi}(\mathbb{r},t)$$

Compondo várias transformações infinitesimais na direção $\hat{n}$ e definindo

$$\boxed{\mathbb{J} = \mathbb{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}}$$

como o momento angular total, vemos que

$$\Psi'(\mathbb{r},t) = e^{-\frac{i\varphi}{\hbar}\hat{n}\cdot\mathbb{J}}\,\Psi(\mathbb{r},t).$$

O operador $\vec{J}$ do campo é então

$$\boxed{\vec{J} = \int \Psi^{+}(\mathbb{r})\left[\mathbb{r}\times\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right]\Psi(\mathbb{r})\, d^3r}$$

As transformações de Lorentz próprias podem ser escritas com combinação de rotações e translações espaço-temporais correspondentes ao movimento uniforme.

Vamos então considerar o caso especial de deslocamento na direção x com $v = c \tanh \chi$. Com essa escolha

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \cosh \chi$$

e

$$\frac{v}{c}\Gamma = \sinh \chi$$

de forma que

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e temos que encontrar S tal que

$$S^{-1}\gamma^\lambda S = a^\lambda{}_\mu \gamma^\mu .$$

A solução desse sistema de equações é

$$\boxed{S = e^{-\frac{\chi}{2}\alpha_x} = \cosh\frac{\chi}{2} - \alpha_x \sinh\frac{\chi}{2}}$$

e podemos verificar isso diretamente:

$$S^{-1}\gamma^0 S = \left(\cosh\frac{\chi}{2} + \alpha_x \sinh\frac{\chi}{2}\right)\beta\left(\cosh\frac{\chi}{2} - \alpha_x \sinh\frac{\chi}{2}\right)$$

$$= \beta\cosh^2\frac{\chi}{2} - \alpha_x\beta\alpha_x\sinh^2\frac{\chi}{2} + \cosh\frac{\chi}{2}\sinh\frac{\chi}{2}\left(\alpha_x\beta - \beta\alpha_x\right)$$

$$= \beta\left(\cosh^2\frac{\chi}{2} + \sinh^2\frac{\chi}{2}\right) - \beta\alpha_x\, 2\cosh\frac{\chi}{2}\sinh\frac{\chi}{2}$$

$$= \beta\cosh\chi - \beta\alpha_x\sinh\chi = \gamma^0 a^0{}_0 + \gamma^1 a^0{}_1$$

Da mesma forma

$$S^{-1}\gamma^1 S = -\sinh\chi\,\gamma^0 + \cosh\chi\,\gamma^1 = \gamma^0 a^1{}_0 + \gamma^1 a^1{}_1$$

$$S^{-1}\gamma^2 S = \gamma^2 \qquad \text{e} \qquad S^{-1}\gamma^3 S = \gamma^3 .$$

Finalmente vamos considerar uma transformação imprópria, onde $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ (reflexão, ou paridade). A inversão temporal será vista depois.

Nesse caso

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e as equações para S são

$$S^{-1}\gamma^0 S = \gamma^0$$

$$S^{-1}\vec{\gamma}\, S = -\vec{\gamma}$$

É fácil ver que uma solução é $S = \beta = \gamma^0$:

$$S^{-1}\gamma^0 S = \gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0$$

$$S^{-1}\gamma^k S = \gamma^0\gamma^k\gamma^0 = -\gamma^k\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^k .$$

A inversão é então dada por

$$\boxed{U_P\,\Psi(\mathbf{r},t)\,U_P^{+} = \gamma^0\,\Psi(-\mathbf{r},t)}$$

(veja pag. 174)

Para terminar essa seção vamos definir

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \text{hermiteana}$$

cujas propriedades são

$$\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0$$

$$(\gamma^5)^2 = 1$$

$$[\gamma^5, \Sigma^{\mu\nu}] = 0$$

Usando ainda que, para toda transformação de Lorentz,

$$S^\dagger\gamma^0 S = \gamma^0 \quad , \text{ ou } \quad S^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$$

(prove para $S = e^{-\frac{\chi}{2}\alpha_x}$) temos

$$a^\lambda{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}\gamma^\lambda S$$

$$a^\lambda{}_\mu \gamma^0\gamma^\mu = \gamma^0 S^{-1}\gamma^\lambda S = S^\dagger\gamma^0\gamma^\lambda S .$$

Com isso podemos mostrar que, sob transformações de Lorentz:

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r},t) = \text{escalar}$$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r},t)\gamma^\mu\Psi(\mathbf{r},t) = \text{vetor}$$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r},t)\Sigma^{\mu\nu}\Psi(\mathbf{r},t) = \text{tensor anti-simétrico de grau 2}$$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r},t)\gamma^5\gamma^\mu\Psi(\mathbf{r},t) = \text{vetor axial (pseudo-vetor)}$$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r},t)\gamma^5\Psi(\mathbf{r},t) = \text{pseudo-escalar}$$

Vamos checar algumas, usando

$$U^+ \psi(r',t') U = \psi'(r',t') = S\psi(r,t)$$
$$U^+ \psi^+(r',t') U = \psi^{+'}(r',t') = \psi^+(r,t) S^+$$

(A) $\bar{\Psi}'\psi' = \psi^{+'}\gamma^0\psi' = \psi^+ S^+\gamma^0 S\psi = \psi^+\gamma^0\psi = \bar{\Psi}\psi$

(B) $\bar{\Psi}'\gamma^\mu\psi' = \psi^{+'}\gamma^0\gamma^\mu\psi' = \psi^+ S^+\gamma^0\gamma^\mu S\psi = a^\mu{}_\nu \psi^+\gamma^0\gamma^\nu\psi$

$= a^\mu{}_\nu \bar{\Psi}\gamma^\nu\psi$

(E) $\bar{\Psi}'\gamma^5\psi' = \psi^{+'}\gamma^0\gamma^5\psi' = \psi^+ S^+\gamma^0\gamma^5 S\psi$

Temos que olhar caso-a-caso

(E1) Rotações, $S = e^{-\frac{i\varphi}{2}\hat{n}\cdot\vec{\Sigma}}$ e como $[\gamma^5, \Sigma^{\mu\nu}] = 0$

$[\gamma^5, S] = 0$. Então $S^+\gamma^0\gamma^5 S = S^+\gamma^0 S\gamma^5 = \gamma^0\gamma^5$

e $\bar{\Psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\Psi}\gamma^5\psi$

(E2) Lorentz, $S = e^{-\frac{\chi}{2}\alpha_x}$ e $[\gamma^5, \alpha_x] = \gamma^5\gamma^0\gamma^1 - \gamma^0\gamma^1\gamma^5 = 0$

pois $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$. Então $S^+\gamma^0\gamma^5 S = \gamma^0\gamma^5$ e

$\bar{\Psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\Psi}\gamma^5\psi$

(E3) Paridade, $S = \beta = \gamma^0$, $S^+\gamma^0\gamma^5 S = \gamma^0\gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5$

e $\bar{\Psi}'\gamma^5\psi' = -\bar{\Psi}\gamma^5\psi \Rightarrow$

$\bar{\Psi}\gamma^5\psi$ é um pseudo-escalar

O conjunto de 16 matrizes, $I, \gamma^\mu, \Sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\gamma^\mu, \gamma^5$ formam uma base no espaço de matrizes 4x4

7.4 - Soluções de Campo Livre da Equação de Dirac

Analogamente ao caso da partícula livre NÃO-relativística, vamos agora construir soluções do campo livre, sem interações. A equação que temos que resolver é

$$H_{\mathbb{P}}\, u(\mathbb{P}) = (c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2)\, u(\mathbb{P}) = E\, u(\mathbb{P})$$

ou

$$\begin{pmatrix} mc^2 & c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -mc^2 \end{pmatrix} u(\mathbb{P}) = E\, u(\mathbb{P}) \,.$$

Explicitamente obtemos

$$\begin{pmatrix} mc^2 & 0 & cp_z & c(p_x - ip_y) \\ 0 & mc^2 & c(p_x+ip_y) & -cp_z \\ cp_z & c(p_x-ip_y) & -mc^2 & 0 \\ c(p_x+ip_y) & -cp_z & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} ,$$

Ao invéz de resolvermos essas equações diretamente, vamos considerar o caso particular em que $\vec{p} = (0, 0, p_z)$ apenas.
Nesse caso o sistema de 4 equações acima simplifica para

$$mc^2 u_1 + cp_3 u_3 = E u_1$$
$$mc^2 u_2 - cp_3 u_4 = E u_2$$
$$-mc^2 u_3 + cp_3 u_1 = E u_3$$
$$-mc^2 u_4 - cp_3 u_2 = E u_4$$

As soluções independentes são obtidas fazendo $u_2 = u_4 = 0$ e depois $u_1 = u_3 = 0$. No primeiro caso obtemos

$$mc^2 u_1 + cp_3 u_3 = E u_1$$
$$-mc^2 u_3 + cp_3 u_1 = E u_3$$

Da primeira equação vem $u_3 = u_1 (E - mc^2) / cp_3$, que substituindo na segunda dá

$$cp_3 u_1 = (E + mc^2) u_3 = (E + mc^2)(E - mc^2) \frac{u_1}{cp_3}$$

que tem solução se

$$c^2 p_3^2 = E^2 - m^2 c^4 \quad , \text{ou} \quad E = \pm E_p = \pm\sqrt{p_3^2 c^2 + m^2 c^4} .$$

Para $E = +E_p$, é conveniente fixar $u_1 = 1$, de onde vem

$$u_3^+ = \frac{E_p - mc^2}{cp_3} = \frac{cp_3}{E_p + mc^2}$$

Para $E = -E_p$, fixamos $u_3 = 1$ e

$$u_1^- = \frac{cp_3}{-E_p - mc^2} = -\frac{cp_3}{E_p + mc^2} .$$

As outras duas soluções são obtidas de modo análogo, de forma que o resultado final é

$$u^{(R)} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_p+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad u^{(L)} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-cp_z}{E_p+mc^2} \end{pmatrix}$$

$$v^{(R)} \propto \begin{pmatrix} \frac{-cp_z}{E_p+mc^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v^{(L)} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{cp_z}{E_p+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Onde $u^{(R)}$ e $u^{(L)}$ tem $E = +E_p$ e $v^{(R)}$ e $v^{(L)}$ tem $E = -E_p$.

Os indices (R) e (L) indicam que esses estados são também auto-estados do operador de helicidade $\vec{\Sigma} \cdot \vec{P} = \Sigma_z$. De fato, como

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

isso pode ser facilmente verificado.

<u>Exercício</u>: considere as soluções acima para o caso $p_z = 0$, que podem ser obtidos trivialmente da equação de autovalor. Mostre que as soluções para $p_3 \neq 0$ podem ser obtidos aplicando o operador de transformação de Lorentz $S = e^{-\frac{1}{2}\chi\alpha_z}$ nesses vetores. (veja pag. 181).

Veja que, assim como acontece com a partícula livre não-relativística, as soluções $e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$ são degeneradas. Partindo da equação de Dirac

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = H\Psi(\mathbf{r},t)$$

e fazendo $\Psi(\mathbf{r},t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar} + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\, \upsilon$ obtemos

$$(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2)\upsilon = E\upsilon$$

Para $\vec{p} = p\hat{z}$ as soluções completas são

$$\Psi_{MR}(\mathbf{r},t) = e^{-\frac{iE_pt}{\hbar} + \frac{ipz}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp}{E_p+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$ → partícula com $E = E_p$, spin $+\hbar/2$ movendo-se para a direita

$$\Psi_{ML}(\mathbf{r},t) = e^{-\frac{iE_pt}{\hbar} + \frac{ipz}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-cp}{E_p+mc^2} \end{pmatrix}$$ → $E = E_p$, spin $-\hbar/2$ movendo-se para a direita

$$\Psi_{VR}(\mathbf{r},t) = e^{\frac{iE_pt}{\hbar} + \frac{ipz}{\hbar}} \begin{pmatrix} \frac{-cp}{E_p+mc^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ → $E = -E_p$, spin $+\hbar/2$ movendo-se para a <u>esquerda</u>

$$\Psi_{VL}(\mathbf{r},t) = e^{\frac{iE_pt}{\hbar} + \frac{ipz}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{cp}{E_p+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ → $E = -E_p$, spin $-\hbar/2$ movendo-se para a <u>esquerda</u>

Fazendo $\vec{p} = -p\hat{z}$ implica em soluções análogas onde Ψ_{MR} e Ψ_{ML} representam partículas com $E = E_p$ movendo-se para a esquerda e Ψ_{VR}, Ψ_{VL} partículas com $E = -E_p$ movendo-se p/ a direita.

Solução do Exercício

$$S_z = \cosh \chi/2 - \alpha_z \sinh \chi/2 \equiv C - \alpha_z S$$

Vamos considerar $\operatorname{tgh} \chi = -v/c$, com o novo referencial movendo-se p/ a esquerda. A matriz de transformação é

$$S_z = \begin{pmatrix} C & 0 & -S & 0 \\ 0 & C & 0 & S \\ -S & 0 & C & 0 \\ 0 & S & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$$

onde $a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & -S \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S & 0 & 0 & C \end{pmatrix}$

Aplicando em $u_{R0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_{R0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ obtemos

$$u_R = \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ -S \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -T \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_R = \begin{pmatrix} -S \\ 0 \\ C \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$T \equiv \operatorname{tgh} \chi/2$. Escrevendo

$$\operatorname{tgh} \chi = \frac{2 \operatorname{tgh} \chi/2}{1 + \operatorname{tgh}^2 \chi/2} \quad \text{e chamando} \quad \operatorname{tgh} \chi \equiv \xi = -v/c$$

$$\xi(1 + T^2) = 2T \quad \rightarrow \quad T^2 - 2\xi^{-1} T + 1 = 0$$

$$T = \xi^{-1} - \sqrt{\xi^{-2} - 1} = \xi^{-1} - \xi^{-1}\sqrt{1 - \xi^2} = -\frac{c}{v} + \frac{c}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

O sinal negativo é escolhido para que $T \to 0$ quando $\xi^2 = v^2/c^2 \to 0$.

Essa escolha de direção, com z' movendo-se para a esquerda de z, implica que a partícula será vista movendo-se p/ a direita em R'.

Usando $p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ obtemos $p^2 - \frac{p^2v^2}{c^2} = m^2v^2$ e

$$p^2 = \frac{v^2}{c^2}\left(m^2c^2 + p^2\right) \rightarrow \quad v = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^2+p^2}} = \frac{pc^2}{E_p}$$

$$1 - v^2/c^2 = 1 - \frac{p^2c^2}{E_p^2} = \frac{E_p^2 - p^2c^2}{E_p^2} = \frac{m^2c^4}{E_p^2} \rightarrow \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{mc^2}{E_p} \quad e$$

$$T = -\frac{E_p}{pc}\left[1 - \frac{mc^2}{E_p}\right] = -\frac{1}{pc}\left[E_p - mc^2\right] = -\frac{1}{pc}\,\frac{E_p^2 - m^2c^4}{E_p + mc^2} = -\frac{pc}{E_p+mc^2}.$$

Finalmente, para escrever o novo spinor em termos das novas coordenadas precisamos escrever $\frac{mc^2t}{\hbar}$ em função de t' e z'. Usamos a transformação inversa, que é dada por $\chi \rightarrow -\chi$:

$$ct = ct'\cosh\chi + z'\sinh\chi \;;$$

$$\cosh\chi = \frac{1}{1-\operatorname{tgh}^2\chi} = \frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{E_p}{mc^2}$$

$$\sinh\chi = \operatorname{tgh}\chi\cosh\chi = -\frac{pc}{E_p}\cdot\frac{E_p}{mc^2} = -\frac{p}{mc}$$

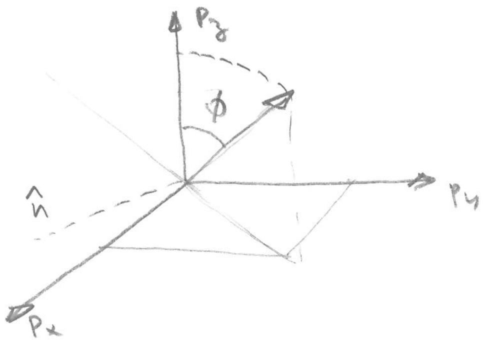
$$t = \frac{E_p}{mc^2}t' - \frac{z'p}{mc^2} \quad e \quad \frac{mc^2t}{\hbar} = \frac{E_p t'}{\hbar} - \frac{z'p}{\hbar}$$

A soluções representam partículas com $E = \pm E_p$, todas movendo-se p/a direita:

$$u_R = e^{-\frac{iE_pt'}{\hbar} + \frac{iz'p}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ +\frac{pc}{E_p+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_R = e^{\frac{iE_pt'}{\hbar} - \frac{iz'p}{\hbar}} \begin{pmatrix} +\frac{pc}{E_p+mc^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_L = e^{-\frac{iE_pt'}{\hbar} + \frac{iz'p}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{pc}{E_p+mc^2} \end{pmatrix} \qquad v_L = e^{\frac{iE_pt'}{\hbar} - \frac{iz'p}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{cp}{E_p+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A solução para $\vec{P} = (P_x, P_y, P_3)$ geral pode ser obtida com uma rotação que leva $\vec{P} = P\hat{z}$ à $\vec{P} = (P_x, P_y, P_3)$:



O eixo de rotação fica no plano x-y e deve ser ortogonal à $(P_x, P_y, 0)$ $\Rightarrow$

$$\hat{n} = \frac{(-P_y, P_x, 0)}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}$$

e

$$\cos\phi = \frac{P_z}{P}.$$

Dessa forma, o operador de rotação é

$$S = \exp\left\{-i\frac{\phi}{2}\frac{-P_y\Sigma_x + P_x\Sigma_y}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}}\right\} = e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{n}\cdot\vec{\Sigma}}$$

$$= I\cos\phi/2 - i\hat{n}\cdot\vec{\Sigma}\sin\phi/2$$

$$= I\cos\phi 2 + i\frac{(P_y\Sigma_x - P_x\Sigma_y)}{\sqrt{P_x^2+P_y^2}}\sin\phi/2$$

A matriz importante é

$$P_y\Sigma_x - P_x\Sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & P_y+iP_x & 0 & 0 \\ P_y-iP_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_y+iP_x \\ 0 & 0 & P_y-iP_x & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando em $u^{(R)}$ obtemos (temos que fazer $p_3 \to p$ antes)

$$u^{(R)}(\mathbb{P}) \simeq \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 \\ \frac{p_x+ip_y}{\sqrt{p^2-p_3^2}} \sin\varphi/2 \\ \frac{cp}{E_p+mc^2}\cos\varphi/2 \\ \frac{p_x+ip_y}{\sqrt{p^2-p_3^2}} \sin\varphi/2 \; \frac{cp}{E_p+mc^2} \end{pmatrix}$$

Multiplicando todos os termos por $2\cos\varphi/2$ vemos que

$$2\cos^2\varphi/2 = 1+\cos\varphi = 1+p_3/p$$

$$\frac{2\sin\varphi/2\cos\varphi/2}{\sqrt{p^2-p_3^2}} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{p^2-p_3^2}} = \frac{\sqrt{1-p_3^2/p^2}}{\sqrt{p^2-p_3^2}} = \frac{1}{p}$$

Chamando $\hat{p} = \vec{p}/p = (n_x, n_y, n_3)$ obtemos

$$u^{(R)}(\mathbb{P}) \simeq \begin{pmatrix} 1+n_z \\ n_x+in_y \\ \frac{cp}{E_p+mc^2}(1+n_z) \\ \frac{cp}{E_p+mc^2}(n_x+in_y) \end{pmatrix}$$

Exercício: Obtenha $u^{(L)}$, $v^{(R)}$ e $v^{(L)}$.

Para terminar essa seção notamos que a matriz

$$B_+(\mathbb{P}) = u^{(R)}(\mathbb{P})\, u^{(R)+}(\mathbb{P}) + u^{(L)}(\mathbb{P})\, u^{(L)+}(\mathbb{P})$$

(construída com díadas) tem as seguintes propriedades:

$$B_+(\mathbb{P})\, v(\mathbb{P}) = 0 \qquad \text{se } v(\mathbb{P}) = \text{espinor com auto-valor } E = -E_p$$

$$B_+(\mathbb{P})\, v(\mathbb{P}) = v(\mathbb{P}) \qquad \text{se } v(\mathbb{P}) = \text{espinor com auto-valor } E = +E_p$$

Essas propriedades seguem da ortonormalização dos auto-vetores $u^{(R,L)}$ e $v^{(R,L)}$. Podemos então escrever

$$B_+(\mathbb{P}) = \frac{E_p + c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2}{2E_p}$$

e, analogamente

$$B_-(\mathbb{P}) = \frac{E_p - c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - \beta mc^2}{2E_p}$$

que são projetores nos sub-espaços $+E_p$ e $-E_p$ respectivamente.

7.5 - Conjugação de Carga, Reversão Temporal e Paridade

Nesta seção vamos mostrar que operações bastante simples são responsáveis pela troca de carga, paridade e reversão temporal. Cada uma dessas operações implicará em uma propriedade importante do campo de elétrons e pósitrons.

I - CONJUGAÇÃO DE CARGA

Vamos re-escrever as equações de Dirac p/ u e v:

$$\left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right) u^{(R,L)}_{(\mathbb{P})} = E_p\, u^{(R,L)}_{(\mathbb{P})}$$

$$\left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right) v^{(R,L)}_{(\mathbb{P})} = -E_p\, v^{(R,L)}_{(\mathbb{P})}$$

$$E_p = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Tomamos o complexo conjugado da 2ª equação e fazemos $\mathbb{P} \to -\mathbb{P}$:

$$\left(-c\vec{\alpha}^{*}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right) v^{(R,L)*}_{(-\mathbb{P})} = -E_p\, v^{(R,L)*}_{(-\mathbb{P})}$$

(lembre que β é real). Se existir uma matriz C tal que

$$C\vec{\alpha}^{*} = \vec{\alpha}\, C \quad , \quad C\beta = -\beta C$$

então, multiplicando por C e por -1 obtemos

$$\left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\left(C v^{(R,L)*}_{(-\mathbb{P})}\right) = E_p\left(C v^{(R,L)*}_{(-\mathbb{P})}\right)$$

e $C v^{(R,L)*}_{(-\mathbb{P})}$ satisfaz a mesma equação que $u^{(R,L)}_{(\mathbb{P})}$.

Além disso, como $\vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha}$ e $\gamma^0 = \beta$,

$$\boxed{C_1^{-1}\gamma^0 C_1 = -\gamma^0}$$

e

$$\vec{\gamma}C = \beta\vec{\alpha}C = \beta C\vec{\alpha}^* = -C\beta\vec{\alpha}^* = C(-\beta\alpha)^* = -C\gamma^*$$

Como $\vec{\gamma}^+ = -\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}^* = -\tilde{\vec{\gamma}}$ ($\sim$ = transposto). Então

$$\boxed{C^{-1}\vec{\gamma}C = \tilde{\vec{\gamma}}}$$

Finalmente,

$$C^{-1}\gamma^k\gamma^l C = C^{-1}\gamma^k C C^{-1}\gamma^l C = \tilde{\gamma}^k\tilde{\gamma}^l = \gamma^{k*}\gamma^{l*} \quad \text{e}$$

$$C^{-1}\Sigma^{kl}C = \frac{i}{2}C^{-1}\left[\gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k\right]C = \frac{i}{2}\left[\gamma^{k*}\gamma^{l*} - \gamma^{l*}\gamma^{k*}\right] = -\Sigma^{kl*}$$

e

$$\boxed{C^{-1}\Sigma C = -\Sigma^*}$$

Com isso vemos que essa transformação preserva a helicidade

$$(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p})\,C\,\nu^{(R)*}_{(-p)} = -C(\Sigma\cdot\vec{p})^*\,\nu^{(R)*}_{(-p)} = C\left[\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}'\,\nu^{(R)}_{(p')}\right]^*$$

$$= C\,\nu^{(R)*}_{(p')} = C\,\nu^{(R)*}_{(-p)} \quad ; \quad p' = -p$$

$$(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p})\,C\,\nu^{(L)*}_{(-p)} = C\left[\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}'\,\nu^{(L)}_{(p')}\right]^* = -C\,\nu^{(L)*}_{(-p)}$$

e podemos escrever

$$\boxed{\begin{aligned} u^{(R)}(p) &= C\,\nu^{(R)*}_{(-p)} \\ u^{(L)}(p) &= C\,\nu^{(L)*}_{(-p)} \end{aligned}}$$

Da normalização $u^{+}(\mathbb{p})\, u(\mathbb{p}) = 1 = \nu^{+}(-\mathbb{p})\, \nu(-\mathbb{p})$,

ou $\tilde{\nu}(-\mathbb{p})\, \nu^{*}(-\mathbb{p}) = 1$ vem que

$$c\, c^{+} = 1 \quad \text{ou} \quad \tilde{c}\, c^{*} = 1$$

Podemos verificar que a matriz c que satisfaz essas propriedade é

$$\boxed{c = \beta \alpha_y = \gamma^{(2)}}$$

As equações para $\psi^{(+)}$ e $\psi^{(-)}$ mostram que (veja pag. 170)

$u^{(R,L)}(\mathbb{p}) \longrightarrow$ aniquilação de um elétron

$\nu^{(R,L)*}(-\mathbb{p}) \longrightarrow$ " " pósitron

A conecção entre essas amplitudes pela matriz $c = \gamma^{(2)}$ sugere que exista um operador unitário $\hat{c}$, que atua em $a_{R,L}$ e $b_{R,L}$, que transforma elétrons em pósitrons, chamado de conjugação de carga, e definido por

$$\hat{c}\, a_R(\mathbb{p})\, \hat{c}^{+} = b_R(\mathbb{p}) \qquad \hat{c}\, b_R(\mathbb{p})\, \hat{c}^{+} = a_R(\mathbb{p})$$

$$\hat{c}\, a_L(\mathbb{p})\, \hat{c}^{+} = b_L(\mathbb{p}) \qquad \hat{c}\, b_L(\mathbb{p})\, \hat{c}^{+} = a_L(\mathbb{p})$$

Vamos mostrar que

$$\hat{c}\, \psi(\mathbb{r})\, \hat{c}^{+} = c\, \tilde{\psi}^{+}(\mathbb{r}) = c\, \gamma^{0}\, \tilde{\bar{\psi}}(\mathbb{r})$$

PROVA - Escrevendo $\psi(\mathbf{r}) = \psi^{(+)}(\mathbf{r}) + \psi^{(-)}(\mathbf{r})$ temos

$$\hat{C}\,\psi^{(+)}\,\hat{C}^{+} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\left[u_R(\mathbf{p})\,b_R(\mathbf{p}) + u_L(\mathbf{p})\,b_L(\mathbf{p})\right]e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\,d^3r$$

$$= \frac{C}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\left[\nu_R^*(-\mathbf{p})\,b_R(\mathbf{p}) + \nu_L^*(-\mathbf{p})\,b_L(\mathbf{p})\right]e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\,d^3r \quad \mathbf{p}\to-\mathbf{p}$$

$$= C\left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\left[\nu_R(\mathbf{p})\,b_R^*(-\mathbf{p}) + \nu_L(\mathbf{p})\,b_L(-\mathbf{p})\right]e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\,d^3r\right]^*$$

$$= C\left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\left[\tilde{\nu}_R(\mathbf{p})\,b_R^{+}(-\mathbf{p}) + \tilde{\nu}_L(\mathbf{p})\,b_L^{+}(-\mathbf{p})\right]e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\right]^{+}$$

$$= C\,\tilde{\psi}^{(+)+}$$

O mesmo vale p/ $\psi^{(-)}$ se usarmos que $\tilde{C} = C$ e que

$$\nu_{(R,L)}(\mathbf{p}) = \tilde{C}\,u^*_{(R,L)}(-\mathbf{p}) = C\,u^*_{(R,L)}(-\mathbf{p})$$

Finalmente, aplicamos essa transformação na equação de Dirac:

$$\hat{C}\,\gamma^\mu\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right]\psi\,\hat{C}^{+} + ik\,\hat{C}\,\psi\,\hat{C}^{+} = 0$$

$$\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)C\tilde{\psi}^{+} + ikC\tilde{\psi}^{+} = 0 \quad .$$

Multiplicando tudo por $\gamma^0 C^{-1}$ obtemos, para as matrizes:

$$\gamma^0 C^{-1}\gamma^\mu C = \begin{cases} \mu=0 & \gamma^0 C^{-1}\gamma^0 C = -\gamma^0\gamma^0 \\ \mu=k & \gamma^0 C^{-1}\gamma^k C = \gamma^0\tilde{\gamma}^k = -\tilde{\gamma}^k\gamma^0 \end{cases}$$

$$= -\tilde{\gamma}^\mu\gamma^0$$

e ficamos com

$$-\tilde{\gamma}^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{ie}{\hbar c}A_{\mu}\right)\gamma^{0}\tilde{\Psi}^{+}+ik\gamma^{0}\tilde{\Psi}^{+}=0$$

$$-\tilde{\gamma}^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{ie}{\hbar c}A_{\mu}\right)\tilde{\bar{\Psi}}+ik\tilde{\bar{\Psi}}=0$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{ie}{\hbar c}A_{\mu}\right)\bar{\Psi}\gamma^{\mu}-ik\bar{\Psi}=0}$$

onde tomamos o transposto e trocamos o sinal na última passagem.

Na ausência de campos externos, $A_\mu = 0$, essa equação é idêntica àquele que deduzimos na página 173 conjugando a equação de Dirac. No entanto, o sinal de A_μ está diferente, mostrando que campos eletromagnéticos externos destroem a invariância por conjugação de carga. A invariância é restaurada quando os campos são incluídos no sistema, e a conjugação faz $A_\mu \rightarrow -A_\mu$. Nesse caso temos uma simetria total entre elétrons e pósitrons, ou entre matéria e anti-matéria em geral.

II - PARIDADE

A matriz que realiza a inversão é a γ^0 :

$$U_P \psi(\mathbf{r},t) U_P^\dagger = \gamma^0 \psi(-\mathbf{r},t)$$

(veja página 182), onde U_P é o operador de paridade, que age nos $a^{(R,L)}$ e $b^{(R,L)}$. Como no caso da conjugação de carga, se $u^{(R,L)}(\mathbf{p})$ é solução das equações de Dirac, então $\gamma^0 u^{(R,L)}(-\mathbf{p})$ também é :

$$\left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\gamma^0 u(-\mathbf{p}) = \gamma^0\left(c\,\vec{\alpha}\cdot(-\vec{p}) + \beta mc^2\right) u(-\mathbf{p})$$

$$= \gamma^0 E_p(-\mathbf{p})\, u(-\mathbf{p}) = E_p\, \gamma^0 u(-\mathbf{p})$$

pois E_p só depende de p^2. No entanto a helicidade é trocada. De fato, como $\gamma^0\vec{\Sigma} = \vec{\Sigma}\gamma^0$ (prove!)

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right)\gamma^0 u^{(R)}(-\mathbf{p}) = -\gamma^0\left(\vec{\Sigma}\cdot(-\vec{p})\right) u^{(R)}(-\mathbf{p})$$

$$= -\gamma^0 u^{(R)}(-\mathbf{p}) .$$

Podemos então escrever

$$\boxed{\gamma^0 u^{(R)}(-\mathbf{p}) = u^{(L)}(\mathbf{p})}$$

que podemos combinar com as equações de conjugação de carga:

$$u^{(L)}(\mathbf{p}) = \gamma^0 u^{(R)}(-\mathbf{p}) = \gamma^0 C\, v^{(R)*}(\mathbf{p}) = -C\gamma^0 v^{(R)*}(\mathbf{p})$$

$$= -C\left[\gamma^0 v^{(R)}(\mathbf{p})\right]^* \equiv C\, v^{(L)*}(-\mathbf{p})$$

Portanto,

$$\boxed{\gamma^0 v^{(R)}(-\mathbb{p}) = -v^{(L)}(\mathbb{p})}$$

Assim, partindo de $U_P \Psi(\mathbb{r},t) U_P^+ = \gamma^0 \Psi(-\mathbb{r},t)$ e sabendo como γ^0 transforma as amplitudes, podemos obter o efeito de U_P nos operadores de criação e aniquilação. É fácil mostrar que

$$U_P a_R(\mathbb{p}) U_P^+ = a_L(-\mathbb{p}) \qquad U_P a_L(\mathbb{p}) U_P^+ = a_R(-\mathbb{p})$$

$$U_P b_R(\mathbb{p}) U_P^+ = -b_L(-\mathbb{p}) \qquad U_P b_L(\mathbb{p}) U_P^+ = -b_R(-\mathbb{p})$$

Isso implica que um elétron e um pósitron que estejam no mesmo estado orbital devem ter paridades opostas.

III - Reversão Temporal

O operador de reversão temporal troca $\mathbb{p} \to -\mathbb{p}$, $\mathbb{L} \to -\mathbb{L}$ e $\mathbb{S} \to -\mathbb{S}$, além de ser anti-unitário, implicando na conjugação complexa. Assim,

$$\Theta a_R(\mathbb{p}) \Theta^{-1} = e^{i\alpha_R(\mathbb{p})} a_R(-\mathbb{p}) \qquad \Theta a_L(\mathbb{p}) \Theta^{-1} = e^{i\alpha_L(\mathbb{p})} a_L(-\mathbb{p})$$

$$\Theta b_R(\mathbb{p}) \Theta^{-1} = e^{i\beta_R(\mathbb{p})} b_R(-\mathbb{p}) \qquad \Theta b_L(\mathbb{p}) \Theta^{-1} = e^{i\beta_L(\mathbb{p})} b_L(-\mathbb{p})$$

onde as fases são arbitrárias por enquanto.

Para obter as relações correspondentes para os operadores de criação, escrevemos

$$\Theta = UF \quad , \quad \Theta^{-1} = FU^{+}$$

onde U é unitário e F = conjugação complexa, $F^2 = 1 = UU^{+}$.

Conjugando
$$UF a_R(\mathbf{p}) FU^{+} = e^{i\alpha_R(\mathbf{p})} a_R(-\mathbf{p}) \quad \text{obtemos}$$
$$UF a_R^{+}(\mathbf{p}) FU^{+} = e^{-i\alpha_R(\mathbf{p})} a_R^{+}(-\mathbf{p})$$

de forma que obtemos

$$\Theta a_R^{+}(\mathbf{p}) \Theta^{-1} = e^{-i\alpha_R(\mathbf{p})} a_R^{+}(-\mathbf{p}) \qquad \Theta a_L^{+}(\mathbf{p}) \Theta^{-1} = e^{-i\alpha_L(\mathbf{p})} a_L^{+}(-\mathbf{p})$$
$$\Theta b_R^{+}(\mathbf{p}) \Theta^{-1} = e^{-i\beta_R(\mathbf{p})} b_R^{+}(-\mathbf{p}) \qquad \Theta b_L^{+}(\mathbf{p}) \Theta^{-1} = e^{-i\beta_L(\mathbf{p})} b_L^{+}(-\mathbf{p})$$

Aplicando em $\psi^{(+)}(\mathbf{r},t)$ obtemos

$$\Theta \psi^{(+)}(\mathbf{r},t) \Theta^{-1} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \Theta \left[u_R(\mathbf{p}) a_R(\mathbf{p}) + u_L(\mathbf{p}) a_L(\mathbf{p}) \right] e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - E_p t)} \Theta^{-1} d^3p$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \left[u_R^{*}(\mathbf{p}) e^{i\alpha_R(\mathbf{p})} a_R(-\mathbf{p}) + u_L^{*}(\mathbf{p}) e^{i\alpha_L(\mathbf{p})} a_L(-\mathbf{p}) \right] e^{-\frac{i}{\hbar}[\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - E_p t]} d^3p$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \left[u_R^{*}(-\mathbf{p}) e^{i\alpha_R(-\mathbf{p})} a_R(\mathbf{p}) + u_L^{*}(-\mathbf{p}) e^{i\alpha_L(-\mathbf{p})} a_L(\mathbf{p}) \right] e^{\frac{i}{\hbar}[\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + E_p t]} d^3p$$

$$\equiv T \psi^{+}(\mathbf{r}, -t)$$

A matriz T deve então satisfazer

$$T u_{R,L}(\mathbf{p}) = u_{R,L}^{*}(-\mathbf{p}) e^{i\alpha_{R,L}(-\mathbf{p})}$$

e ser unitária para manter a normalização, $TT^{+} = 1$.

Como $u_R(\mathbb{P})$ satisfaz a equação de Dirac

$$(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta mc^2)\,u_R(\mathbb{P}) = E_p\,u_R(\mathbb{P})$$

então

$$(cT\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+T\beta mc^2)\,u_R(\mathbb{P}) = E_p\,u_R^*(-\mathbb{P})\,e^{i\alpha_R(-\mathbb{P})}$$

se

$$\boxed{T\vec{\alpha} = -\vec{\alpha}^*T} \quad e \quad \boxed{T\beta = \beta T}$$

teremos

$$(-c\vec{\alpha}^*\cdot\vec{p}+\beta mc^2)\,u_R^*(-\mathbb{P}) = E_p\,u_R^*(-\mathbb{P})$$

que, fazendo $\mathbb{P}\to-\mathbb{P}$ e tomando o complexo conjugado, recobra a equação de Dirac.

A matriz que satisfaz essas equações e é unitária é

$$\boxed{T = -i\,\alpha_z\alpha_x = \Sigma_y}$$

Explicitamente obtemos

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad TT^* = -1$$

As mesmas conclusões são obtidas calculando-se $\Theta\,\psi^{(-)}_{(\mathbb{r},t)}\,\Theta^{-1} \equiv T\,\psi^{(-)}_{(\mathbb{r},-t)}$

Tomando o complexo conjugado de

$$T\,u(\mathbb{P}) = u^*(-\mathbb{P})\,e^{i\alpha(-\mathbb{P})}$$

obtemos

$$T^*u^*(\mathbb{P}) = u(-\mathbb{P})\,e^{-i\alpha(-\mathbb{P})}$$

Então

$$T^*(T\,u(p)) = T^*(u^*(-p))\, e^{i\alpha(-p)}$$

$$= u(p)\, e^{-i\alpha(p)+i\alpha(-p)} = -u(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i(\alpha(-p)-\alpha(p))} = -1}$$

e

$$\Theta^2 a_R(p)\, \Theta^{-2} = \Theta\left[e^{i\alpha_R(p)} a_R(-p)\right] \Theta^{-1} = e^{-i\alpha_R(p)+i\alpha_R(-p)}\, a_R(p)$$

$$= -a_R(p)$$

Assim, Θ^2 troca o sinal dos operadores e age como $+1$ em um número par de partículas e como -1 em um número ímpar. Como Θ^2 não pode ter consequências físicas, estados que são superposição de números pares e ímpares de partículas vão mudar de forma inadimissível e não podem existir! Outra consequência é que férmions não podem ser criados ou destruídos em números ímpares.

O conjunto das simetrias de carga, paridade e reversão temporal é chamado de CPT e é muito importante em física de partículas.