PRIMEIRA LISTA - FI-195

1. Considere uma partícula em queda livre vertical onde a distância inicial em relação ao solo x_0 não pode ser desprezada em relação ao raio da Terra R. Mostre que no limite em que $x_0/R << 1$ a solução da equação de movimento é

$$x(t) = (x_0 - \frac{R}{2}) \cosh(\nu t) + \frac{v_0}{\nu} \sinh(\nu t) + \frac{R}{2}.$$

onde $\nu = \sqrt{2g/R}$. Calcule $x(t)$ para $\nu \to 0$.

2. Considere uma partícula de massa $m = 1/2$ movendo-se sob a ação do potencial

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

Faça um esboço de $V(x)$ e discuta os tipos de movimento possíveis. Encontre os pontos de equilíbrio do potencial e discuta sua estabilidade. Encontre explicitamente a equação da trajetória para o caso particular onde $E = 1/4$ e $x(0) = 0$.

3. Obtenha as equações de vínculo para um disco rolando sem deslizar em um plano. Essas equações são um caso especial de vínculos diferenciais da forma

$$\sum_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n) dx_i = 0 \ .$$

Um vínculo desse tipo é holonômico apenas se existir uma função $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tal que

$$\frac{\partial(f g_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(f g_j)}{\partial x_i}$$

para todo i, j. Mostre que não existe tal função para o caso do disco e que, portanto, os vínculos são não-holonômicos.

4. Duas rodas de raio a são montadas nas pontas de um eixo de tamanho b de forma que elas possam girar de forma independente. O sistema rola sem deslizar sobre um plano. Sejam x e y as coordenadas do ponto

médio do eixo (projetadas no plano), ϕ e ϕ' ângulos de referência sobre cada roda e θ o ângulo que a direção do eixo faz com o eixo x. Mostre que o sistema tem dois vínculos não-holonômicos dados por

$$\begin{array}{l} \cos\theta dx + \sin\theta dy = 0 \\ \sin\theta dx - \cos\theta dy = \frac{a}{2}(d\phi + d\phi') \end{array}$$

e um vínculo holonômico

$$\theta = C - \frac{a}{b}(\phi - \phi')$$

onde C é uma constante.

5. Sejam q_1, q_2, ..., q_n um conjunto independente de coordenadas generalizadas. Considere agora uma transformação para um novo conjunto de coordenadas independentes dadas por $s_i = s_i(q_1, q_2, ..., q_n, t)$, $i = 1, 2, ..., n$. Mostre que as equações de Lagrange são invariantes por esse tipo de transformação, i.e., mostre que nas novas variáveis obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s_k}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_k} = 0$$

6. Considere um pêndulo duplo plano onde a primeira partícula tem massa m_1 e carga elétrica q_1 e está presa por uma barra de massa desprezível de comprimento l_1. A segunda partícula tem massa m_2 e carga elétrica q_2 e está suspensa por outra barra sem massa de comprimento l_2 presa à primeira partícula. No sistema atua, além da força da gravidade, um campo elétrico constante de intensidade E_0 na direção horizontal.

   (a) Quantos graus de liberdade tem o sistema? Escreva explicitamente as equações de vínculo.

   (b) Aplique o princípio de D'Alembert para encontrar a posição de equilíbrio do sistema.

   (c) Escreva a Lagrangeana e as equações de movimento.