QUARTA LISTA - FI-195

1. (a) Encontre uma função geratriz do tipo F_3 para a transformação identidade.

   (b) Seja $Q = Aq$ uma transformação canônica pontual (as novas posições dependem apenas das posições originais) onde A uma matriz $n \times n$ ortogonal de coeficientes constantes. Mostre que os novos momentos são dados pela mesma matriz aplicada no vetor composto pelos velhos momentos mais um gradiente no espaço de coordenadas (problema 7(b) e (c)).

2. Mostre que a matriz $M = \partial\zeta/\partial\eta$ para a transformação

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 & \qquad P_1 &= p_1 - 2p_2 \\ Q_2 &= p_2 & \qquad P_2 &= -2q_1 - q_2 \end{aligned}$$

   é simplética. Encontre a função geratriz.

3. Mostre que a transformação

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \qquad\qquad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q$$

   satisfaz $\{Q, P\}_{q,p} = 1$ e $\{q, p\}_{Q,P} = 1$.

4. Mostre que a transformação $(q, p) \to (Q, P)$ gerada por $F_1(q, Q)$ satisfaz $\{Q, P\}_{q,p} = 1$. Faça o cálculo para um grau de liberdade apenas.

5. Mostre que a transformação

$$Q = p + iaq, \qquad\qquad P = \frac{p - iaq}{2ia}$$

   é canônica e encontre uma função geratriz. Use essa transformação para resolver o oscilador harmônico.

6. A Hamiltoniana de um sistema tem a forma

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4 \right).$$

   Encontre uma transformação canônica que reduza H à forma de um oscilador harmônico. Escreva a solução $q = q(t)$.

7. Um sistema com dois graus de liberdade é descrito pela Hamiltoniana

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2 \ .$$

Mostre que

$$F_1 = \frac{p_1 - a q_1}{q_2} \qquad \text{e} \qquad F_2 = q_1 q_2$$

são constantes do movimento. É possível encontrar outras constantes de movimento independentes usando a identidade de Jacobi entre F_1, F_2 e H?.

8. Mostre, usando a condição de constante de movimento via parênteses de Poisson, que o vetor de Laplace-Runge-Lenz

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r}$$

é uma constante do movimento para o problema de Kepler $H = p^2/2m - k/r$.