Exercícios sugeridos - F789 - Capítulo 7

1. Problema 1 do capítulo 7 do Cohen-Tannoudji

2. Problema 2 do capítulo 7 do Cohen-Tannoudji

3. Considere a Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ &= \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\mathbf{R}^2}{2} \end{aligned}$$

e o operator vetorial

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\mathbf{R} - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\mathbf{P}\right).$$

(a) Mostre que $H = \hbar\omega(\mathbf{T}\mathbf{T}^\dagger + 3/2)$.

(b) Mostre que $[H, T_i] = \hbar\omega T_i$.

(c) Como o potencial é central, as autofunções podem ser escolhidas na forma ψ_{nlm}, que são autofunções simultâneas de H, L^2 e L_z e tal que

$$H\psi_{nlm} = \hbar\omega(n + 3/2)\psi_{nlm}.$$

Sabendo ainda que o estado fundamental é não degenerado, use o estado fundamental do oscilador harmônico 1-D para calcular ψ_{000}.

(d) Seja $T_+ = T_x + iT_y$. Mostre que:

(d.1) $[H, T_+] = \hbar\omega T_+$

(d.2) $[L_z, T_+] = \hbar T_+$

(d.3) $[L^2, T_+] = 2\hbar(T_+L_z - T_zL_+) + 2\hbar^2 T_+$

(d.4) $[L_i, T^2] = 0$.

(e) Mostre que essas propriedade implicam em:

(e.1) $T_+ Y_{l,l} \simeq Y_{l+1,l+1}$

(e.2) $T_+ \psi_{n,l,l} \simeq \psi_{n+1,l+1,l+1}$

(e.3) $(T_+)^s \psi_{0,0,0} \simeq \psi_{s,s,s}$

(e.4) $(T^2)^s \psi_{0,0,0} \simeq \psi_{2s,0,0}$.

(f) Combinando esses resultados mostre finalmente que

$$L_-^{l-m} (T_+)^l (T^2)^{(n-l)/2} \psi_{0,0,0} \simeq \psi_{n,l,m}.$$

(g) Calcule e normalize ψ_{200} e ψ_{110}.