QUARTA LISTA - FI001

Exercícios 2, 3, 5 e 8 do Capítulo 3 do Sakurai.

A. Considere o ket

$$|\Omega\rangle = |\theta, \phi\rangle = \exp\left(-i\frac{\theta}{\hbar}\vec{S}\cdot\hat{\phi}\right)|+\rangle.$$

onde $\vec{S}$ é o operador de spin 1/2 e $\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$. Esse estado é obtido aplicando sobre o ket $|+\rangle$ uma rotação que leva o eixo z na direção do versor $\hat{n}$ definido pelos ângulos polares θ e ϕ.

(a) Mostre que

$$|\langle\Omega'|\Omega\rangle|^2 = \frac{1 + \hat{n}\cdot\hat{n}'}{2}.$$

(b) Mostre que o conjunto de vetores $|\Omega\rangle$ satisfaz a relação de fecho

$$\int \frac{d\Omega}{2\pi}|\Omega\rangle\langle\Omega| = 1$$

e que portanto $\{|\Omega\rangle\}$ é uma base completa mas não ortogonal.

B. Seja

$$D^{\{j\}}(R) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{n}\cdot\vec{J}\phi\right)$$

uma matriz de rotação arbitrária no subespaço de momento angular j.

(a) Mostre que $D^{\{j\}}(R)$ pode ser escrita em termos das $2j$ primeiras potências de $\hat{n}\cdot\vec{J}$ na forma

$$D^{\{j\}}(R) = \sum_{m=-j}^{j} e^{-im\phi} \prod_{m'\neq m} \frac{m'\hbar - \hat{n}\cdot\vec{J}}{(m'-m)\hbar}.$$

Sugestão: Use os projetores do exercício 7 do capítulo 1 do Sakurai.

(b) Usando o resultado acima e a forma explícita das matrizes

$$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; J_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

encontre a matriz de rotação $D^{\{j\}}(R)$ para $j = 1$ em função do ângulo ϕ e das componentes de $\hat{n}$.