A FUNCÃO DELTA DE DIRAC

Notas de aula de Mecânica Quântica I - Marcus A.M. de Aguiar - 29/08/2006

A função delta de Dirac é definida pelas seguintes propriedades

$$\begin{cases} \delta(x) = 0 \qquad \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ \int_A^B g(x)\delta(x)dx = \begin{cases} g(0) & \text{se} \quad A < 0 < B \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

Como a função delta é bastante singular temos que pensar formalmente em uma sequência de funções bem comportadas $f_n(x)$ tal que $f_n(x)$ seja muito pequena se $x \neq 0$ e sua integral seja igual a um. Um exemplo simples de sequência que tende à função delta é

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \qquad \text{se} \quad |x| < \frac{1}{2n} \\ \\ n \qquad \text{se} \quad |x| \leq \frac{1}{2n}. \end{cases} \tag{2}$$

Podemos mostrar então que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \delta(x)$: a primeira propriedade da Eq.(1) é imediata. Para mostrar a segunda fazemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{-1/2n}^{+1/2n} g(x) f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{-1/2n}^{+1/2n} n\, g(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} n \int_{-1/2n}^{+1/2n} [g(0) + g'(0)x + \tfrac{1}{2} g''(0)x^2 + \ldots] \\ &= \lim_{n\to\infty} n[g(0)\tfrac{1}{n} + g''(0)\tfrac{1}{24n^3} + \ldots] = g(0) \end{aligned}$$

Propriedades importantes da função delta:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{d}{dx}[\delta(x)]dx = -g'(0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\delta(x-a)dx = g(a)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{d}{dx}[\delta(x-a)]dx = -g'(a)$

- Outros exemplos de sequências que convergem para a delta:

  - $\phi_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$

  - $\phi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$

  - $\phi_n(x) = \frac{1}{n\pi}\frac{\sin^2 nx}{x^2}$

Finalmente temos a representação integral da função delta:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dx = \delta(x) \tag{3}$$

Essa representação é muito importante e por isso mostraremos como chegar a ela. Definimos inicialmente a função

$$I_\epsilon^+(x) = A\int_0^{+\infty} e^{ik(x+i\epsilon)}dk,$$

onde $\epsilon > 0$ e A é uma constante que será ajustada a seguir. Como a integral converge no infinito podemos calcula-la facilmente:

$$I_\epsilon^+(x) = A\frac{0-1}{i(x+i\epsilon)} = \frac{\epsilon A}{\epsilon^2+x^2} + \frac{ixA}{\epsilon^2+x^2}.$$

Da mesma forma definimos

$$I_\epsilon^-(x) = A\int_{-\infty}^{0} e^{ik(x-i\epsilon)}dk = \frac{\epsilon A}{\epsilon^2+x^2} - \frac{ixA}{\epsilon^2+x^2}$$

e finalmente definimos

$$I_\epsilon(x) = I_\epsilon^+(x) + I_\epsilon^-(x) = \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2+x^2}.$$

Tomando o limite onde ϵ vai a zero, vemos que $I_\epsilon(x)$ vai a zero se $x \neq 0$, pois nesse caso o denominador nunca se anula e o numerador vai a zero. No entanto, quando $x \to 0$, $I_\epsilon(0) = 2A/\epsilon$ que diverge quando ϵ vai a zero. Vemos que $I_\epsilon(x)$ é proporcional à função delta e só precisamos encontrar o valor da constante A para que sua integral seja igual a um. Na integração abaixo usaremos a mudaça de variáveis $x = \epsilon \tan y$:

$$2A\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \epsilon^2} = 2A \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{dy}{\cos^2 y(1 + \tan^2 y)} = 2A \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dy = 2\pi A \equiv 1.$$

Então, escolhendo $A = 1/2\pi$ e tomando o limite $\epsilon \to 0$ obtemos a expressão procurada em termos das integrais I^+ e I^-:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx = \delta(x)$$