TERCEIRA PROVA - FI002

NOME: RA:

1. A Hamiltoniana que descreve o campo eletromagnético na presença de uma corrente clássica é dada por

$$H = \frac{1}{2\pi} \int \vec{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}) d^3 r$$

onde $\vec{E}^{(\pm)} = (-1/c)\partial \vec{A}^{(\pm)}(\vec{r}, t)/\partial t$, $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}^{(+)}(\vec{r}, 0) + \vec{A}^{(-)}(\vec{r}, 0)$. Escreva H em termos dos operadores $a_\lambda^\dagger(\vec{k})$ e $a_\lambda(\vec{k})$. Mostre que a parte envolvendo a corrente pode ser escrita em termos de

$$f_\lambda(\vec{k}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}} \vec{j}(\vec{k}, t) \cdot \hat{e}_\lambda(\vec{k})$$

e seu complexo conjugado, onde

$$\vec{j}(\vec{k}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \int \vec{j}(\vec{r}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3 r.$$

2. A matriz γ^5 é definida como $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Calcule:
   (a) $\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu$
   (b) $(\gamma^5)^2$

3. A equação de Dirac para um elétron livre é dada por

$$\gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + ik\psi = 0$$

onde $k = mc/\hbar$, $x^\mu = (ct, \vec{r})$ e γ^μ são as matrizes de Dirac.

(a) Considere soluções estacionárias da forma $\psi(x) = e^{-\frac{ix^\nu p_\nu}{\hbar}} v(p)$, onde $p_\nu = (E/c, -\vec{p})$, e obtenha a equação satisfeita por v.

(b) Resolva essas equações para o caso $\vec{p} = p\hat{x}$ e escreva as soluções $\psi(x)$ correspondentes. Não é preciso normalizar os spinores.

(c) Suas soluções são autofunções do operador de spin Σ_x? Explique.

4. Considere uma das soluções do problema anterior com energia positiva. Aplique uma transformação de Lorentz para um novo referencial que se move na direção x positiva em relação ao primeiro, com velocidade relativa $v = pc^2/E_p$. Encontre o novo spinor $\psi'(x')$ no novo referencial e interprete o resultado. Veja as fórmulas e dicas no final da prova.

Fórmulas

$$\vec{A}^{(+)}(\vec{r},t) = \frac{\sqrt{2\pi\hbar c^2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} a_\lambda(\mathbf{k}) \hat{e}_\lambda(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)}$$

$$\vec{A}^{(-)}(\vec{r},t) = \frac{\sqrt{2\pi\hbar c^2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) \hat{e}_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)}.$$

Dicas para o problema 4

Transformação de Lorentz:

$$\begin{aligned} ct &= ct' \cosh\chi + x' \sinh\chi \\ x &= x' \cosh\chi + ct' \sinh\chi. \end{aligned}$$

onde $\tanh\chi = v/c$. Os spinores se transformam de acordo com

$$\psi'(\mathbf{r}',t') = S\psi(\mathbf{r},t).$$

onde, para a transformação do problema 4,

$$S = \cosh(\chi/2) - \alpha_x \sinh(\chi/2).$$

Se você não conseguir demonstrar essas relações, pode usá-las diretamente. A demonstração vale 0.5 ponto:

- Usando $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ mostre que $v/c = \tanh\chi = p\ c/E_p$.

- Calcule $\cosh\chi = 1/\sqrt{1 - \tanh\chi^2}$ e $\sinh\chi = \tanh\chi/\sqrt{1-\tanh\chi^2}$. Mostre que $\cosh\chi = E_p/mc^2$ e $\sinh\chi = p\ c/mc^2$.

- Mostre que $\tanh\left(\frac{\chi}{2}\right) = \left(\frac{p\ c}{E_p + mc^2}\right)$.

Matrizes relevantes:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$