Segunda Quantização p/ a Partícula Livre

(Problema 5 da quinta lista)

Os operadores $\hat{\Psi}(p,t)$ satisfazem a equação

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(p,t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \hat{\Psi}(p,t)$$

cuja solução é $\hat{\Psi}(p,t) = e^{-\frac{ip^2t}{2m\hbar}} \hat{\Psi}(p)$.

Se o estado da partícula é $|\psi^{(1)}\rangle = |p'\rangle$, então sua função de onda no instante t será

$$\varphi_{p'}(p,t) = \langle 0|\hat{\Psi}|\psi^{(1)}\rangle = \text{projeção de } |\psi^{(1)}\rangle \text{ no estado da base de 1 partícula.}$$

$$= \langle 0|\hat{\Psi}(p)\, e^{-ip^2t/2m\hbar}|p'\rangle = \langle p|p'\rangle\, e^{-ip^2t/2m\hbar}$$

$$= \delta(p-p')\, e^{-ip^2t/2m\hbar}$$

Se $|\psi^{(1)}\rangle = |x'\rangle$

$$\varphi_{x'}(p,t) = \langle p|x'\rangle\, e^{-\frac{ip^2t}{2m\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-\frac{ipx'}{\hbar} - \frac{ip^2t}{2m\hbar}}$$

Para escrevermos φ na representação de coordenadas podemos calcular

$$\hat{\Psi}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}\, \hat{\Psi}(p,t).$$

Para $|\psi^{(1)}\rangle = |p'\rangle$

$$\varphi_{p'}(x,t) = \langle 0|\hat{\Psi}(x,t)|p'\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, \underbrace{\langle 0|\hat{\Psi}(p)\,|p'\rangle}_{\delta(p-p')}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}-\frac{ip^2t}{2m\hbar}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{ip'x}{\hbar}-ip'^2t/2m\hbar}$$

Para $|\psi^{(1)}\rangle = |x'\rangle$

$$\varphi_{x'}(x,t) = \langle 0|\hat{\Psi}(x,t)|x'\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \underbrace{\langle 0|\hat{\Psi}(p)\,|x'\rangle}_{\langle p|x'\rangle}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}-\frac{ip^2t}{2m\hbar}}\, dp$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{ip}{\hbar}(x-x')-\frac{ip^2t}{2m\hbar}}\, dp$$

Podemos ainda re-escrever isso como

$$= \int \langle x|p\rangle\langle p|\, e^{-\frac{ip^2t}{2m\hbar}}\, |x'\rangle\, dp$$

$$= \langle x|\, e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\, |x'\rangle = \text{propagador.}$$

Finalmente podemos resolver $\hat{\psi}(x,t)$ diretamente a partir de

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \hat{\psi}(x,t)}{\partial x^2}$$

cuja solução é $\hat{\psi}_p(x,t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - \frac{p^2}{2m}t)}\,\hat{\psi}_p$

para qualquer p. A solução geral é

$$\hat{\psi}(x,t) = \int c(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}(px - p^2/2m\, t)}\,\hat{\psi}_p\, dp .$$

O operador $\hat{\psi}_p$ é identificado como $\hat{\psi}(p)$. Impondo

$$\left[\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^\dagger(x',t)\right]_\pm = \delta(x-x') \qquad +/- = \text{comutador/anticom.}$$

$$\int c(p)\, c^*(p')\, e^{\frac{i}{\hbar}(px - \frac{p^2 t}{2m})}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(p'x' - p'^2 t/2m)} \underbrace{\left[\hat{\psi}(p), \hat{\psi}^\dagger(p')\right]_\pm}_{\delta(p-p')} dp\, dp'$$

$$= \int |c(p)|^2 e^{\frac{i}{\hbar}p(x-x')}\, dp \equiv \delta(x-x') \Rightarrow |c(p)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

Assim

$$\hat{\psi}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{\frac{ipx}{\hbar}}\, e^{\frac{-ip^2 t}{2m\hbar}}\,\hat{\psi}(p)\, dp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{\frac{ipx}{\hbar}}\,\hat{\psi}(p,t)\, dp .$$

Duas partículas livres

Os estados da base são

$$\psi^{+}(p_2,t)\,\hat{\psi}^{+}(p_1,t)\,|0\rangle = e^{+\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p_1^2+p_2^2}{2m}\right)t}\,\hat{\psi}^{+}(p_2)\,\hat{\psi}^{+}(p_1)\,|0\rangle$$

Se $|\psi^{(2)}\rangle = |p_1'\,p_2'\rangle$

$$\psi(p_1,p_2,t) = \langle 0|\hat{\psi}(p_1)\,\hat{\psi}(p_2)\,|p_1'\,p_2'\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad ; \quad E \equiv \frac{p_1^2+p_2^2}{2m}$$

$$= \langle 0|\underbrace{\hat{\psi}(p_1)\,\hat{\psi}(p_2)\,\hat{\psi}^{+}(p_2')\,\hat{\psi}^{+}(p_1')}_{\delta(p_1-p_1')\,\delta(p_2-p_2')\,\pm\,\delta(p_1-p_2')\,\delta(p_2-p_1')}|0\rangle\, e^{-iEt/\hbar}$$

$$= \left[\delta(p_1-p_1')\,\delta(p_2-p_2') \pm \delta(p_1-p_2')\,\delta(p_2-p_1')\right] e^{-iEt/\hbar}$$

Se $|\psi^{(2)}\rangle = |x_1'\,x_2'\rangle$, mostre que

$$\psi(p_1,p_2,t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}(p_1x_1'+p_2x_2')} \pm e^{-\frac{i}{\hbar}(p_1x_2'+p_2x_1')}\right] e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$