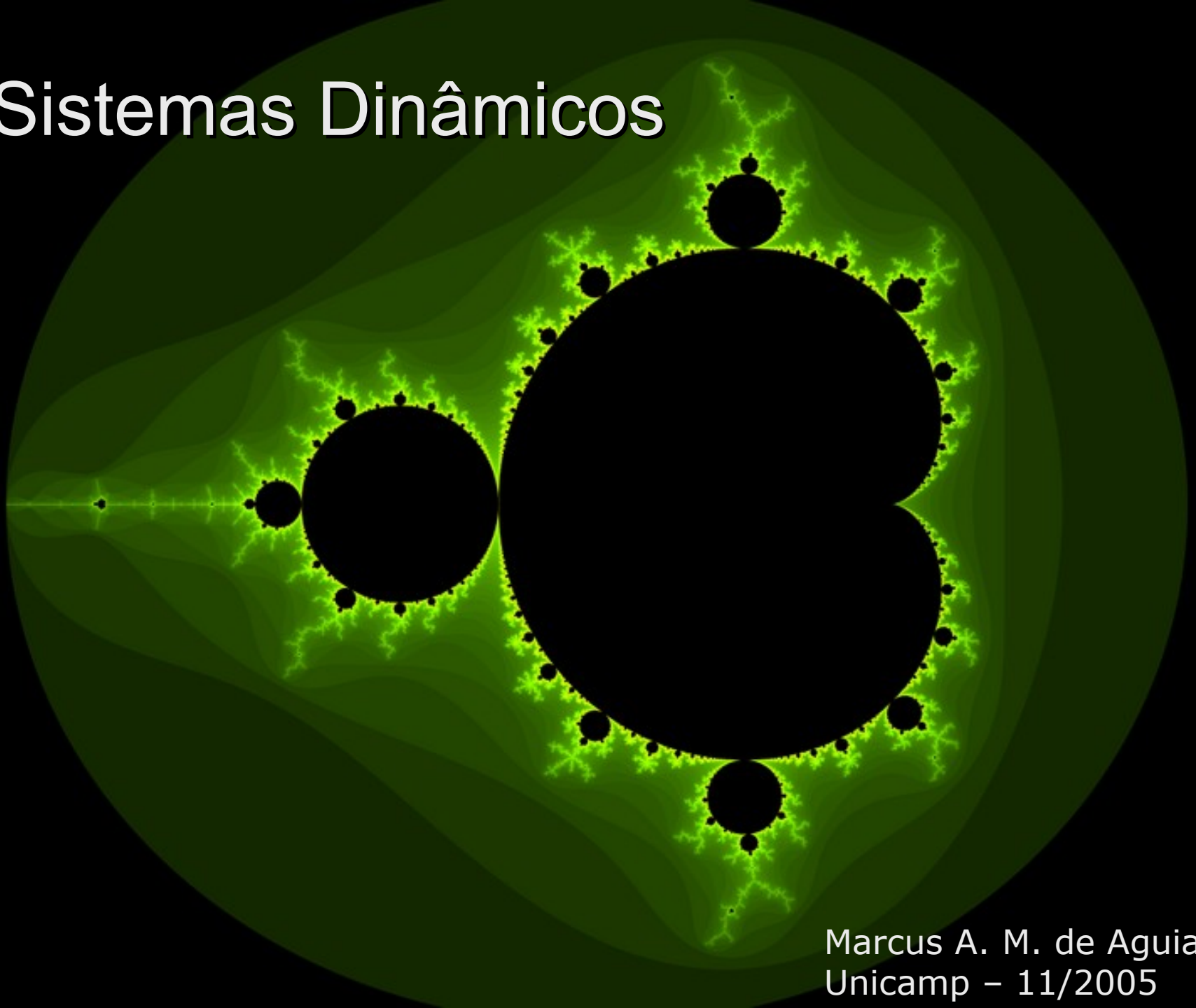


Sistemas Dinâmicos



Marcus A. M. de Aguiar
Unicamp – 11/2005

Resumo

- ◆ Introdução
- ◆ O que aprendemos?
- ◆ Perspectivas e alguns problemas em aberto

Sistemas dinâmicos são sistemas fora do equilíbrio, caracterizados por *estados que mudam com o tempo*. São usados para **modelar** e **fazer previsões** de sistemas físicos, biológicos, financeiros, etc.

Para definir um sistema dinâmico precisamos de três ingredientes:

Espaço de estados

Equações de movimento

Medida de distância

Classes de sistemas dinâmicos

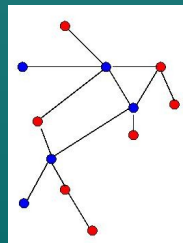
◆ Discretos $x_{n+1} = f(x_n)$

◆ Contínuos $\dot{x} = f(x)$

◆ Campos $\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = D[\phi(x,t)] + \psi(x,t)$

◆ Autômato celular $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & & i & \dots & M \\ \circ & \bullet & \circ & \circ & \circ & \bullet & \dots & \circ & \circ \end{matrix} \quad a_{n+1}^i = F[\{a_n^j\}_{j \in U_i}]$

◆ Redes complexas



$$a_{n+1}^i = F[\{a_n^j\}_{j \in V_i}]$$

Lineares
Não-Lineares

Conservativos
Dissipativos

Determinísticos
Probabilísticos

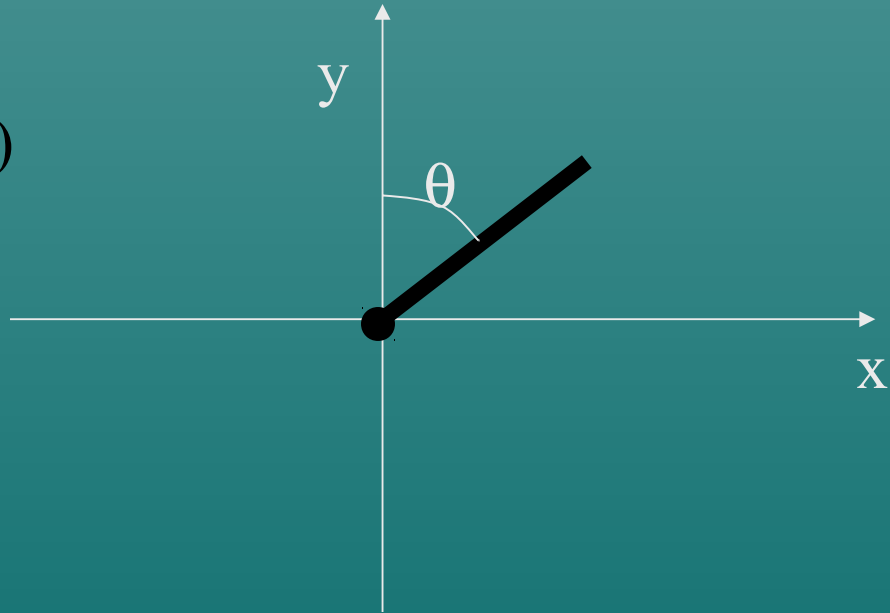
Autônomos
Não-autônomos

Com retardo
Sem retardo

Exemplos clássicos

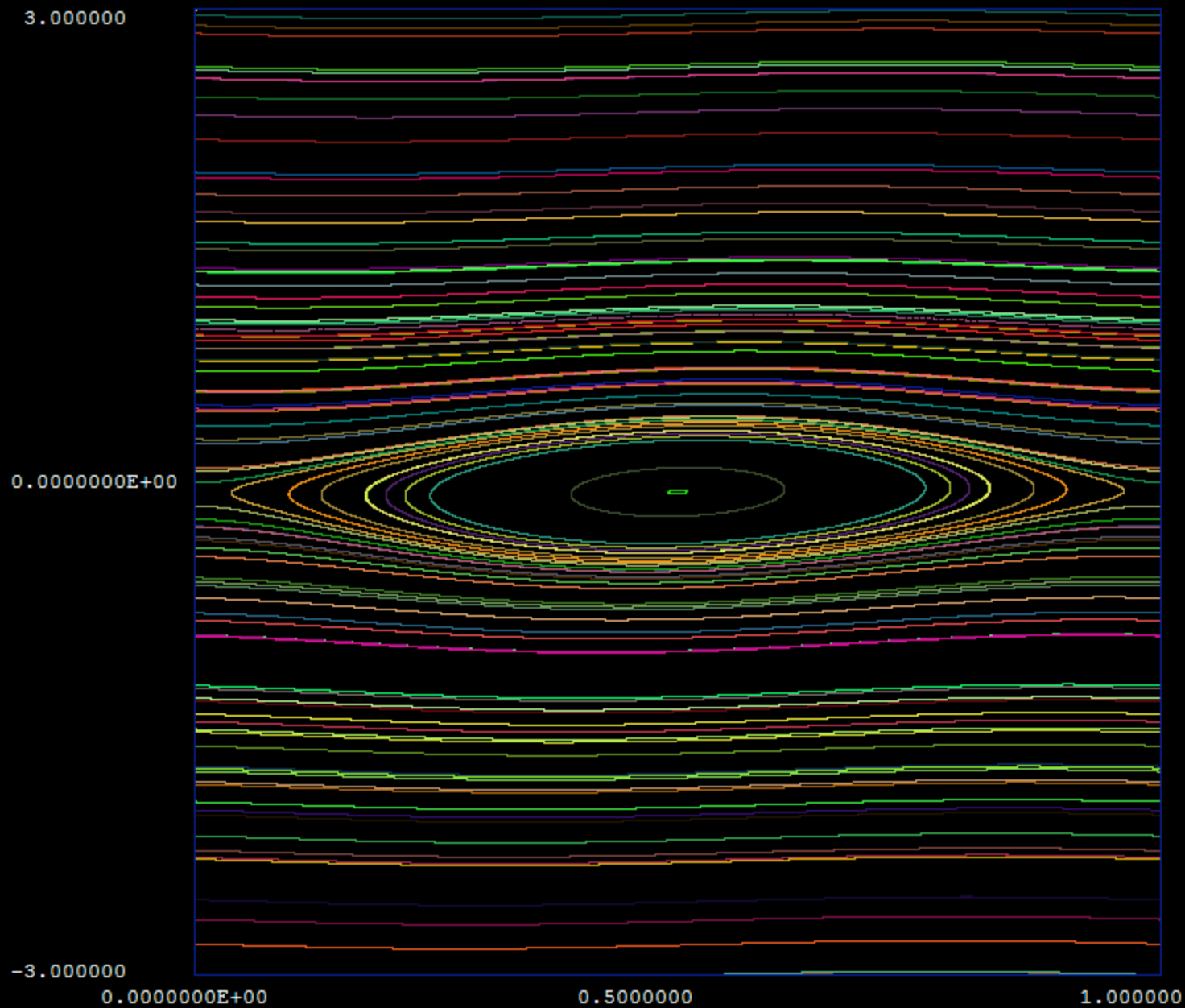
1- Mapa padrão (conservativo)

$$H = \frac{p^2}{2I} + k \cos \theta \sum_n \delta(t - n\tau)$$

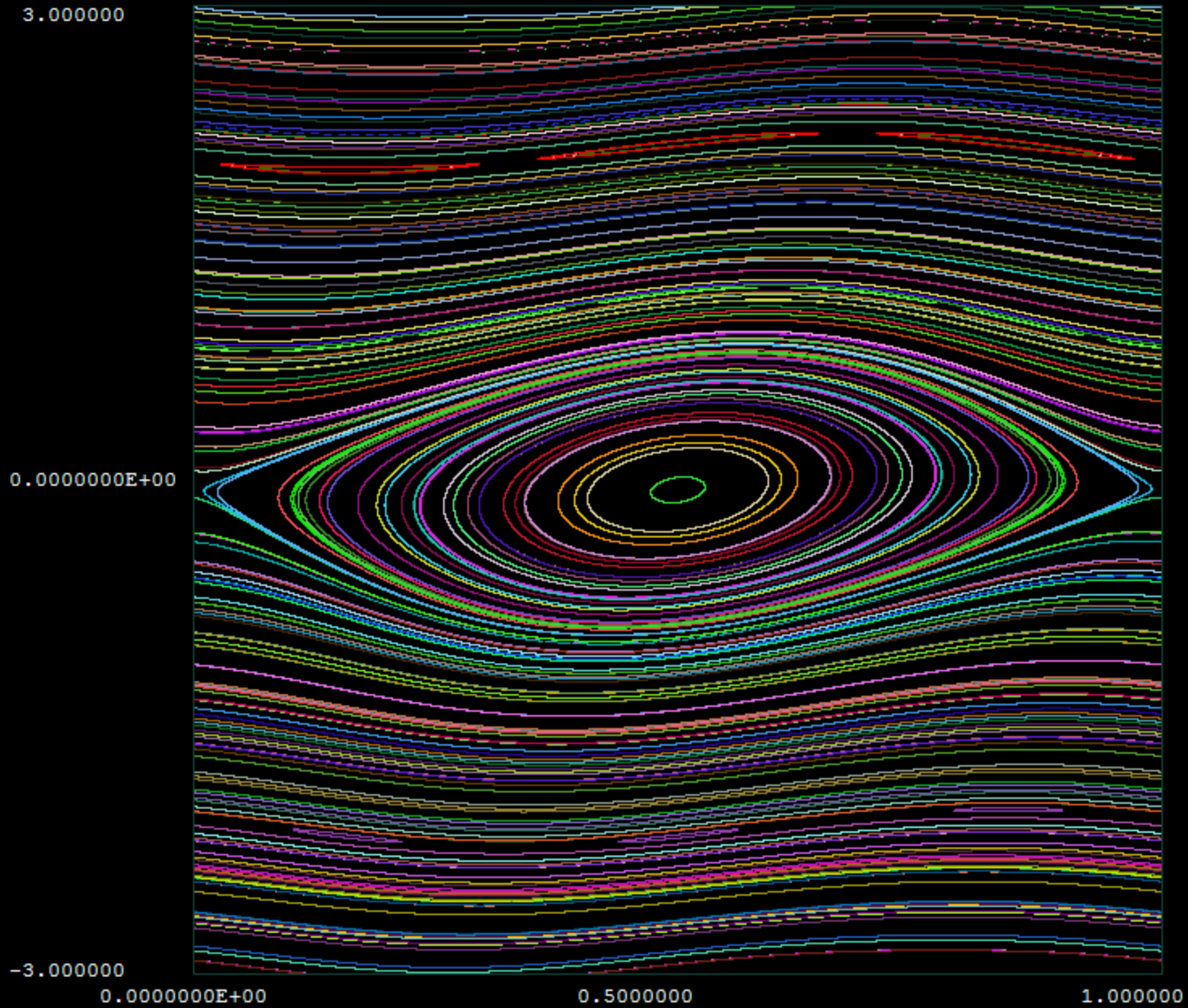


$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + k \sin \theta_{n+1} \\ \theta_{n+1} = \theta_n + p_n \end{cases} \quad (I=1)$$

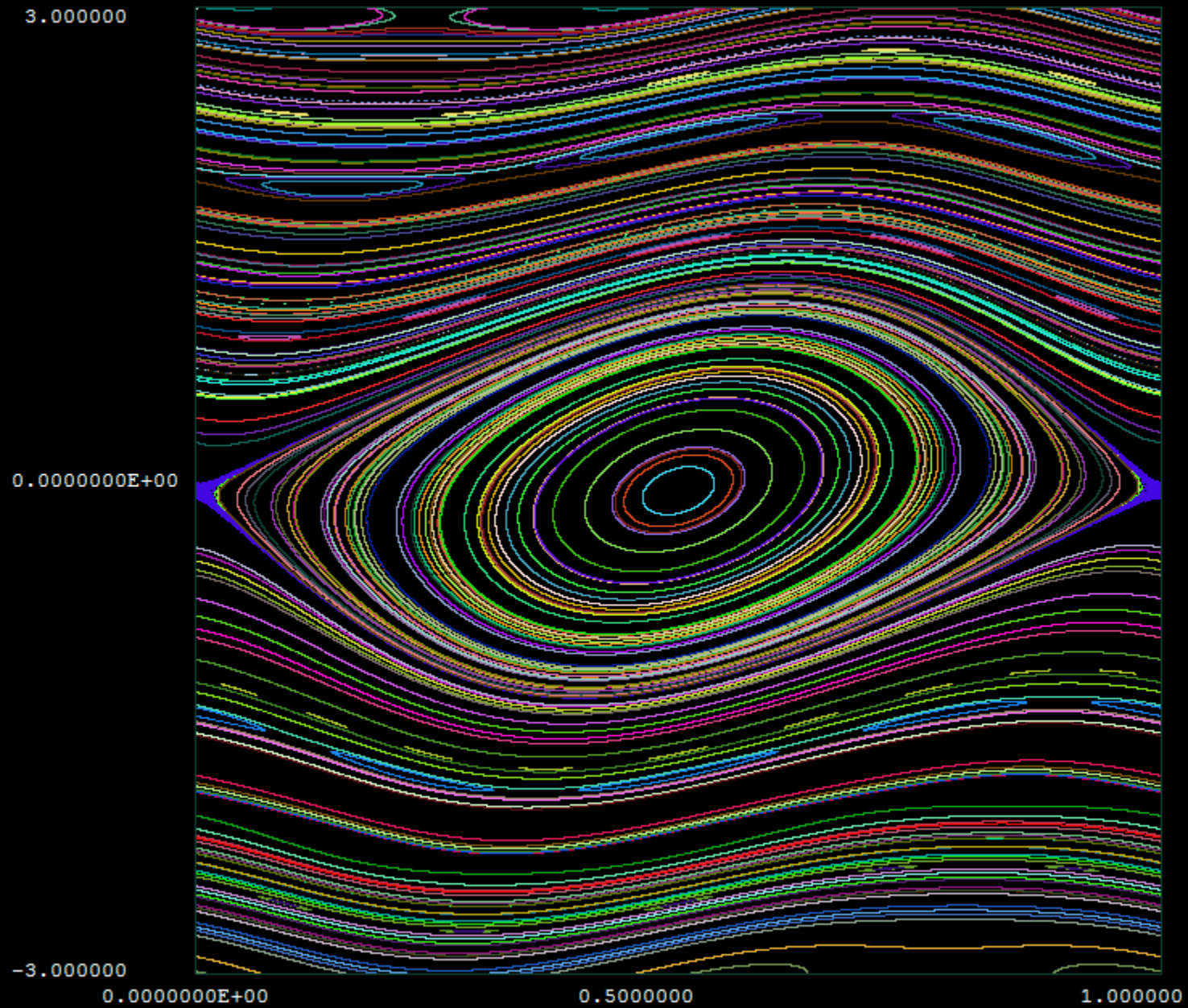
$k=0.05$



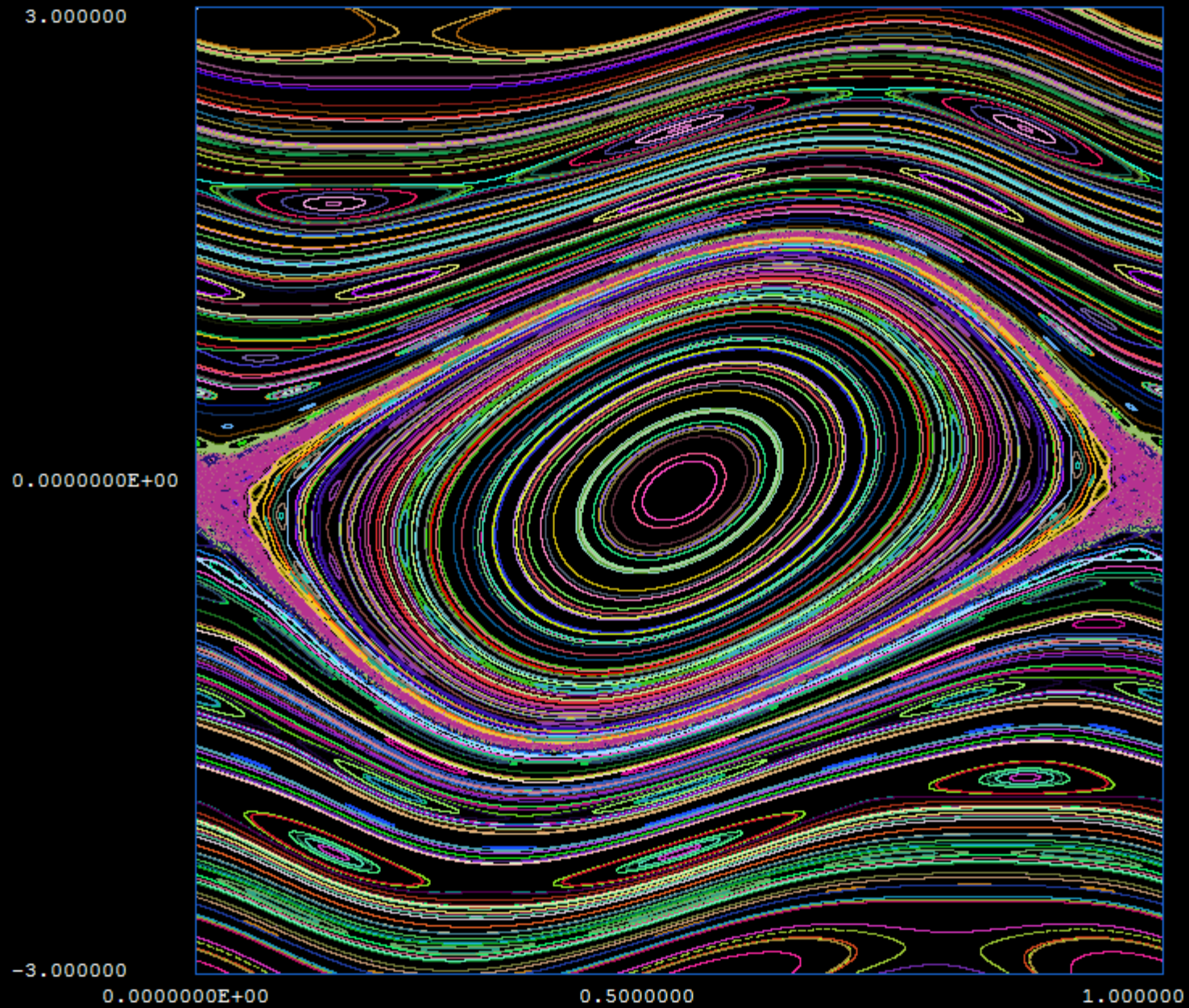
$k=0.2$



$k=0.4$



$k=0.6$



$k=0.8$

3.000000

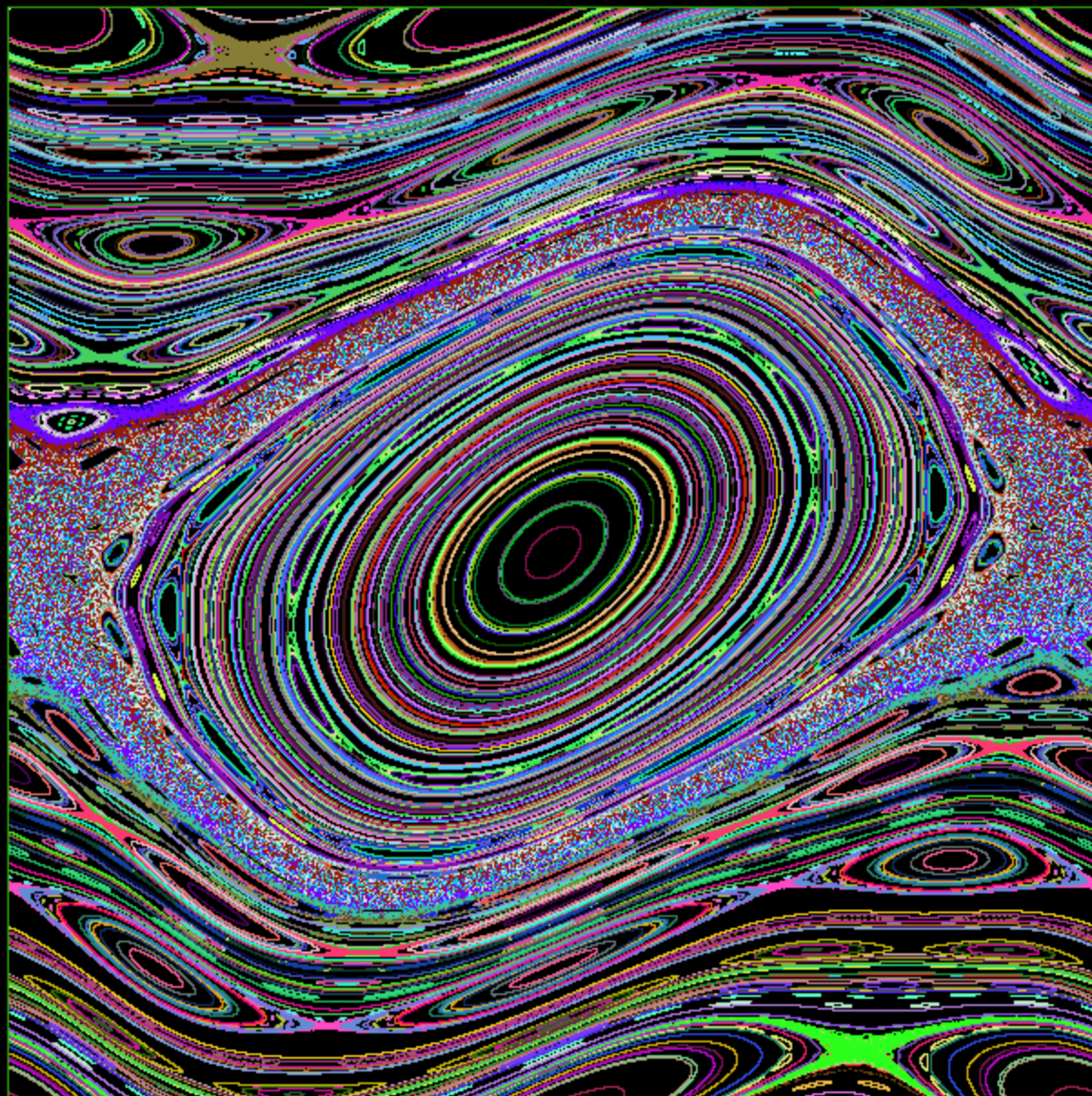
0.000000E+00

-3.000000

0.000000E+00

0.500000

1.000000



$k=1.0$

3.000000

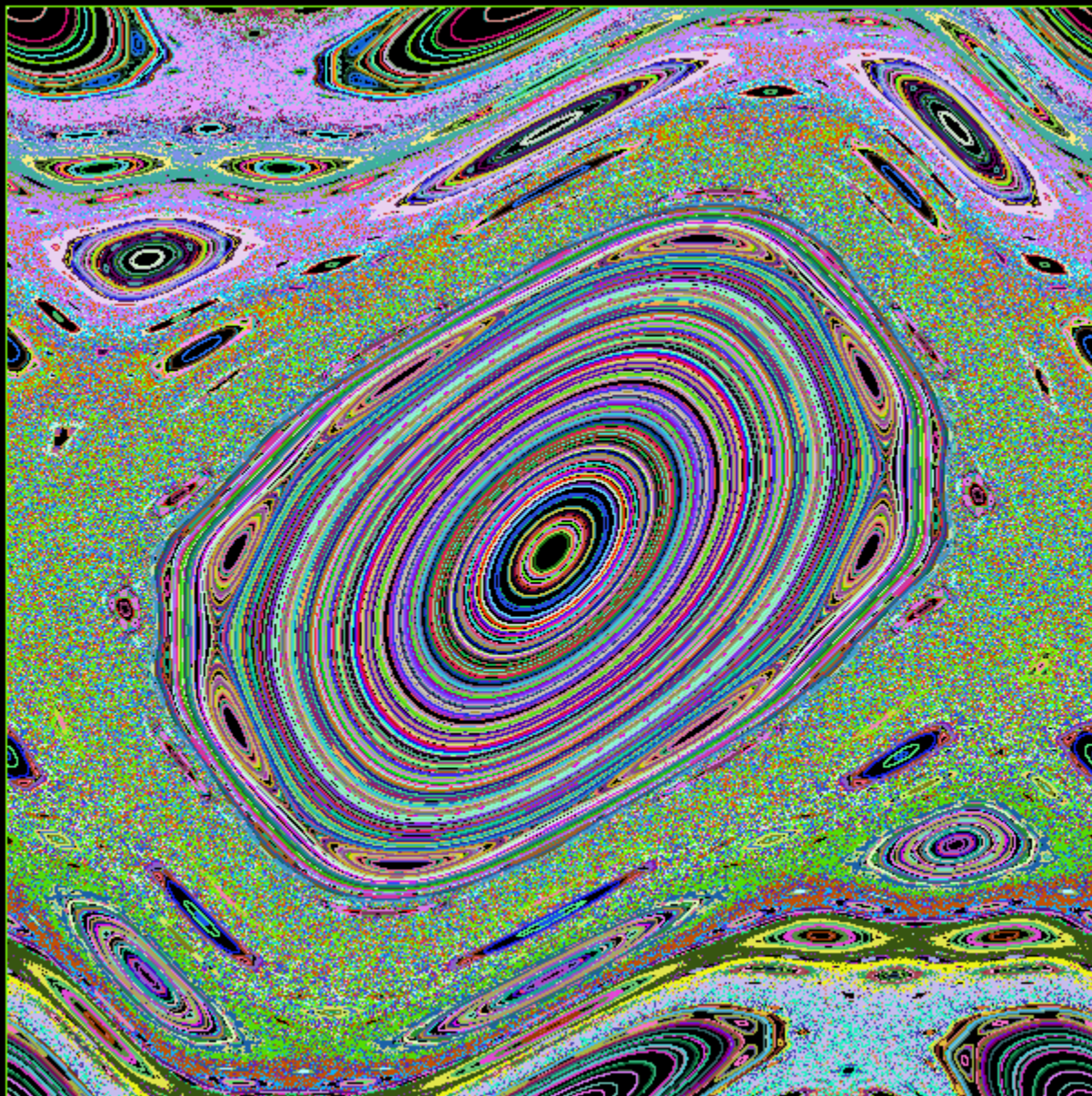
0.000000E+00

-3.000000

0.000000E+00

0.500000

1.000000



$k=1.5$

3.000000

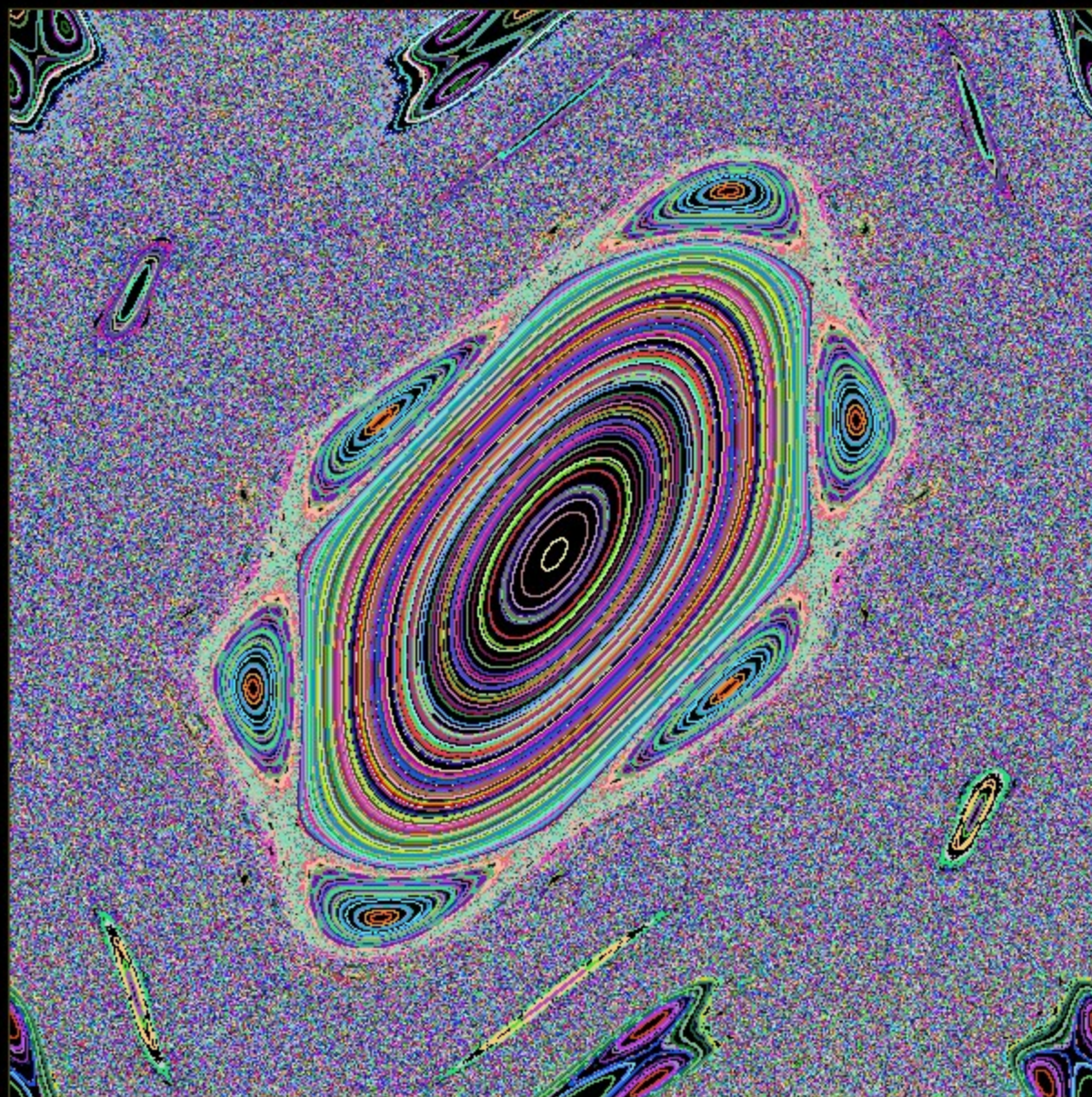
0.000000E+00

-3.000000

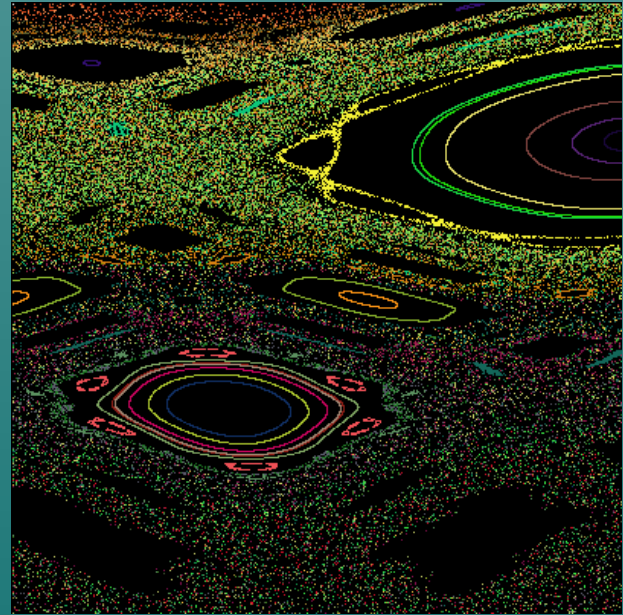
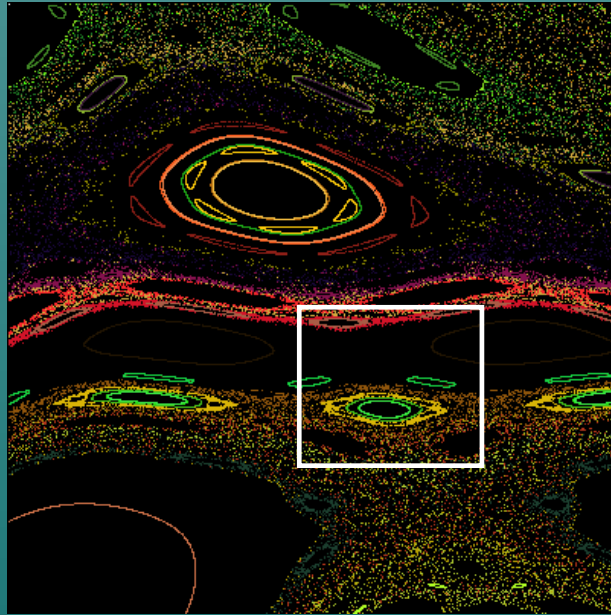
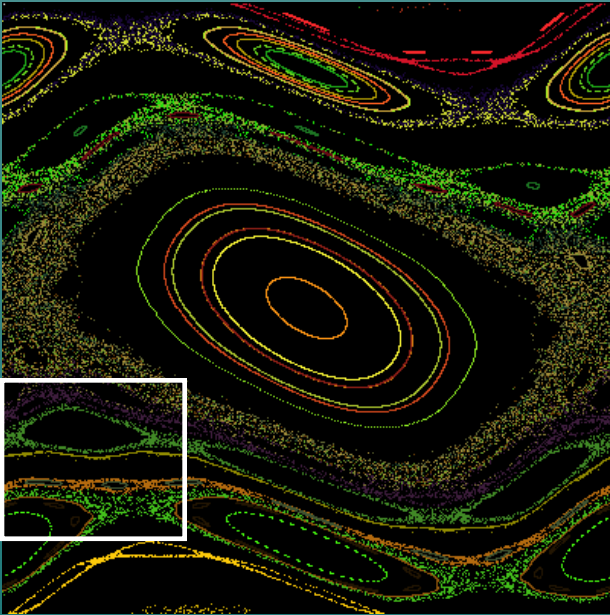
0.000000E+00

0.500000

1.000000



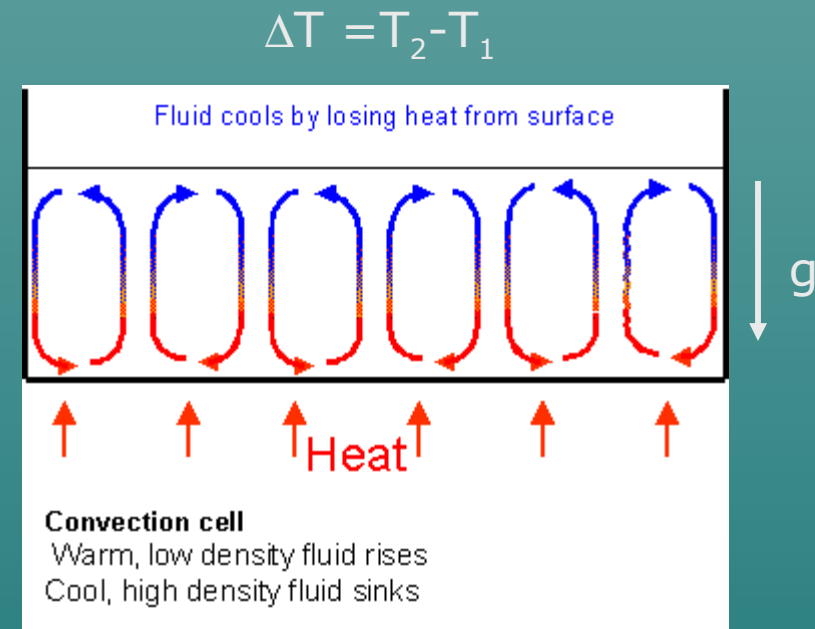
$k=1.0$



2- O atrator de Lorenz

$$\text{Se } \Delta T < T_c \quad \left\{ \begin{array}{l} T(x, y) = T_1 + D T \frac{y}{h} \\ Y(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

condução térmica



$$\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{U} = 0 \quad \textcircled{R} \quad \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{N}}' \cdot \mathbf{Y} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Se } T_c < \Delta T < T_{cc} \quad \left\{ \begin{array}{l} T(x, y) = T_1 + D T \frac{y}{h} + T_0 \cos \frac{\pi x}{h} \sin \frac{\pi y}{h} \\ Y(x, y) = Y_0 \sin \frac{\pi x}{h} \cos \frac{\pi y}{h} \end{array} \right.$$

convecção

Se $\Delta T > T_{cc}$

caos

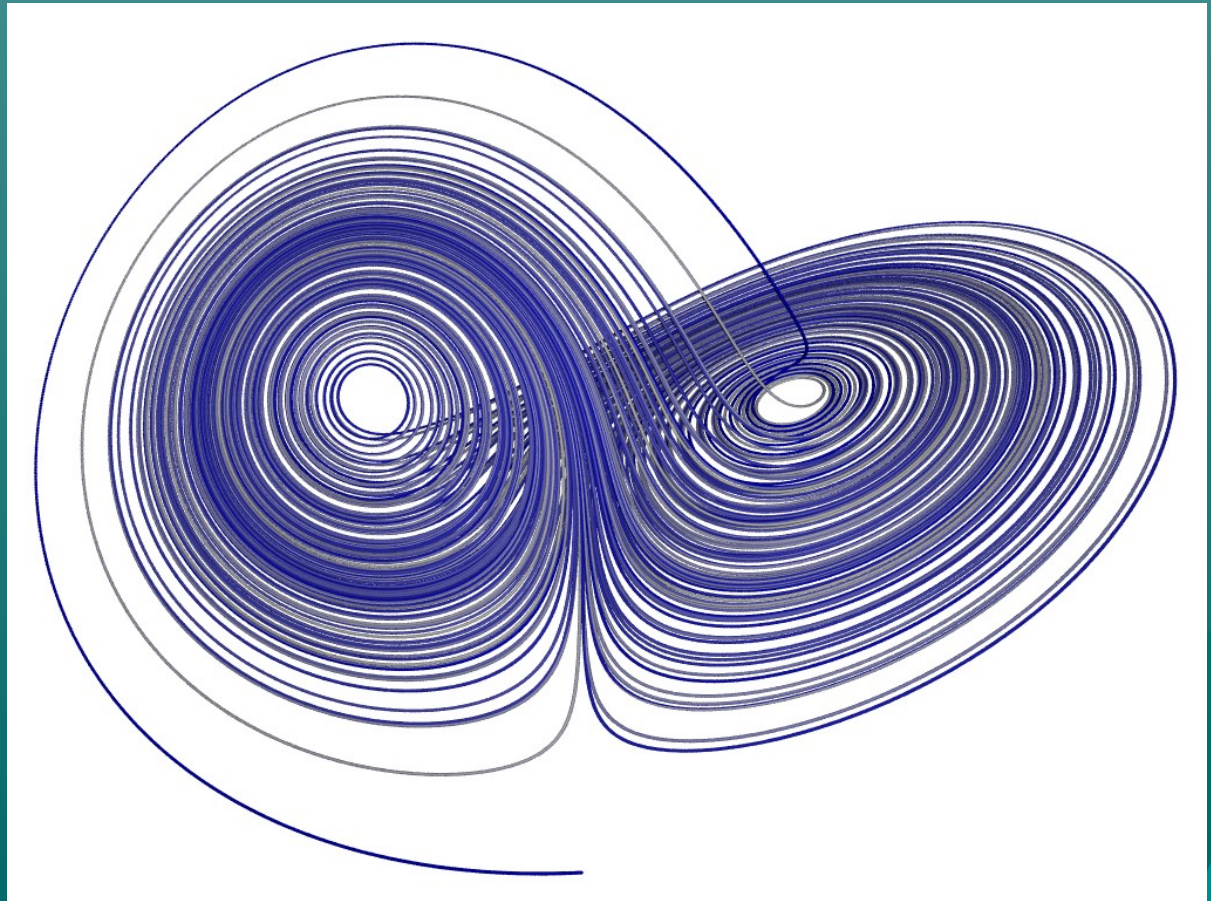
$$\left\{ \begin{array}{l} T(x, y) = T_1 + D T \frac{y}{h} + Y(t) \cos \frac{\pi x}{h} \sin \frac{\pi y}{h} Z(t) \sin \frac{\pi y}{h} \\ Y(x, y) = X(t) \sin \frac{\pi x}{h} \cos \frac{\pi y}{h} \end{array} \right.$$

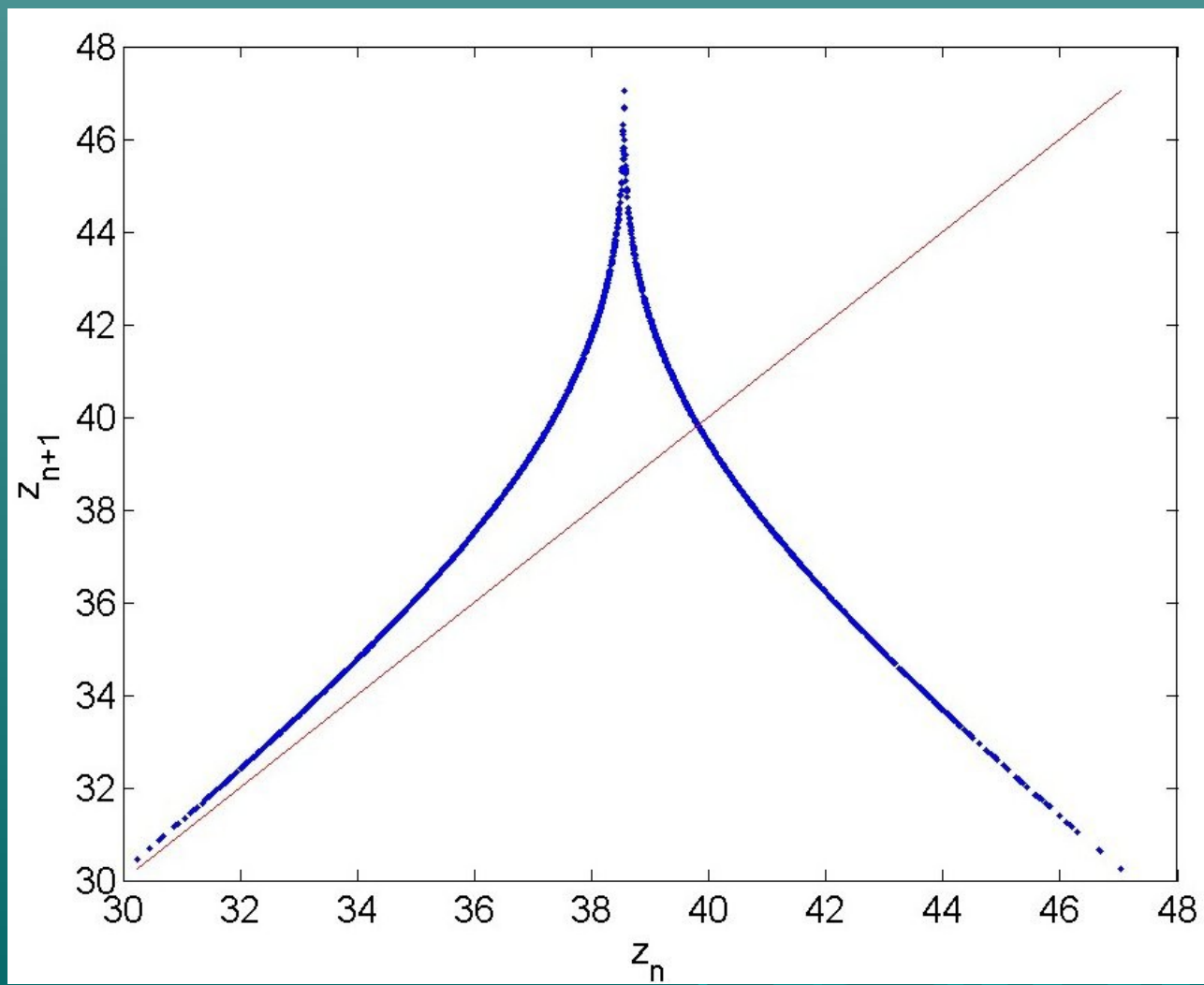
$$\dot{X} = s(Y - X)$$

$$\dot{Y} = X(r - Z) - Y$$

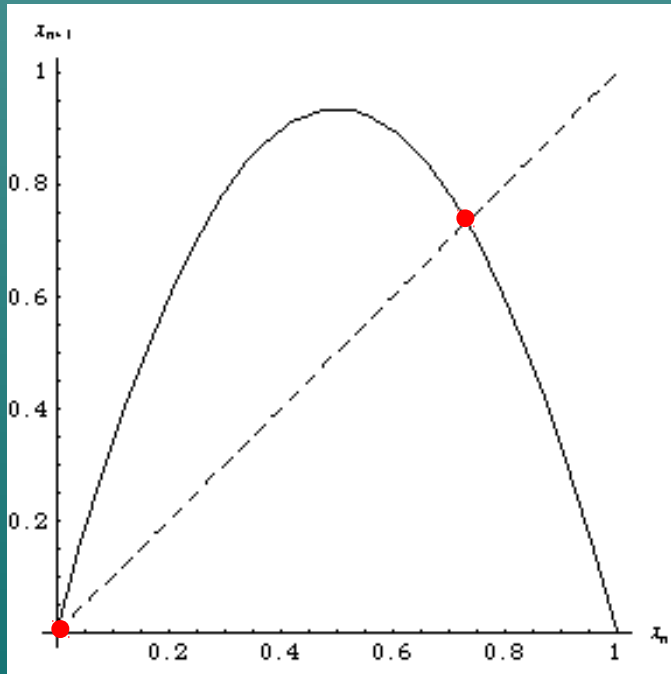
$$\dot{Z} = -bZ + XY$$

$$s=10 \quad b=8/3 \quad r=28$$





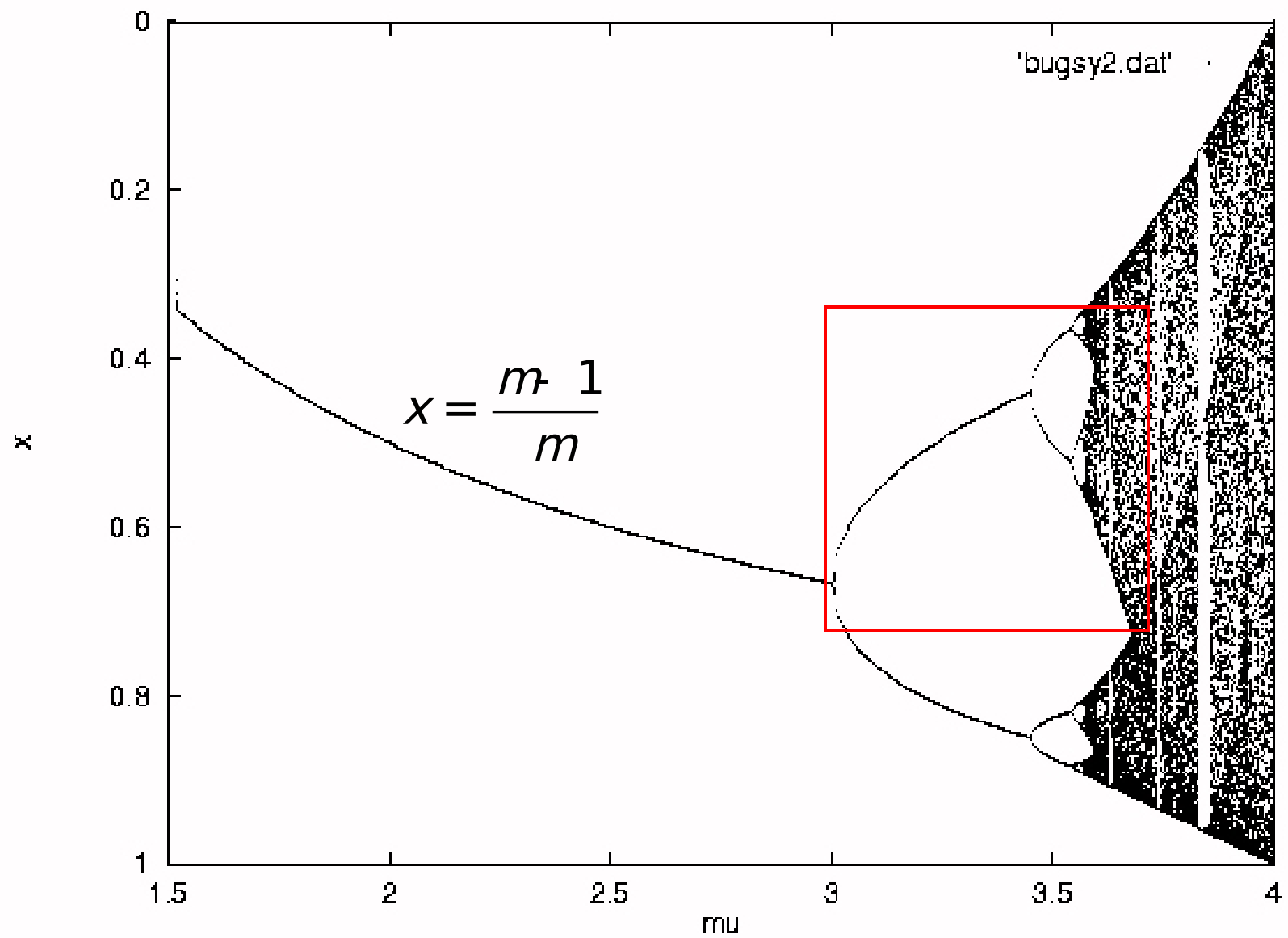
3- O mapa logístico $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$



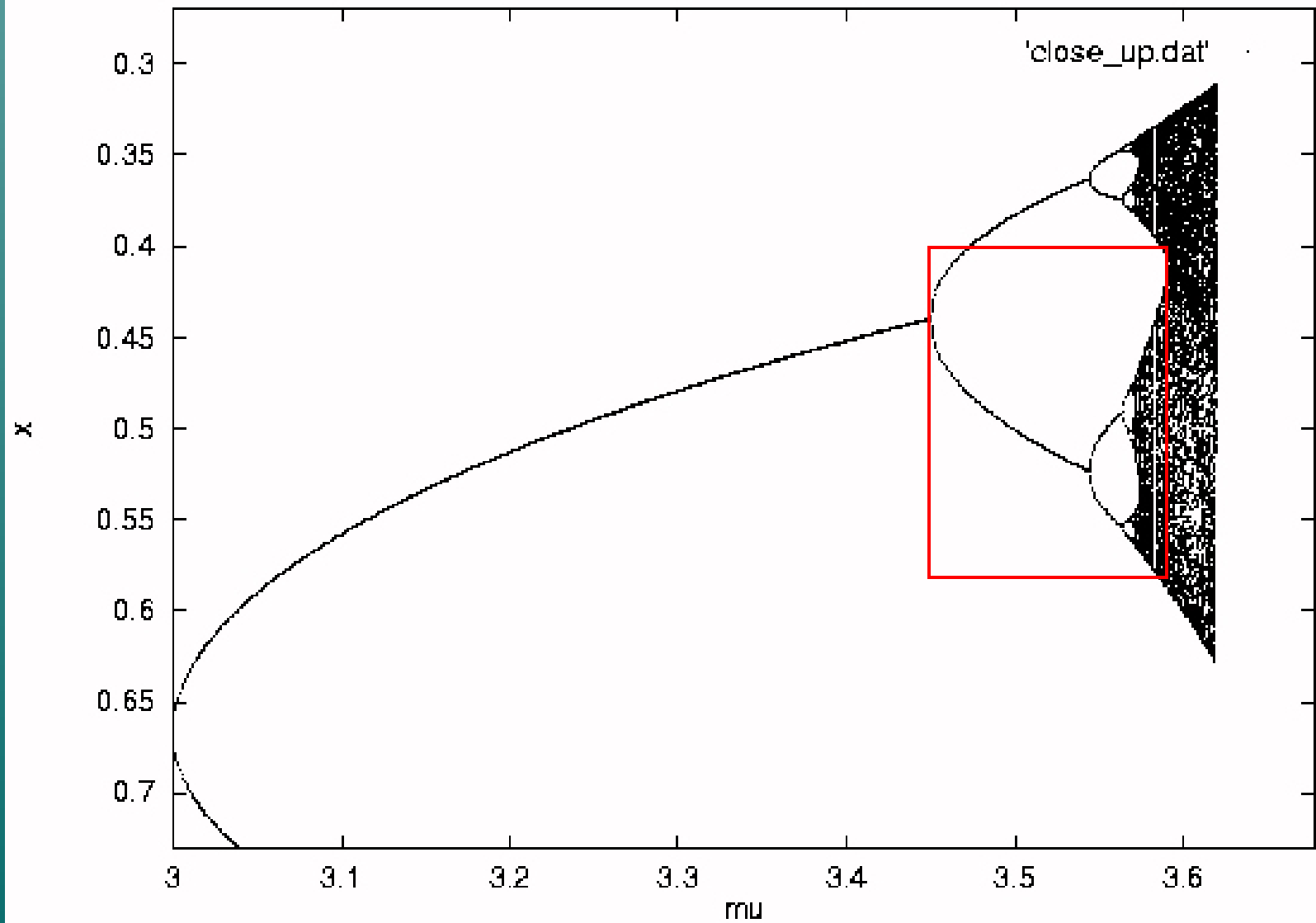
Pontos fixos:

$$x = 0$$

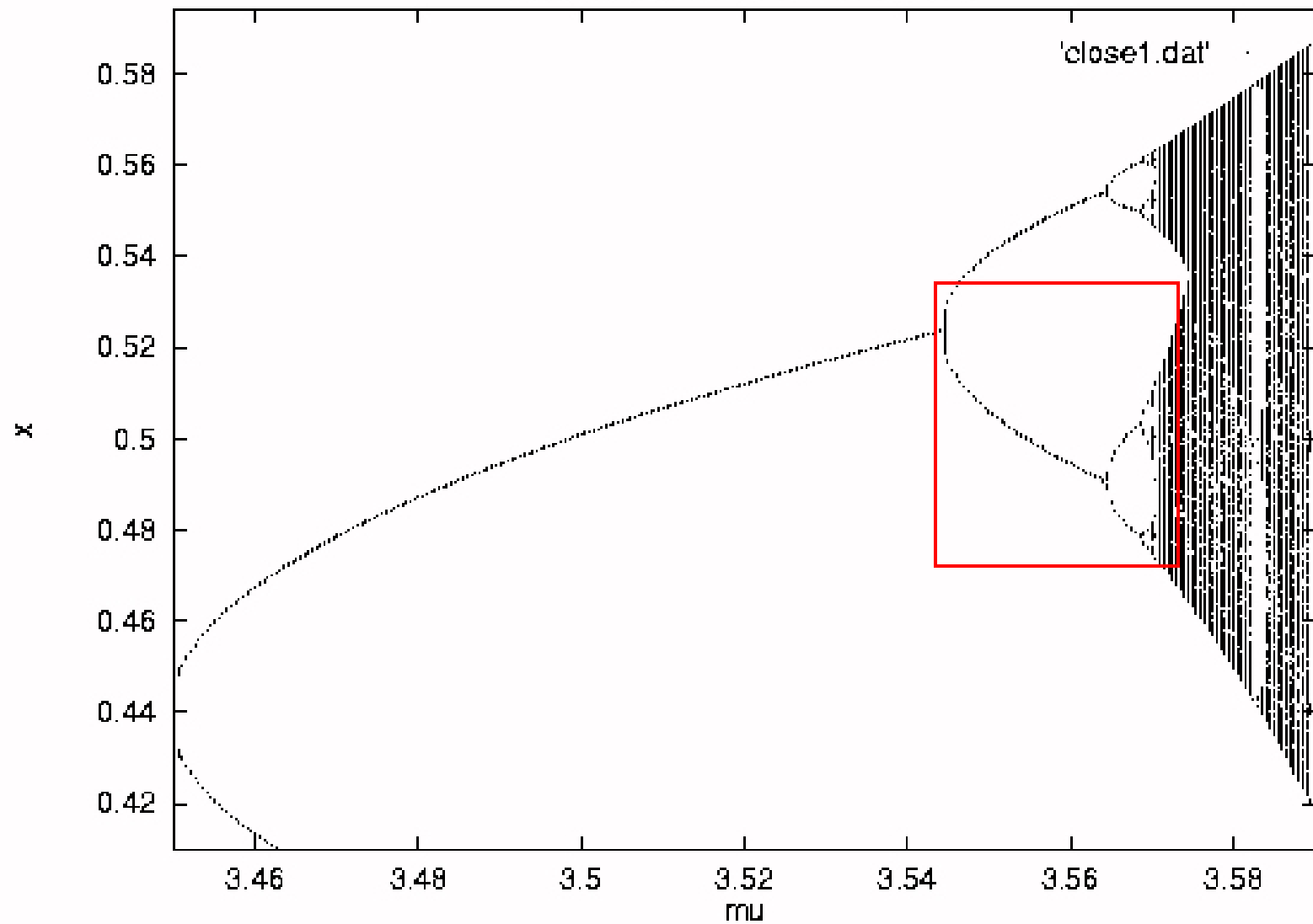
$$x = (\mu - 1)/\mu$$



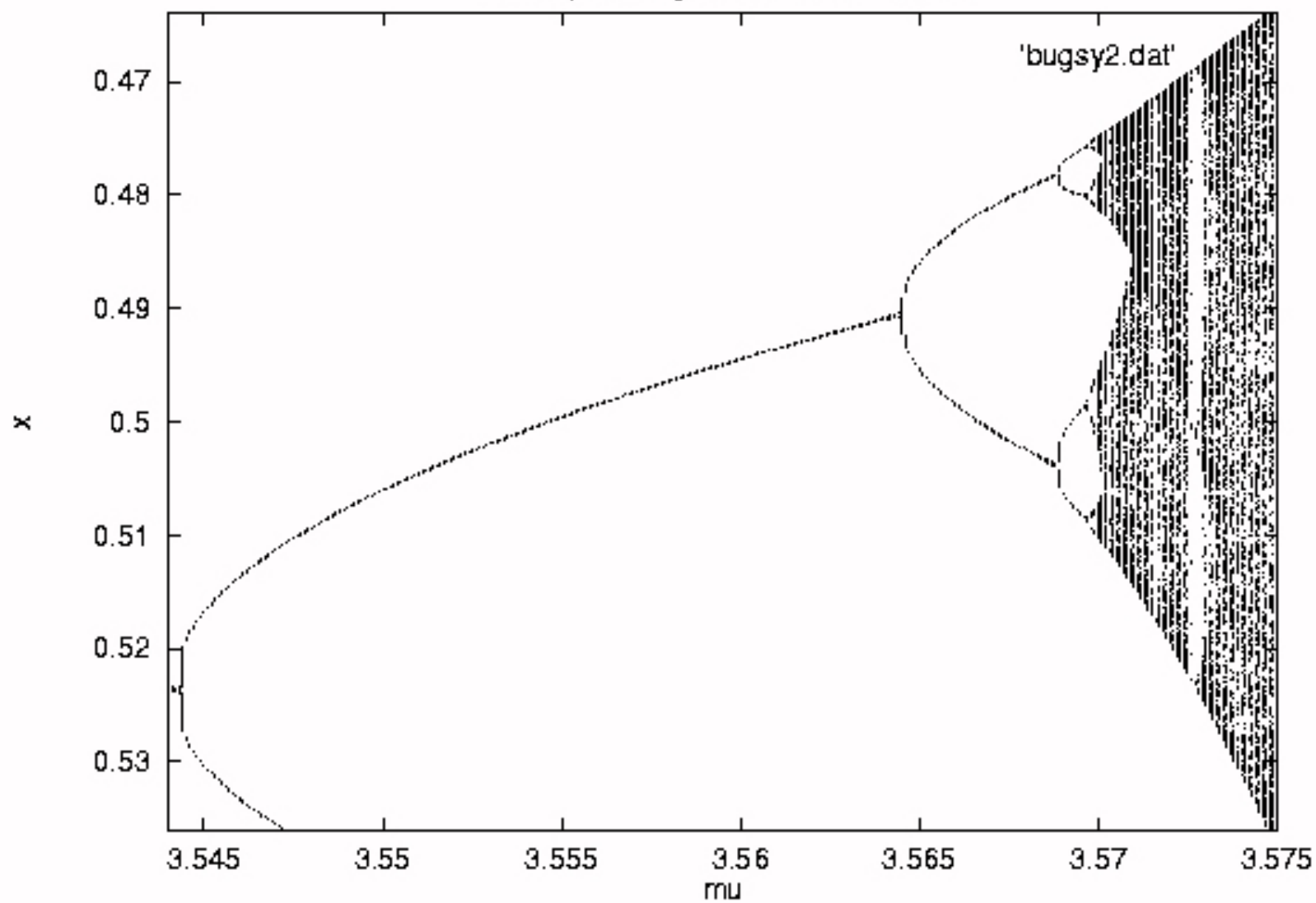
Closeup of range: $\mu = 3.0 - 3.678$

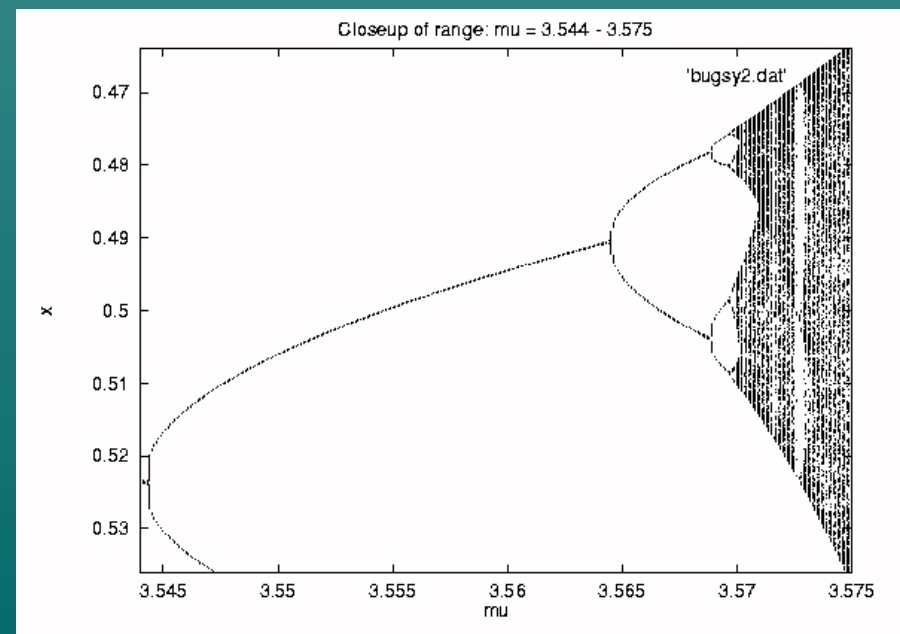
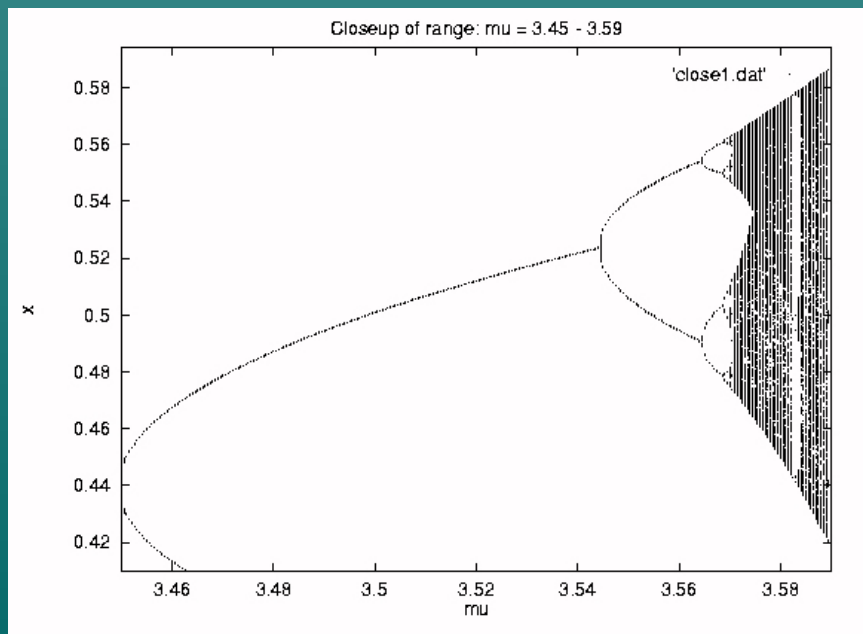
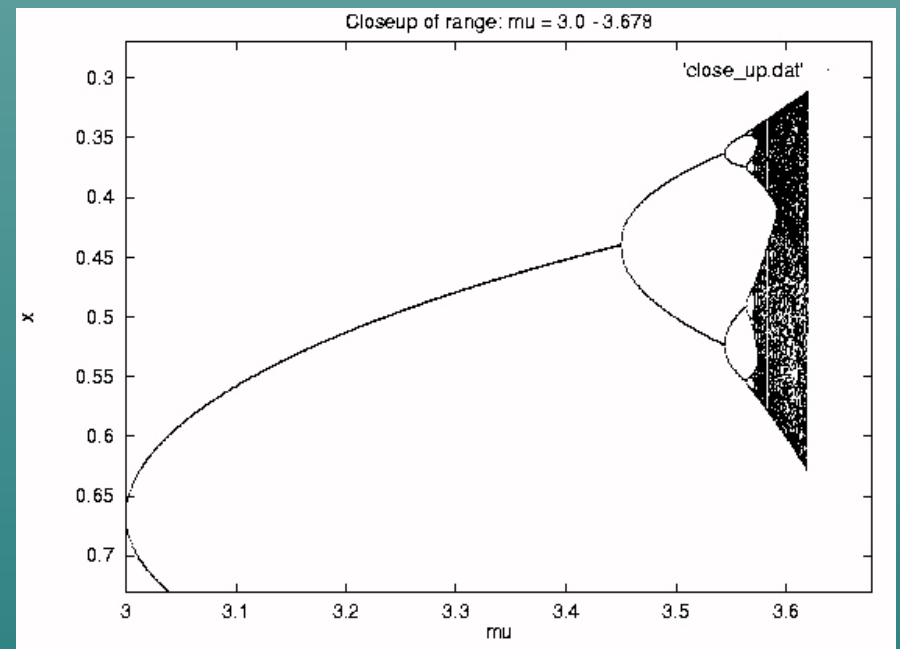
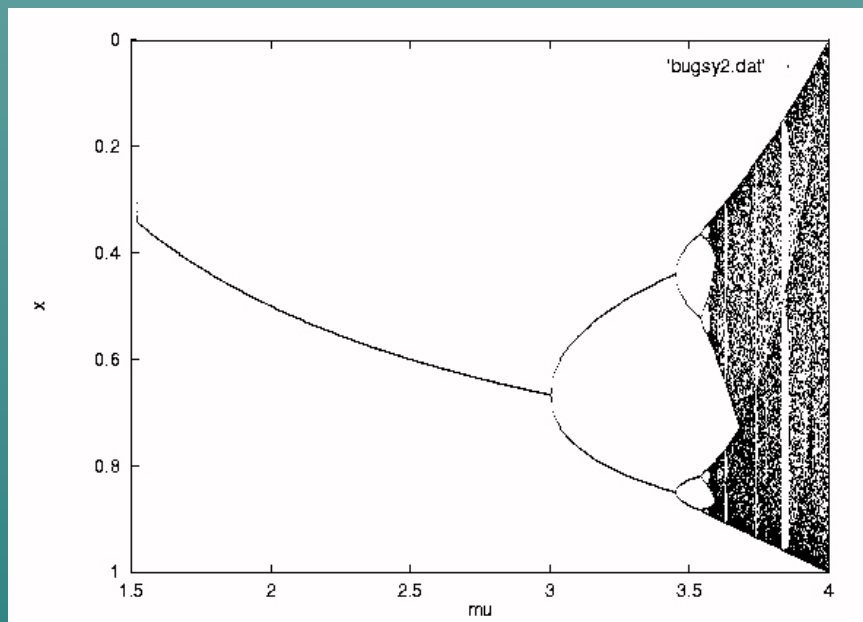


Closeup of range: $\mu = 3.45 - 3.59$



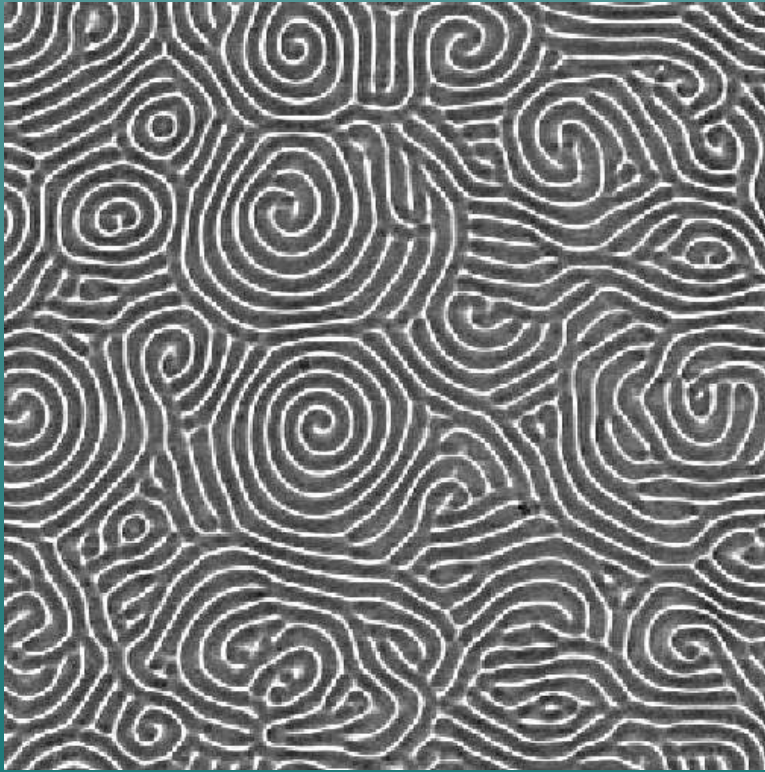
Closeup of range: $\mu = 3.544 - 3.575$



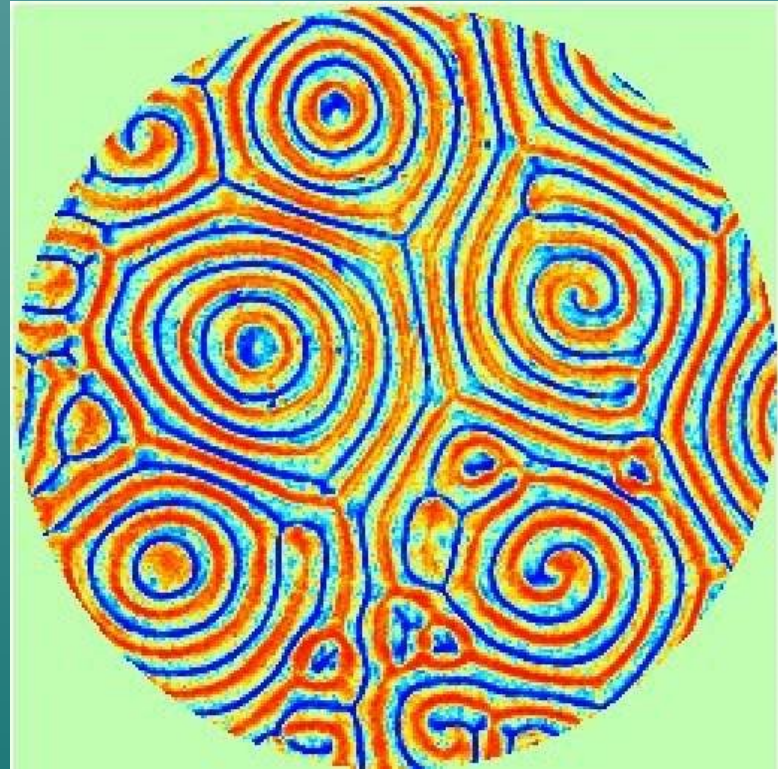


Autosimilaridade: ordem no caos

4- Padrões em células de convecção



Dióxido de carbono

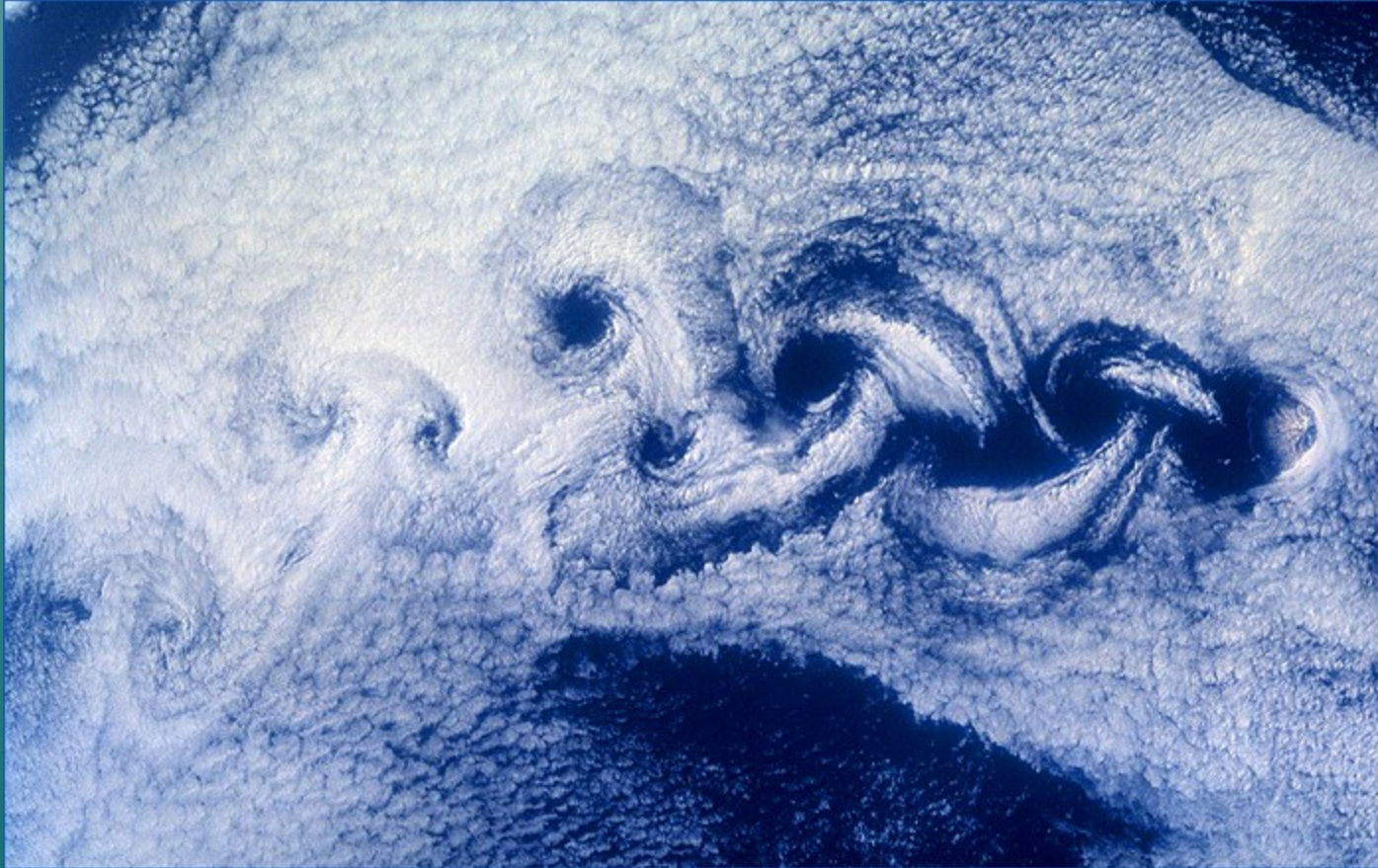


Acetona em célula circular

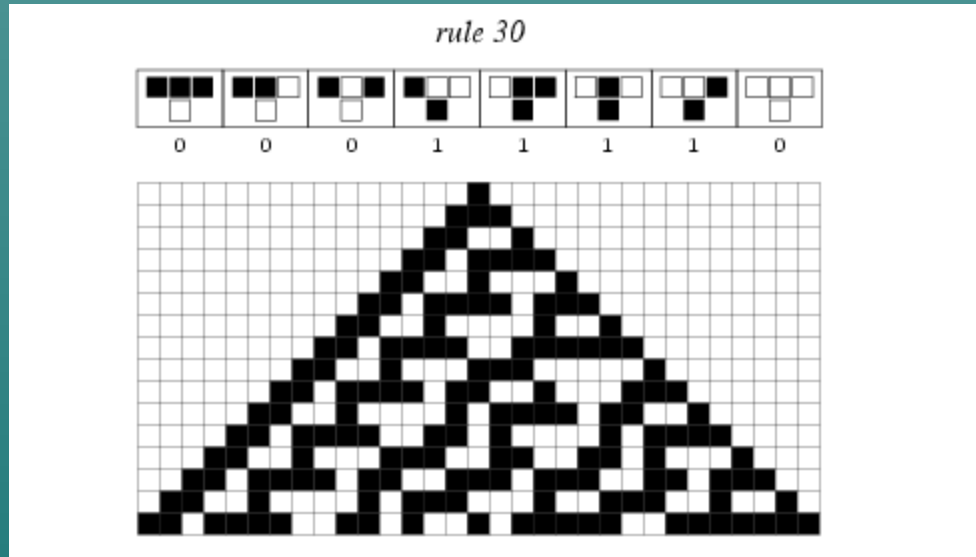
Espessura 1mm
 $\Delta T = 9^\circ\text{C}$

From K.M.S. Bajaj, D.S. Cannell, and G. Ahlers, Phys. Rev. E 55, R4869 (1997)

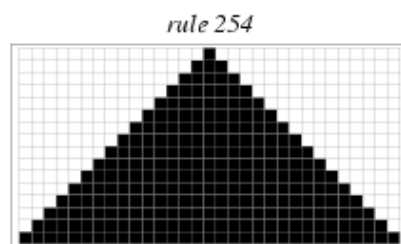
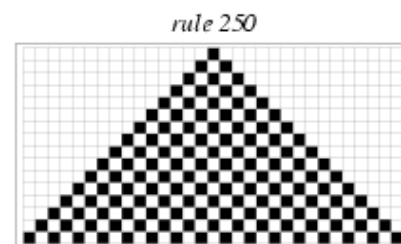
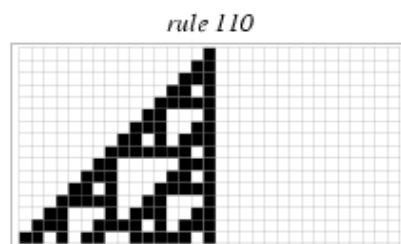
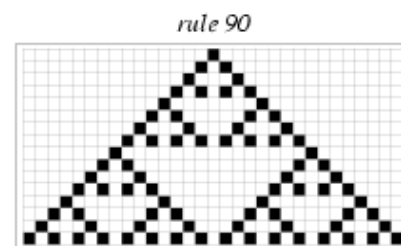
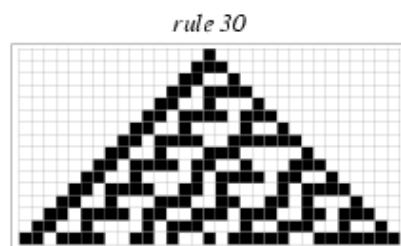
5- Modelos atmosféricos



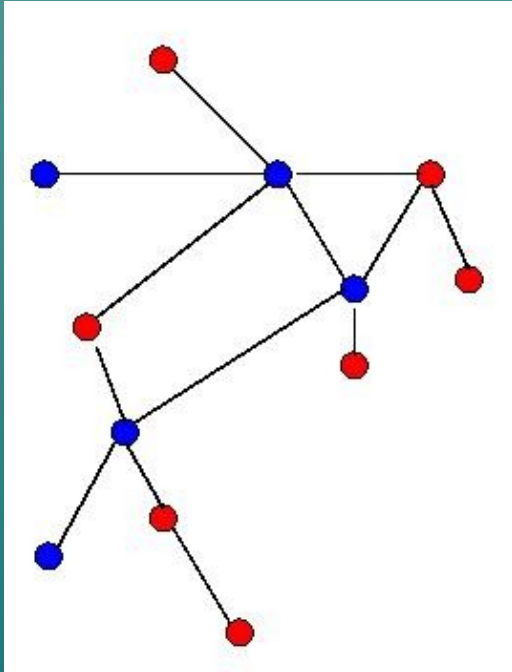
7- Autômatos celulares



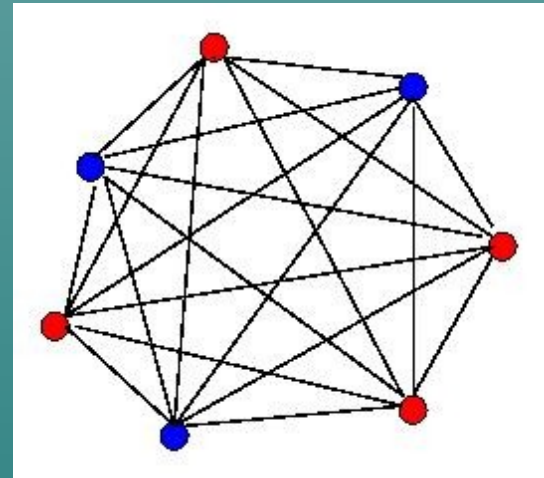
<i>rule 30</i>		0	0	0	1	1	1	1	0
<i>rule 90</i>		0	1	0	1	1	0	1	0
<i>rule 110</i>		0	1	1	0	1	1	1	0
<i>rule 250</i>		1	1	1	1	1	0	1	0
<i>rule 254</i>		1	1	1	1	1	1	1	0



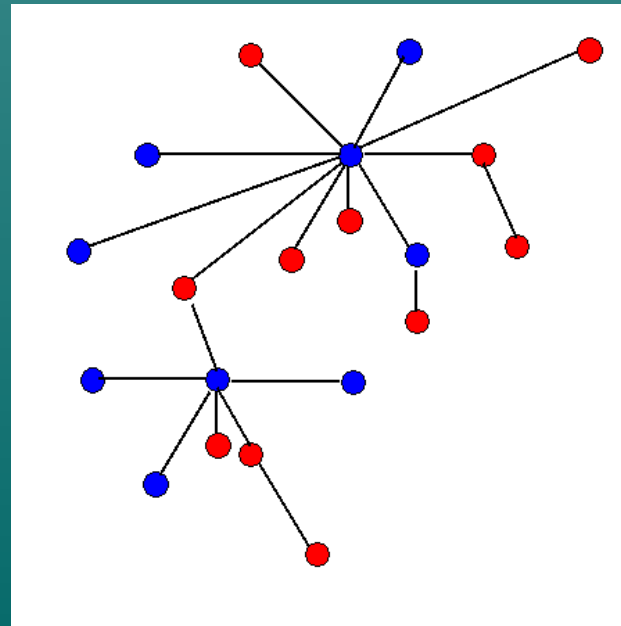
8- Redes complexas



aleatórias

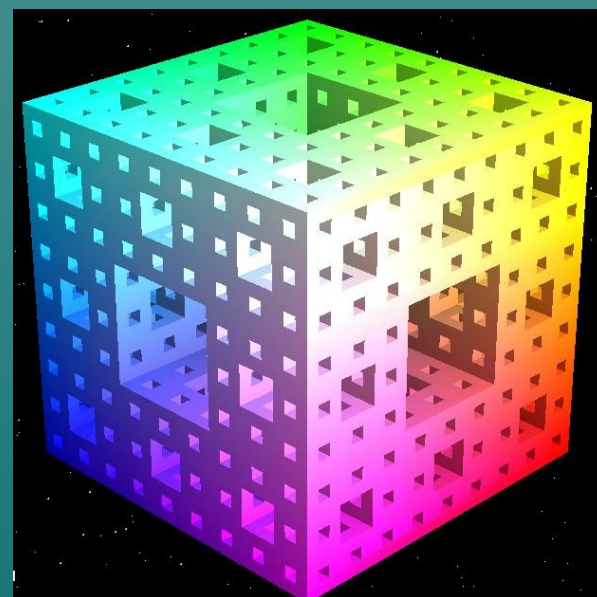
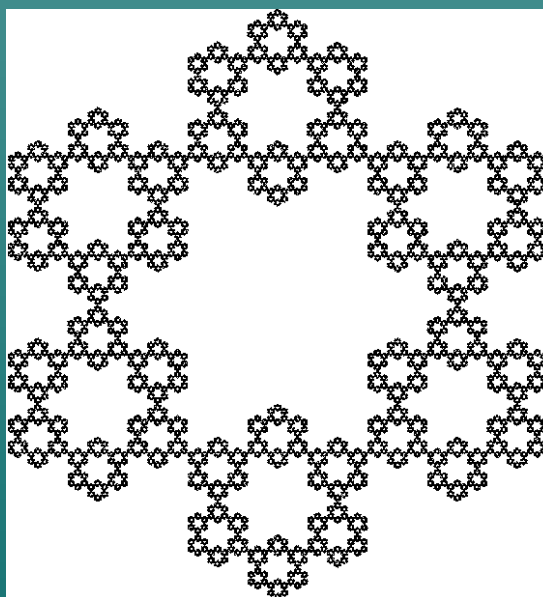
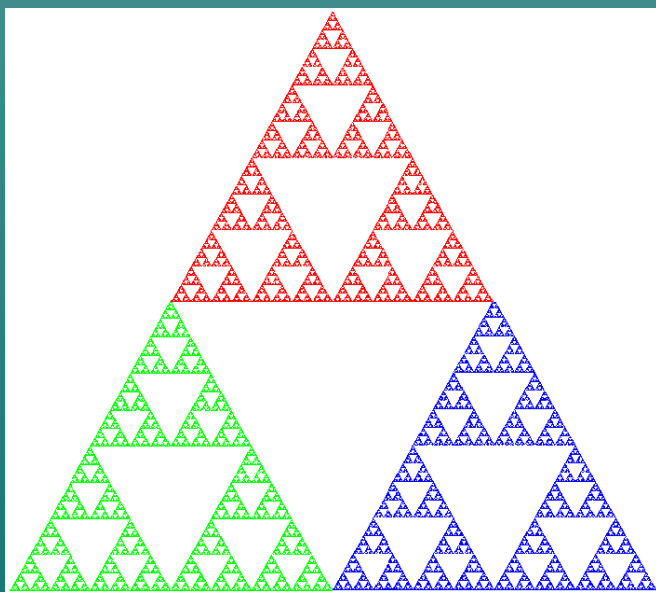


totalmente conexas



livres de escala

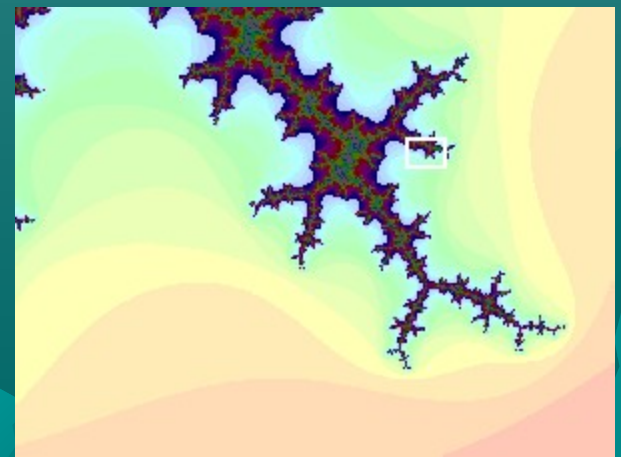
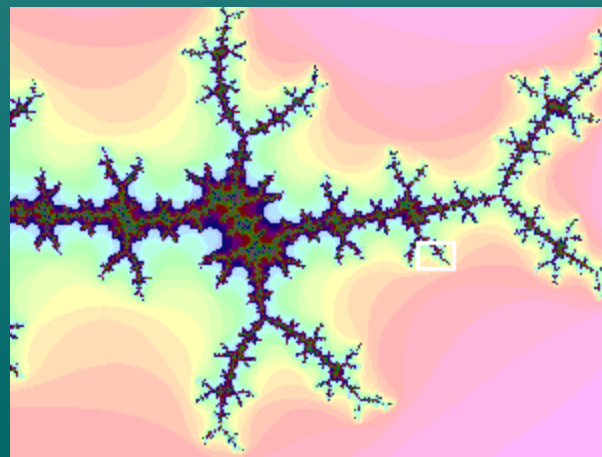
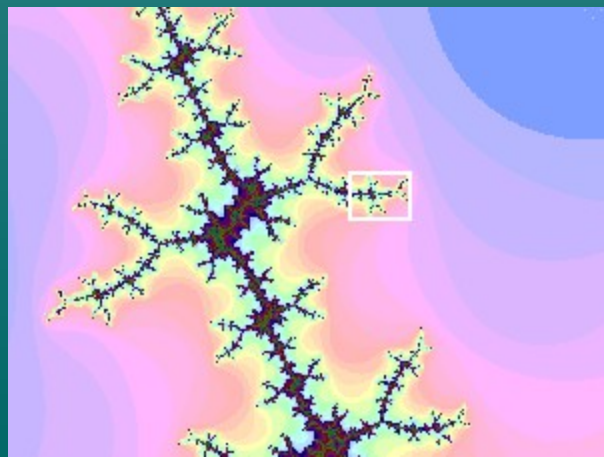
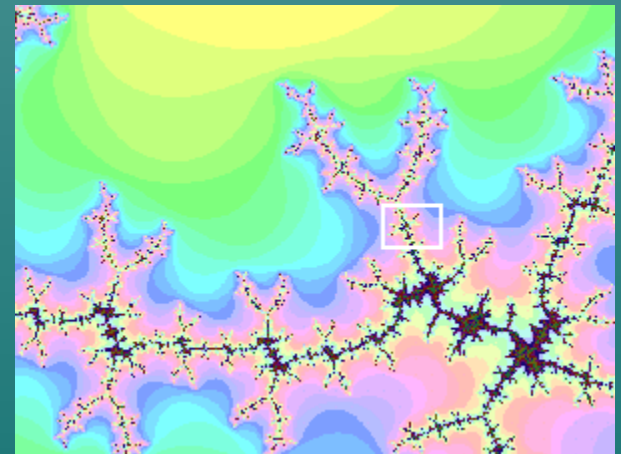
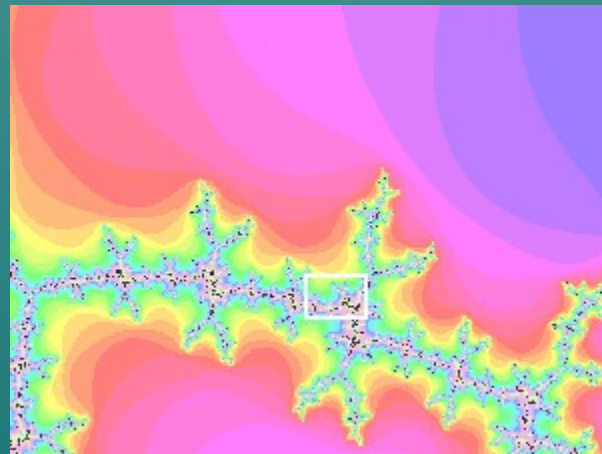
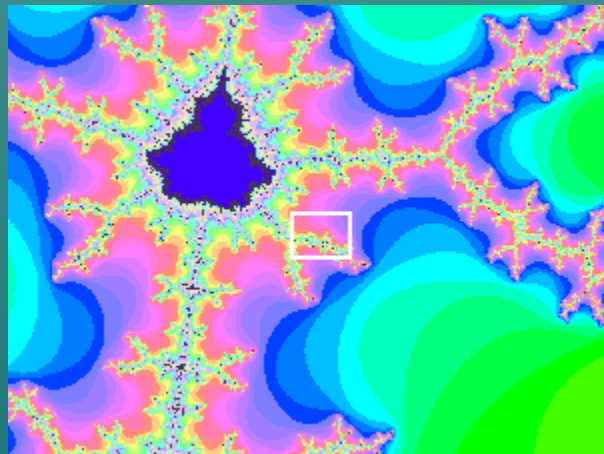
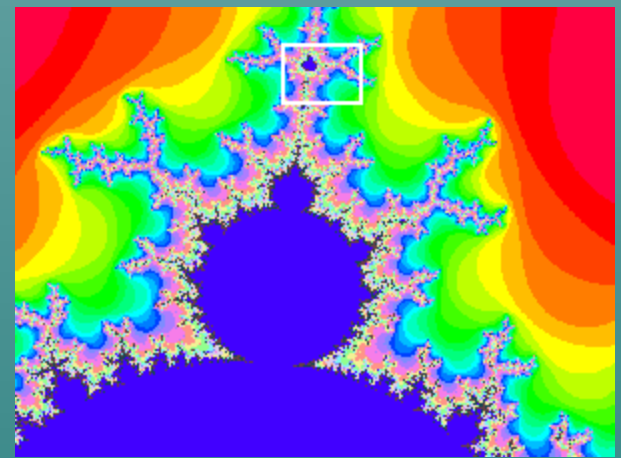
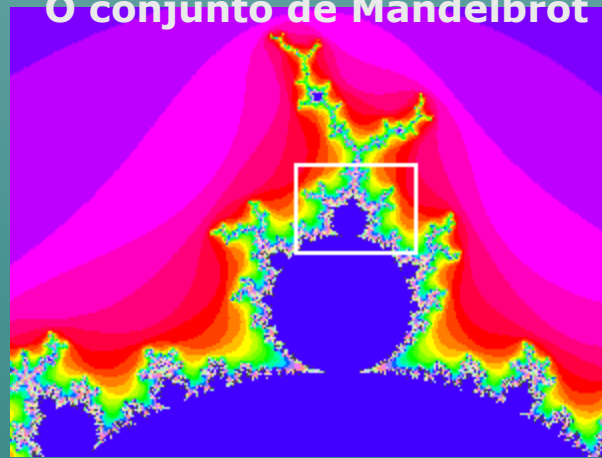
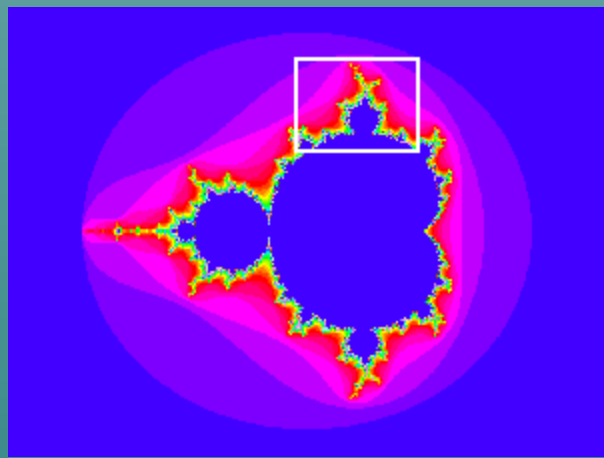
9 - Fractais: conjuntos autosimilares



Antena de Sierpinski



O conjunto de Mandelbrot



O que aprendemos?

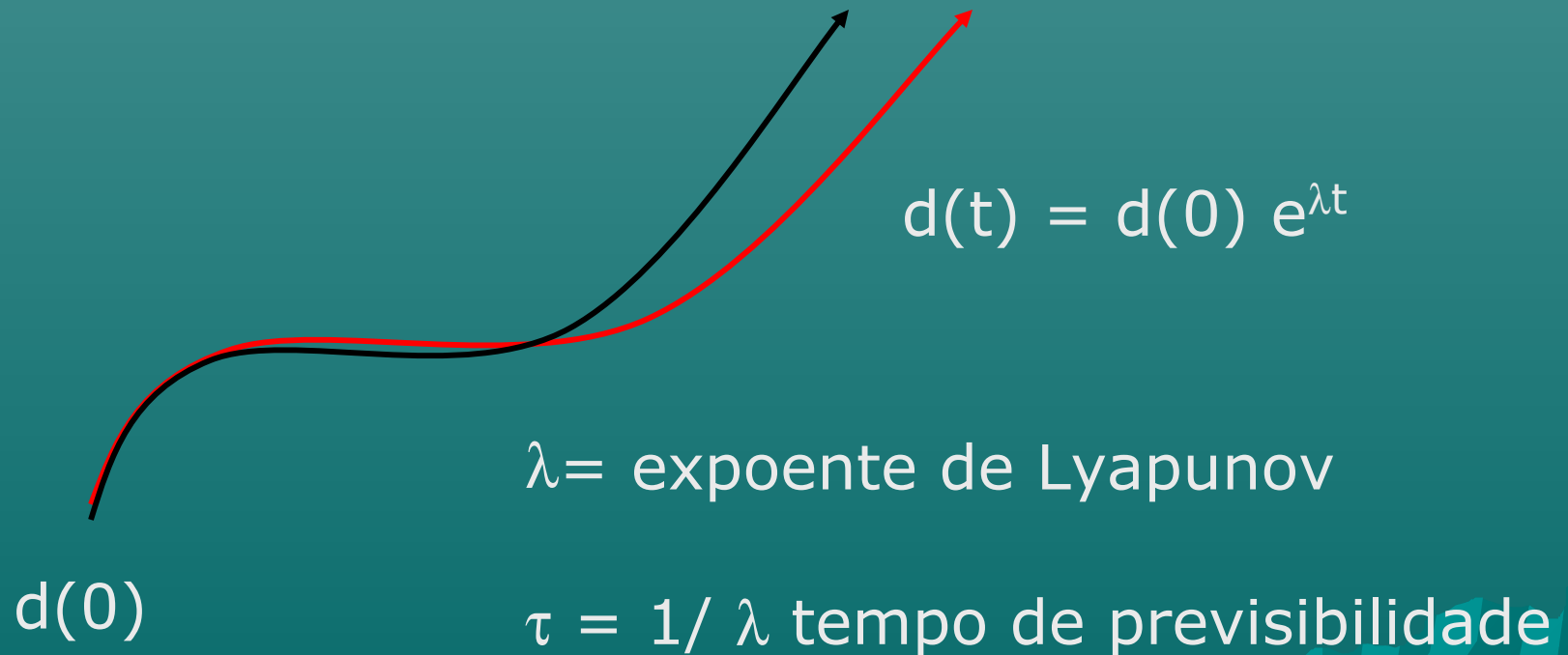
- Resultados gerais
- Progressos específicos em cada sub-área
 - caos no sistema solar
 - caos em circuitos elétricos
 - caos em sistemas biológicos (predador-presa, parasita-hospedeiro)
 - caos em redes neurais e ritmos cardíacos
 - teoria de bifurcações
 - rotas para o caos
 - turbulência
 - mecânica estatística de sistemas pequenos

Resultados Gerais

1 - O comportamento de sistemas aparentemente simples pode ser bastante rico e complexo (caótico).

- Vários problemas mecânicos Pêndulo duplo com molas
- Problema de três corpos
- Átomo de Hélio
- Movimento vibracional de moléculas
- Movimento coletivo de núcleos atômicos
- Átomos de H em campos magnéticos constantes
- Átomos de H em campos elétricos AC
- Elétrons confinados em contornos de varias formas

2 -Trajetórias caóticas possuem sensibilidade a condições iniciais. Sistemas clássicos determinísticos apresentam caráter intrinsecamente probabilístico, tornando-se imprevisíveis a tempos longos.



3 - Equações que exibem movimento caótico não possuem soluções completas, i.e., não podem ser integradas.

4 – Teorema KAM: sistemas regulares não se tornam ergódicos quando perturbados. Não-integrabilidade não implica ergodicidade.

5 – Todo sistema caótico tem um fractal associado a sua dinâmica. Assim como o fractal tem estrutura infinitamente fina, leva um tempo infinitamente longo para que o sistema dinâmico o produza.

6 – Existe ordem no caos: diferentes sistemas dinâmicos exibem rotas universais para o caos, com mesmos expoentes característicos.

7 – É possível controlar o caos com pequenas perturbações.

Resultados Específicos: O sistema solar

1 – Rotação Retrógrada de Rotação de Vênus (atmosfera densa)

Cassini (1666) $T \approx 23$ horas

Bianchini (1727) $T \approx 24$ dias

Schiappelli (1878) $T \approx 224$ dias

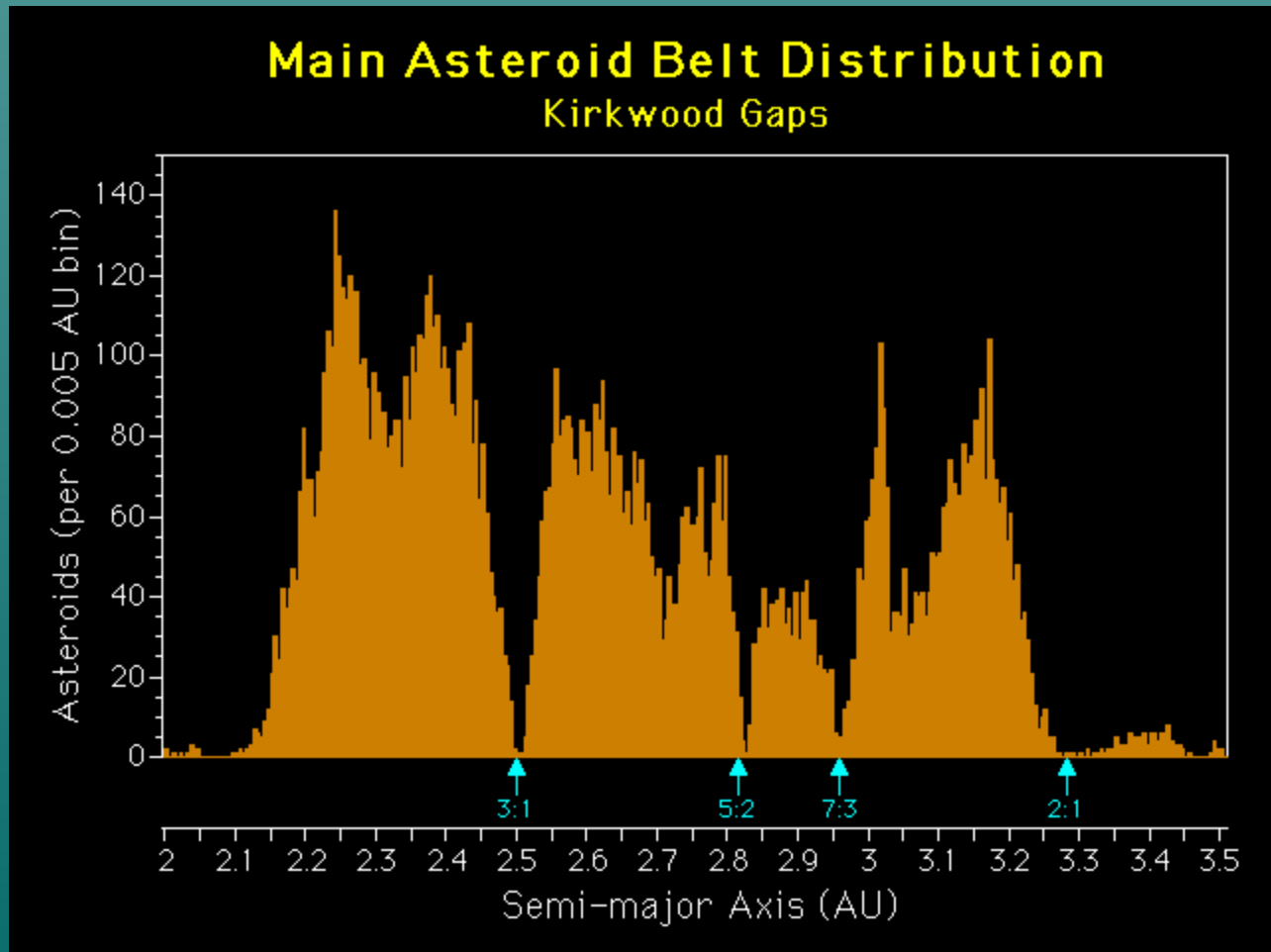
Medidas com radar pela JPL (1962):

movimento **retrógrado** com $T \approx 243$ dias

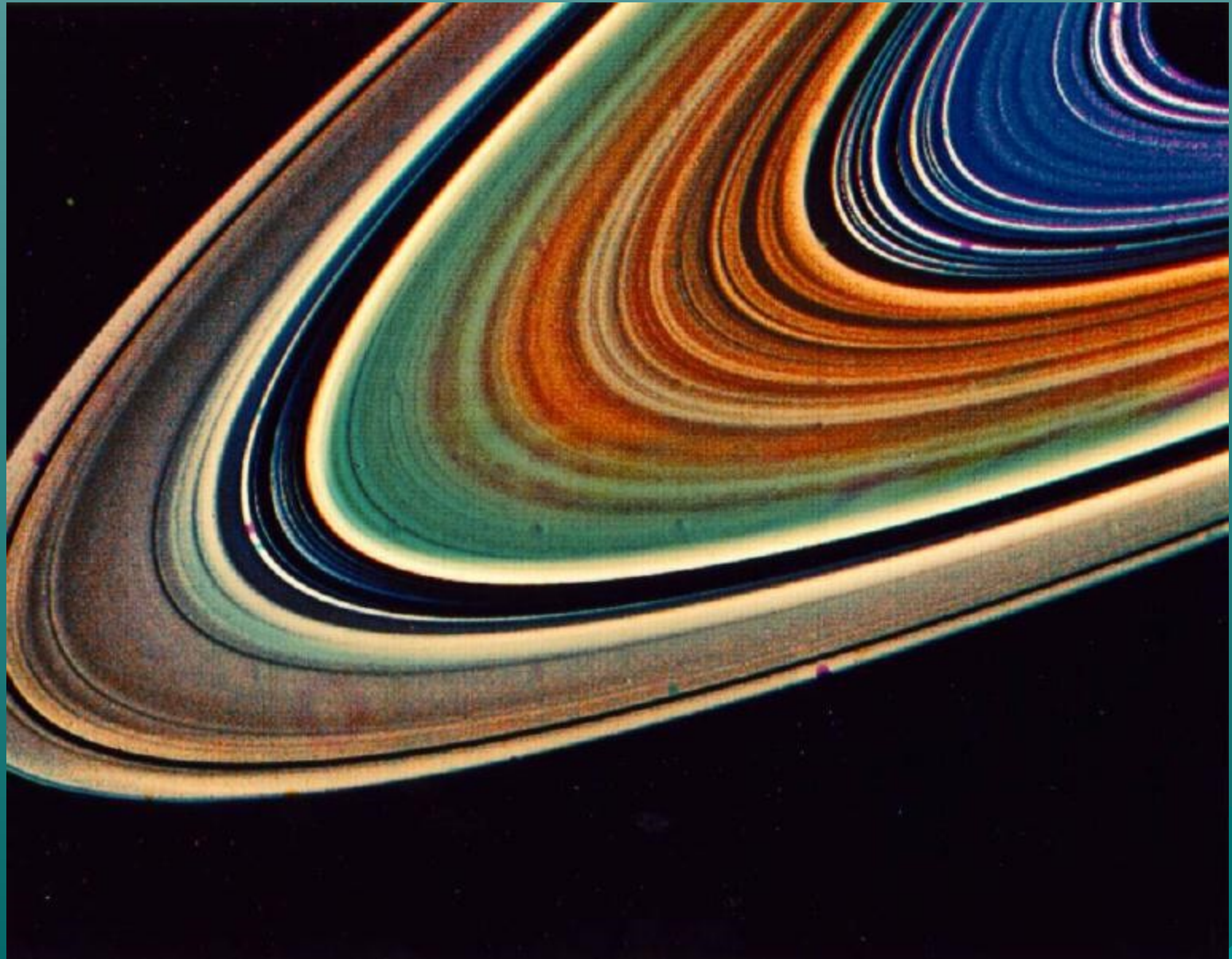
Teorias catastróficas?

O movimento de precessão do eixo de rotação de Vênus esta em um grande mar caótico que permite a inversão completa do eixo de rotação. Isso, somado a ressonâncias de efeitos de maré levam a apenas quatro estados estáveis possíveis, um deles sendo o atual. (J. Laskar 2001)

2 – Falhas no cinturão de asteróides entre Marte e Júpiter



Falhas nos anéis de Saturno



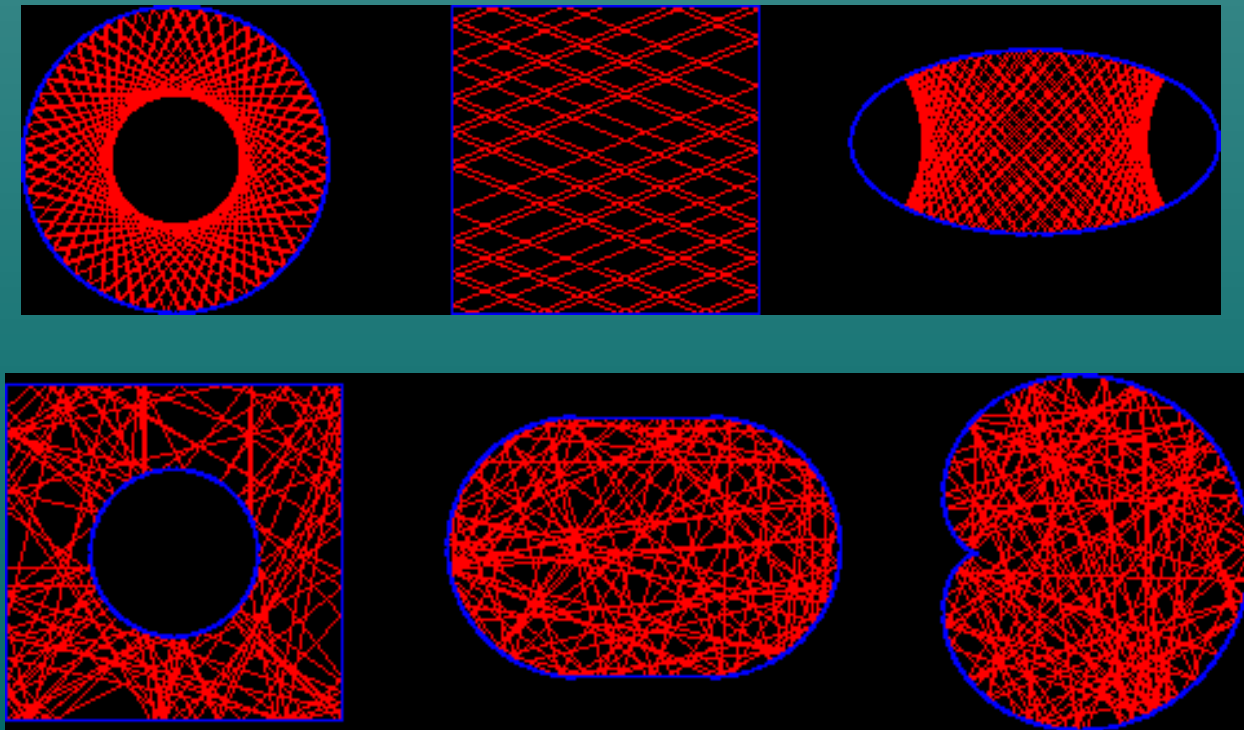
3 – Clima terrestre em escala geológica

Ressonâncias entre a precessão do periélio da Terra e Marte e a precessão de suas linhas nodais geram regiões caóticas que determinam em grande parte a insolação na superfície terrestre e, portanto, seu clima.



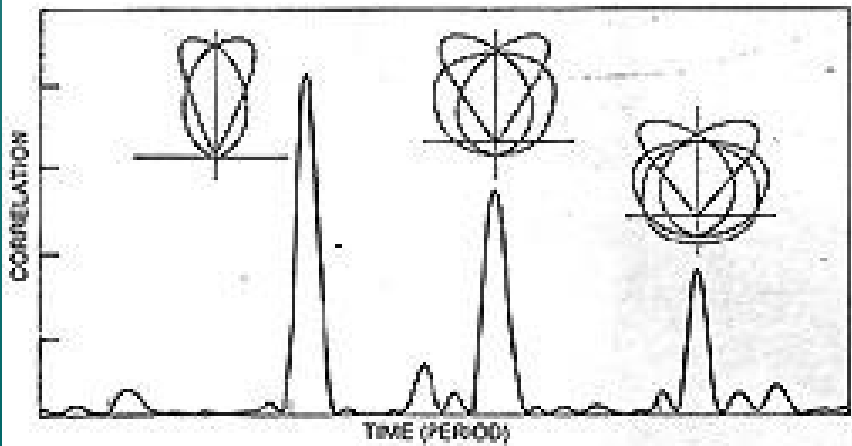
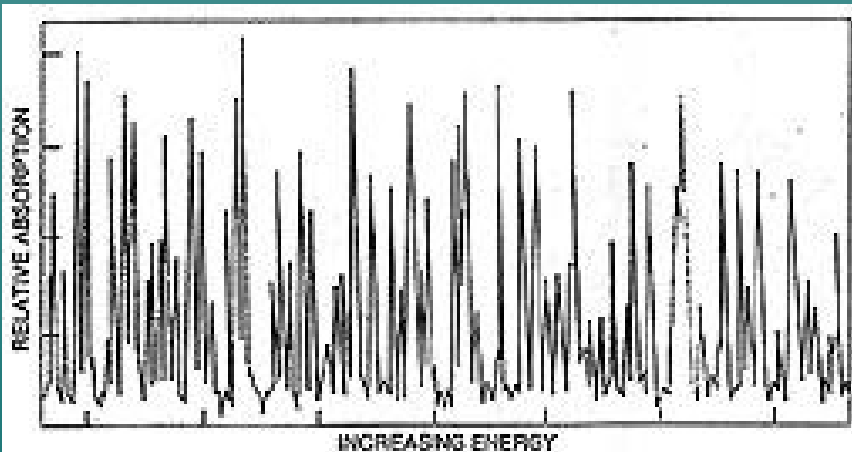
Alguns Problemas em Aberto

- 1 - Propriedades estatísticas de órbitas em sistemas fechados (Poincaré)
 - número de órbitas como função do período ou ação
 - correlações
 - bifurcações

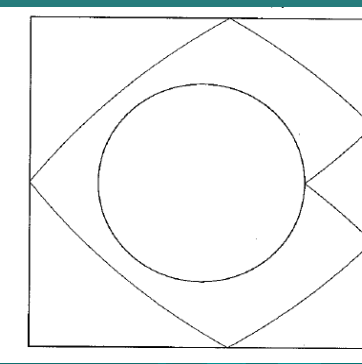
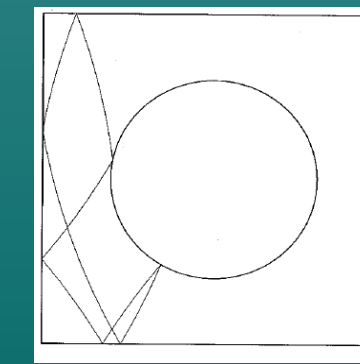
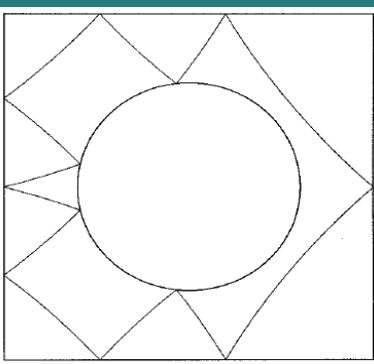
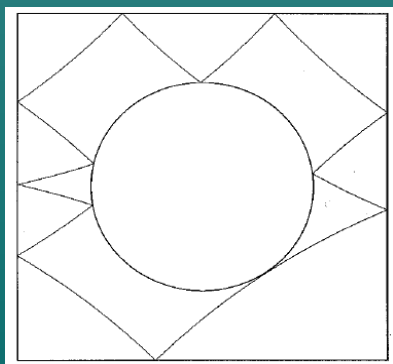
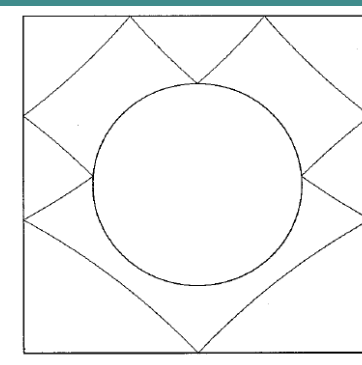
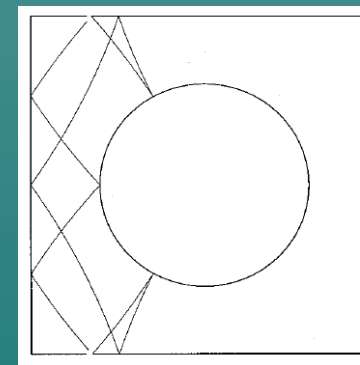
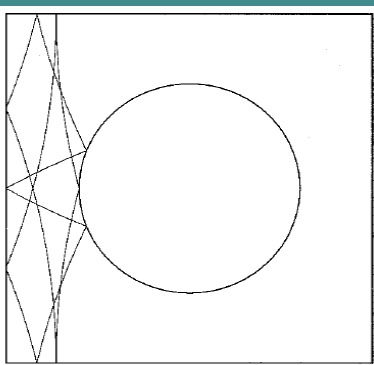
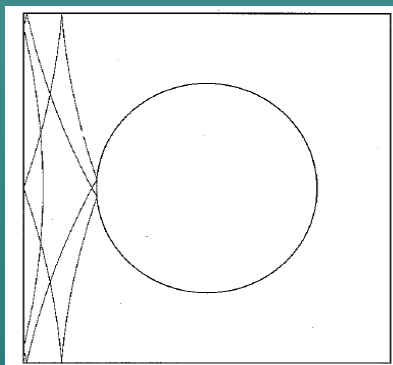
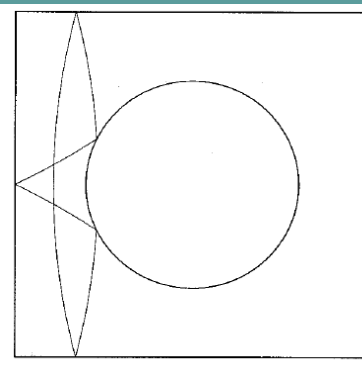
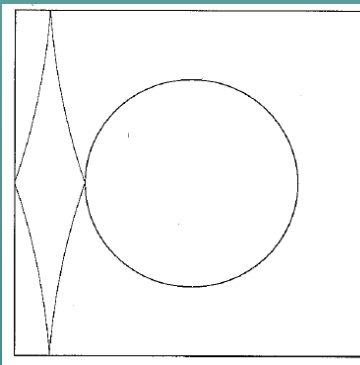
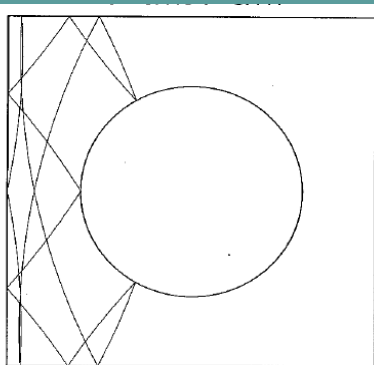
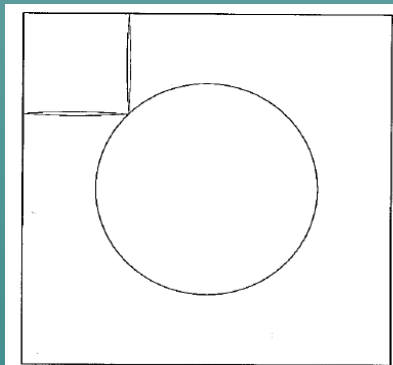


$$G(E) = \sum_n \delta_\varepsilon(E - E_n)$$

$$\approx \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int \delta(E - H) dq dp + \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\tau_\varepsilon e^{-\varepsilon\tau_\varepsilon/\hbar}}{\sqrt{\det |M_p^r - I|}} \cos\left(rS_p/\hbar - \sigma_{pr}\pi/2\right)$$



Propriedades semiclássicas de sistemas caóticos.



2 – Movimento em sistemas não integráveis não é necessariamente ergódico. Quando é seguro aplicar o teorema ergódico?

- Teorema KAM
- Problema de Fermi-Pasta-Ulam
- Bilhares de vários tipos (poligonais, suaves)

3 – Caos em sistemas com muitos graus de liberdade.

- sistemas de alguns corpos; mapas acoplados;
 - aplicação em astronomia, biologia, física
-
- caos itinerante
 - sincronização
 - aproximação de campo médio e cálculo de correlações
- 

4 – Fluidos Turbulentos

Quantidades como velocidade, pressão e temperatura tem comportamento espacial e temporal caótico.

- Qual a distribuição de probabilidade dessas quantidades?
- Porque essas grandezas apresentam comportamento intermitente e quais as características dessa intermitência?



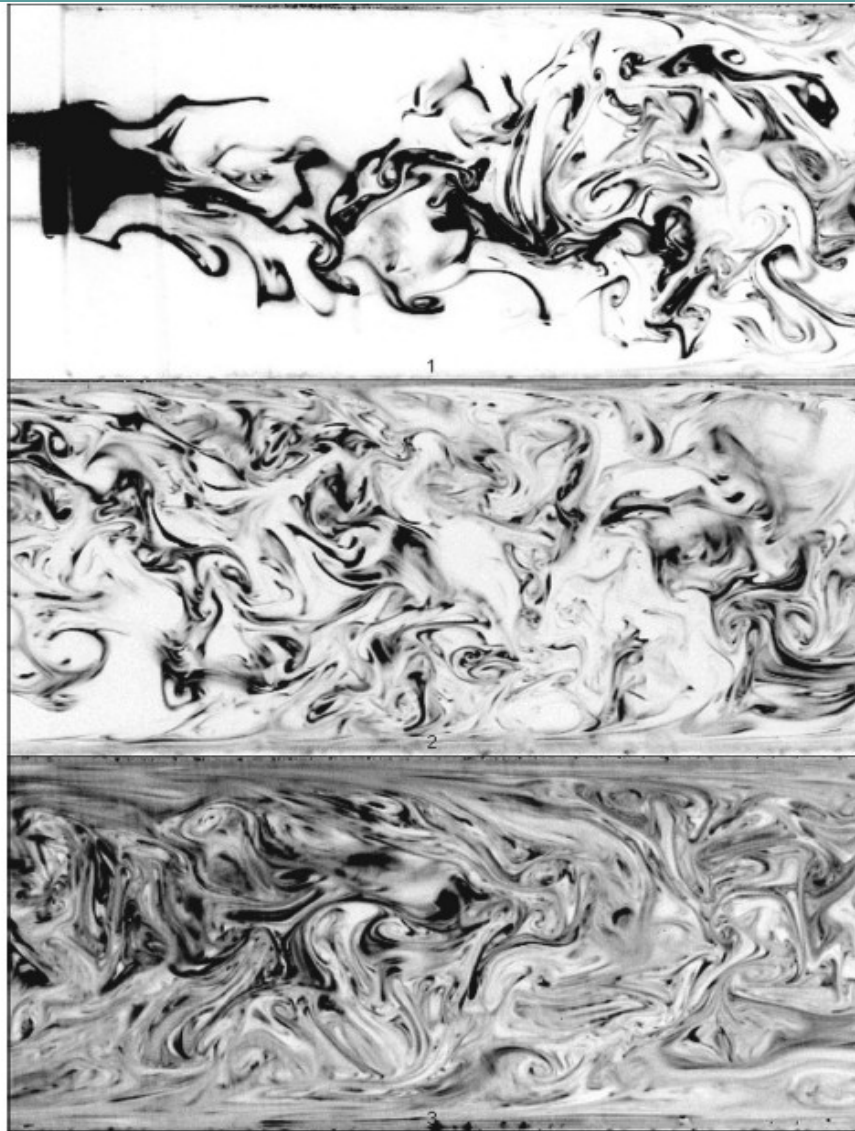


FIG. 1. Mixing of a dye discharging from a jet of diameter $d=8$ mm in a square ($L \times L$ with $L=3$ cm) duct. From 1 to 3, successive instantaneous planar cuts of the scalar field at increasing downstream locations in the duct showing the progressive uniformization of the dye concentration.

5 – Movimento Browniano induzido por Caos

Processos determinísticos que levam ao M.B.:

- acoplamento a reservatórios representados sistemas simples com muitos graus de liberdade (Caldeira-Leggett).
 - acoplamento a sistemas caóticos com poucos (dois?) graus de liberdade.
 - tratamento quântico; caos e coerência; caos e tunelamento.
- 