

# Tópicos de Mecânica Clássica

Marcus A. M. de Aguiar

19 de maio de 2025



# Conteúdo

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Prefácio</b>   | <b>ix</b> |
| <b>Agradecimentos</b>   | <b>xi</b> |
| <b>1 Mecânica Newtoniana</b>                                    | <b>1</b>  |
| 1.1 O princípio determinístico de Newton . . . . .              | 5         |
| 1.2 O grupo de Galileo . . . . .                                | 6         |
| 1.3 Exemplos elementares . . . . .                              | 8         |
| 1.4 Movimento de uma partícula . . . . .                        | 12        |
| 1.5 Movimento em uma dimensão . . . . .                         | 16        |
| 1.5.1 Osciladores anarmônicos . . . . .                         | 17        |
| 1.6 Sistemas de partículas . . . . .                            | 20        |
| 1.7 O problema de Kepler . . . . .                              | 25        |
| 1.7.1 Equações de movimento e quantidades conservadas . .       | 25        |
| 1.7.2 Solução da equação radial . . . . .                       | 29        |
| 1.7.3 A equação da elipse . . . . .                             | 32        |
| 1.7.4 As três leis de Kepler . . . . .                          | 34        |
| 1.8 Exercícios . . . . .  | 36        |
| <b>2 As Equações de Euler-Lagrange</b>                          | <b>39</b> |
| 2.1 Vínculos e graus de liberdade . . . . .                     | 39        |
| 2.2 O princípio de D'Alembert: caso estático . . . . .          | 41        |
| 2.3 O princípio de D'Alembert e as equações de Lagrange . . . . | 44        |
| 2.4 Lagrangiana para a força de Lorentz . . . . .               | 53        |
| 2.5 Exercícios . . . . .  | 56        |
| <b>3 Princípios Variacionais</b>                                | <b>63</b> |
| 3.1 O princípio de Fermat . . . . .                             | 63        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.2      | O método variacional de Euler-Lagrange . . . . .                 | 66         |
| 3.2.1    | A catenóide . . . . .  | 70         |
| 3.2.2    | A braquistócrona . . . . .                                       | 72         |
| 3.3      | O princípio de Hamilton . . . . .                                | 76         |
| 3.4      | Multiplicadores de Lagrange . . . . .                            | 77         |
| 3.5      | Coordenadas cíclicas e leis de conservação . . . . .             | 84         |
| 3.5.1    | Conservação dos momentos linear e angular . . . . .              | 85         |
| 3.5.2    | Conservação da energia . . . . .                                 | 87         |
| 3.6      | Sobre a unicidade da lagrangiana . . . . .                       | 89         |
| 3.7      | Propriedades da Ação . . . . .                                   | 90         |
| 3.8      | O princípio de Maupertuis . . . . .                              | 93         |
| 3.9      | O teorema de Morse . . . . .                                     | 95         |
| 3.9.1    | Variação segunda da ação para sistemas simples . . . . .         | 98         |
| 3.9.2    | Demonstração do teorema de Morse . . . . .                       | 101        |
| 3.10     | Causalidade e as integrais de caminho de Feynman . . . . .       | 104        |
| 3.11     | Exercícios . . . . .   | 107        |
| <b>4</b> | <b>As Equações de Hamilton</b>                                   | <b>111</b> |
| 4.1      | A transformada de Legendre . . . . .                             | 111        |
| 4.2      | As equações de Hamilton . . . . .                                | 113        |
| 4.3      | Hamiltoniana versus Energia . . . . .                            | 117        |
| 4.4      | O Princípio de Hamilton Modificado . . . . .                     | 120        |
| 4.5      | Notação simplética . . . . .                                     | 122        |
| 4.6      | Espaço de Fases e Superfície de Energia . . . . .                | 123        |
| 4.7      | Exercícios . . . . .   | 131        |
| <b>5</b> | <b>Transformações Canônicas</b>                                  | <b>135</b> |
| 5.1      | Funções Geratrizes . . . . .                                     | 136        |
| 5.2      | Exemplos de Transformações Canônicas . . . . .                   | 142        |
| 5.3      | Formulação Simplética . . . . .                                  | 145        |
| 5.4      | O Grupo Simplético . . . . .                                     | 149        |
| 5.5      | Transformações Infinitesimais e a Identidade de Jacobi . . . . . | 149        |
| 5.6      | Equações de Movimento e Leis de Conservação . . . . .            | 151        |
| 5.7      | Seções de Poincaré . . . . .                                     | 154        |
| 5.8      | Invariantes Canônicos . . . . .                                  | 156        |
| 5.8.1    | Os Colchetes de Poisson . . . . .                                | 156        |
| 5.8.2    | O invariante de Poincaré-Cartan . . . . .                        | 157        |
| 5.9      | O teorema de Liouville . . . . .                                 | 163        |



|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 5.10     | O teorema de Liouville para sistemas gerais . . . . .    | 169        |
| 5.11     | O teorema de recorrência de Poincaré . . . . .           | 170        |
| 5.12     | Exercícios . . . . .                                     | 174        |
| <b>6</b> | <b>Integrabilidade</b>                                   | <b>177</b> |
| 6.1      | Equação de Hamilton-Jacobi . . . . .                     | 178        |
| 6.2      | Solução formal de Hamilton-Jacobi . . . . .              | 182        |
| 6.3      | Hamilton-Jacobi independente do tempo . . . . .          | 183        |
| 6.4      | Interpretação geométrica . . . . .                       | 185        |
| 6.5      | Limite Semiclássico . . . . .                            | 187        |
| 6.6      | Teorema de Arnold-Liouville . . . . .                    | 191        |
| 6.7      | Variáveis de Ação e Ângulo . . . . .                     | 200        |
| 6.7.1    | Um grau de liberdade . . . . .                           | 201        |
| 6.7.2    | Vários graus de liberdade . . . . .                      | 202        |
| 6.7.3    | Exemplos . . . . .                                       | 203        |
| 6.8      | Super-integrabilidade . . . . .                          | 207        |
| 6.8.1    | O vetor de Laplace-Runge-Lenz . . . . .                  | 208        |
| 6.8.2    | O oscilador harmônico bidimensional ressonante . . . . . | 210        |
| 6.9      | O teorema de Bertrand . . . . .                          | 211        |
| 6.10     | Exercícios . . . . .                                     | 214        |
| <b>7</b> | <b>Estabilidade</b>                                      | <b>217</b> |
| 7.1      | Pontos de Equilíbrio em 1 grau de liberdade . . . . .    | 217        |
| 7.1.1    | Exemplo . . . . .  | 221        |
| 7.2      | Pontos de Equilíbrio em n graus de liberdade . . . . .   | 223        |
| 7.3      | Pontos fixos nas Seções de Poincaré . . . . .            | 225        |
| 7.4      | O rotor chutado e o mapa padrão . . . . .                | 228        |
| 7.5      | Variedades Estáveis e Instáveis . . . . .                | 231        |
| 7.6      | Exercícios . . . . .                                     | 233        |
| <b>8</b> | <b>Teoria de Perturbação</b>                             | <b>237</b> |
| 8.1      | Um grau de liberdade . . . . .                           | 237        |
| 8.1.1    | Exemplo: o pêndulo simples . . . . .                     | 240        |
| 8.2      | Dois ou mais graus de liberdade . . . . .                | 243        |
| 8.2.1    | Preâmbulo . . . . .                                      | 243        |
| 8.2.2    | O Caso não-ressonante . . . . .                          | 246        |
| 8.2.3    | O Caso ressonante . . . . .                              | 249        |
| 8.2.4    | Estruturas fractais . . . . .                            | 253        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 8.3       | Exercícios . . . . .  | 256        |
| <b>9</b>  | <b>O Teorema KAM</b>  | <b>259</b> |
| 9.1       | O método superconvergente de Newton . . . . .               | 259        |
| 9.2       | Perturbações singulares . . . . .                           | 262        |
| 9.3       | Frações continuadas . . . . .                               | 264        |
| 9.4       | O teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser . . . . .              | 269        |
| 9.5       | Aplicações em astronomia . . . . .                          | 272        |
| 9.5.1     | O problema de três corpos em um plano . . . . .             | 272        |
| 9.5.2     | Falhas no cinturão de asteróides . . . . .                  | 275        |
| 9.5.3     | Falhas nos anéis de Saturno . . . . .                       | 276        |
| 9.6       | Exercícios . . . . .  | 278        |
| <b>10</b> | <b>Caos Hamiltoniano</b>                                    | <b>283</b> |
| 10.1      | O mapa de torção . . . . .                                  | 283        |
| 10.2      | O teorema de Poincaré-Birkhoff . . . . .                    | 286        |
| 10.3      | O emaranhado homoclínico . . . . .                          | 289        |
| 10.4      | Caos: o mapa de Ferradura de Smale . . . . .                | 292        |
| 10.5      | Exercícios . . . . .  | 298        |
| <b>11</b> | <b>Simetrias e Meios Contínuos</b>                          | <b>301</b> |
| 11.1      | Simetrias e Leis de Conservação . . . . .                   | 301        |
| 11.2      | Meios contínuos e campos . . . . .                          | 308        |
| 11.3      | Generalização para campos em 1-D . . . . .                  | 309        |
| 11.4      | Múltiplos campos em 3-D . . . . .                           | 311        |
| 11.5      | Correntes conservadas . . . . .                             | 311        |
| 11.6      | O teorema de Noether . . . . .                              | 313        |
| 11.7      | Exercícios . . . . .  | 316        |
| <b>A</b>  | <b>Mudança de variáveis em integrais multidimensionais</b>  | <b>319</b> |
| <b>B</b>  | <b>Comutador dos Campos Vetoriais</b>                       | <b>323</b> |
| <b>C</b>  | <b>Comutação dos Fluxos em <math>M_f</math></b>             | <b>325</b> |
| <b>D</b>  | <b>Variáveis de ação e ângulo para o problema de Kepler</b> | <b>329</b> |
| <b>E</b>  | <b>Integrais de caminho de Feynman</b>                      | <b>333</b> |

|                     |            |
|---------------------|------------|
| <b>Bibliografia</b> | <b>336</b> |
|---------------------|------------|



# Prefácio

Novos livros de física básica continuam a ser escritos e publicados todos os anos. Isso parece um tanto paradoxal, pois não pode haver mais nada de novo para se dizer sobre esses temas. De fato, a Mecânica, a Termodinâmica e o Eletromagnetismo são teorias bem estabelecidas há muitos anos, e tanto já se escreveu sobre elas, que não é claro porque tantos autores insistem em re-apresentar esses conteúdos de sua própria maneira.

No entanto, para quem faz pesquisa, ou se interessa pelos avanços da ciência, é bastante claro que ‘não existe assunto encerrado’. Novas descobertas sempre nos fazem repensar conceitos que pareciam intocáveis para re-interpretá-los e re-adaptá-los às novas situações. A Mecânica Clássica é um ótimo exemplo desse processo constante de re-descoberta. No início dos anos 1800 Laplace afirmou que se alguém pudesse conhecer todas as forças agindo sobre todas as partículas existentes, assim como suas condições iniciais, poderia calcular todo o futuro e o passado do universo. Esse pensamento determinista, no entanto, cairia por terra com os trabalhos de Poincaré, que demonstrou a instabilidade intrínseca do movimento no problema gravitacional de três corpos, fundando as bases do que seria conhecido mais tarde como Teoria do Caos.

Simultaneamente aos trabalhos de Poincaré, apareciam os primeiros indícios da inadequação da mecânica e do eletromagnetismo clássicos para explicar certos fenômenos microscópicos, como o efeito fotoelétrico e a quantização dos níveis de energia atômicos. Surgiria em breve a teoria quântica e, junto com ela, a difícil tarefa de compatibilizá-la com a mecânica clássica. Clássico versus quântico emaranhou-se com caos versus regularidade, e o estudo dessas questões estende-se até os dias de hoje. É com esse espírito que esse livro foi escrito, tendo como base textos clássicos como Goldstein e tantos outros, mas sempre procurando contato com elementos novos, particularmente com caos Hamiltoniano e limite semiclássico.

Esse livro foi preparado a partir de notas de aula para a disciplina Mecânica Avançada, que lecionei várias vezes na pós-graduação do Instituto de Física da Unicamp. Os primeiros cinco capítulos contém uma breve revisão da mecânica Newtoniana, apresentando em seguida as equações de Lagrange, os princípios variacionais e o formalismo de Hamilton, enfatizando o teorema de Liouville, o teorema de recorrência de Poincaré e o tratamento dinâmico de ensembles. Em seguida apresento a teoria de transformações canônicas, incluindo a equação de Hamilton-Jacobi e sua relação com o limite semiclássico da equação de Schrödinger. Os capítulos seis a nove discutem o teorema de integrabilidade de Arnold e Liouville, as variáveis de ação e ângulo e a teoria de perturbações canônicas, onde apresento os teoremas KAM, Poincaré-Birkhoff e os emaranhados homoclínicos, discutindo o aparecimento de caos Hamiltoniano. Finalmente apresento brevemente o limite do contínuo, a equação da corda vibrante e o teorema de Nöther. Espero que o livro possa ser útil como complemento nos cursos de pós-graduação em mecânica clássica e também aos estudantes interessados em aprender sobre caos Hamiltoniano e sua conexão com o limite semiclássico da teoria quântica.

Esta versão contém pequenas correções em relação ao livro publicado pela Livraria da Física. Foram também acrescentadas as seções 6.8.2, 7.4 e 11.7, novas figuras e alguns novos exercícios. Agradeço a todos que apontaram erros nas equações e no texto, particularmente os profs. Ricardo Mosna e Alberto Saa do IMECC, Unicamp e Mauro Copelli, da UFPE.

Marcus A.M. de Aguiar  
Campinas, 15 de janeiro de 2019.

# Agradecimentos

É um grande prazer agradecer a todos os alunos que estudaram pelas diversas versões anteriores das notas de aula que originaram esse livro e que, pacientemente, me apontaram erros de todos os tipos: de gramática e grafia, nas equações, trechos com explicações obscuras ou confusas, etc. Gostaria de agradecer particularmente aos alunos Douglas Delgado de Souza, Eric Perim Martins, Murilo Neves Martins, Ceno P. Magnaghi e Thiago Visconti. Um agradecimento especial ao aluno Wendell Pereira Barreto que fez uma revisão geral em todo o texto, ajudou nas figuras e na compilação das referências.





# Capítulo 1

## Mecânica Newtoniana

A mecânica é um ramo da Física que tem grande apelo prático. O movimento de corpos sob a ação da gravidade, de forças elásticas e de atrito são exemplos intuitivos de sistemas dinâmicos presentes no nosso dia-a-dia. Embora seja difícil precisar quando a mecânica começou a ser descrita em termos de princípios fundamentais, um marco importante é a descrição de Aristóteles (384-322 AC) do movimento dos corpos. Para ele, todos os movimentos seriam retilíneos, circulares, ou uma combinação dos dois, pois esses eram os únicos *movimentos perfeitos*. O *estado natural* de alguns corpos seria o de movimento perfeito, como os corpos celestes. Para outros, como uma pedra, o estado natural seria o de repouso, sendo seu movimento possível apenas sob a ação constante de forças: no momento que a força deixasse de ser aplicada, o corpo retornaria à sua posição natural de repouso.

As idéias de Aristóteles são questionadas por Galileo (1564-1642) que introduz o que hoje conhecemos como *método científico*, que diz, basicamente, que conclusões sobre o comportamento natural devem ser comprovadas por experimentos cuidadosos e controlados que possam ser reproduzidos sob as mesmas condições. Galileo formula as leis básicas do movimento de corpos sob a ação da gravidade, usa um telescópio para estudar o movimento dos planetas e formula o Princípio da Relatividade de Galileo. O princípio diz que não é possível distinguir o estado de repouso daquele em movimento retilíneo uniforme. Como exemplo, Galileo observa que uma pessoa no porão de um navio que navega em mar calmo com velocidade constante não tem como saber se está realmente em movimento ou em repouso. Se a pessoa não olhar pela escotilha, não haverá nenhum experimento capaz de decidir a questão.

A conexão entre repouso e movimento retilíneo uniforme, observada por Galileo, atinge diretamente a teoria Aristotélica, pois o primeiro é o estado natural das coisas, enquanto o segundo deveria requerer a aplicação constante de forças. A saída para essa contradição aparece alguns anos mais tarde com Isaac Newton (1643-1727), que generaliza os achados de Galileo e também organiza e unifica os conceitos mais importantes da mecânica. Veja a referência [1] para uma biografia recente de Newton.

Newton define conceitos como massa, quantidade de movimento, inércia, força e aceleração, discutindo também os conceitos de espaço e tempo, considerados em última análise absolutos. As três leis de Newton formam a base da mecânica clássica. Embora tenham sido reformuladas por Lagrange, Hamilton e outros, essas leis são consideradas como fundamentais dentro do contexto não-relativístico e não-quântico até hoje. A primeira lei define sistemas de referência especiais, chamados de inerciais, onde o movimento de corpos pode ser descrito em termos da segunda lei. A terceira lei, finalmente, acrescenta o importante ingrediente da ação e reação, que garante a conservação dos momentos linear e angular total de sistemas isolados.

Discutiremos agora esses conceitos fundamentais e as três leis de Newton, dando sua versão ‘original’<sup>1</sup> e uma tradução livre para o Português. Conceitos e leis são apresentados abaixo de forma misturada, que foi a que me pareceu mais didática:

**Espaço** - Na mecânica clássica o espaço é tratado como absoluto, homogêneo e isotrópico. A medida de distância entre dois corpos ou dois pontos do espaço é feita com uma régua, escolhida como padrão. Os três adjetivos acima significam que medidas de distância não dependem do estado do observador que as realiza (o que não é mais verdade na teoria relativística) e, além disso, não dependem da posição absoluta desses dois pontos no espaço e nem de sua orientação (os dois pontos podem estar na Terra ou na Lua, orientados na direção Terra-Lua ou perpendicularmente). Essas duas últimas hipóteses, também válidas na teoria relativística, nos permitem extrapolar resultados de experimentos realizados na Terra para outros lugares do Universo.

**Tempo** - O tempo também é tratado como absoluto e uniforme, e sua medida é feita com um relógio padrão. O próprio Newton desenvolveu vários

---

<sup>1</sup>Como aparece em inglês na tradução do latim por Andrew Motte em *The Principia* [2]

relógios, particularmente relógios de água. O tempo absoluto significa que o intervalo entre dois eventos é independente do estado do observador que o mede, sendo intrínseco aos eventos.

**Sistemas de referência, velocidade, aceleração e trajetória** - O conceito de sistema de referência (SR) é fundamental, embora muitas vezes não lhe damos grande importância e o consideramos implícito. Um SR Newtoniano deve ser pensado como um laboratório e consiste em um sistema de eixos e um relógio. A imagem mental de um SR é de três réguas gigantes colocadas a 90 graus umas das outras formando os três eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$  e de um único relógio visível de todos os lugares para medir a passagem do tempo. Com isso, podemos anotar a cada instante  $t$ , como visto no relógio, a posição  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  de uma partícula. A taxa com que sua posição muda com o tempo, e a direção em que a mudança ocorre, dará sua velocidade  $\mathbf{v} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt) = (v_x, v_y, v_z)$  e a taxa com que a velocidade muda com tempo dará sua aceleração  $\mathbf{a} = (dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt) = (a_x, a_y, a_z)$ . A trajetória da partícula é a função  $\mathbf{r}(t)$ . Não se deve confundir o conceito de SR com o de sistemas de coordenadas. Diversos sistemas de coordenadas, como cartesianas, esféricas ou parabólicas, podem ser escolhidos dentro de um mesmo SR. Exemplos de SR são um laboratório fixo ao chão, ou fixo em relação à uma estação espacial orbitando a Terra, ou ainda fixo em relação a um carrossel que gira com velocidade angular constante.

**Força** - Força é uma ação impressa a um objeto que visa mudar seu estado de movimento. O conceito pode ser pensado como intuitivo e um dos problemas da Física é descobrir quais as forças que atuam em determinado corpo e como elas se comportam em função dos diversos parâmetros do problema. A força eletrostática entre dois objetos carregados, por exemplo, depende diretamente da quantidade de carga em cada um deles e do inverso do quadrado da distância que os separa. No caso de uma mola ideal, a força aumenta linearmente com a distensão provocada. Assim, forças genéricas podem ser medidas por comparação com uma mola padrão através da medida da distância que esta deve ser distendida para compensar a força a ser medida.

**A Primeira Lei de Newton** - Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon. Em português: Todos os corpos permanecem

em seu estado de repouso, ou em movimento retilíneo uniforme, a não ser que sejam compelidos a mudar seu estado por forças neles aplicadas. Embora a primeira lei pareça um caso particular da segunda lei com força nula, e portanto totalmente dispensável, ela é de fato uma lei por si mesma. Seu propósito é definir uma classe especial de sistemas de referência, chamados inerciais, onde a segunda lei pode ser aplicada.

**Sistema Inercial de Referência - SIR** - São SR especiais onde vale a primeira lei de Newton. Nesses sistemas, um corpo permanece em seu estado de repouso ou em movimento retilíneo uniforme se não houverem forças agindo sobre ele. Um SR fixo em relação a um carrossel que gira não é inercial, pois um corpo deixado em repouso sobre ele passará a se movimentar em relação ao observador no carrossel assim que largado. Pode-se mostrar que, dado um SIR, então qualquer outro SR que se mova em relação à ele com velocidade constante também é inercial.

**Massa** - The quantity of matter is a measure of the same, arising from its density and bulk conjunctly. Em português: a quantidade de matéria (massa) é uma medida da mesma, resultante da densidade e do volume do corpo conjuntamente.

**Quantidade de Movimento** The quantity of motion is a measure of the same, arising from the velocity and quantity of matter conjunctly. Em português: a quantidade de movimento é uma medida do mesmo (movimento) e resulta da velocidade e da massa conjuntamente. Usando  $m$  para a massa e  $\mathbf{p}$  para a quantidade de movimento, também conhecido como momento, temos  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .

**A Segunda Lei de Newton** - The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed. Em português: A alteração do movimento é sempre proporcional à força motriz impressa; essa alteração ocorre na direção em que a força é impressa. Como a ausência de forças implica em repouso ou movimento retilíneo uniforme, a alteração do movimento implica em aceleração da partícula. Como o movimento é medido em termos da quantidade  $\mathbf{p}$  a equação para a segunda lei é  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ . Embora Newton não diga explicitamente, essa lei só vale em SIRs, pois estamos supondo que a primeira lei é válida também. No caso de sistemas não inerci-

ais a equação deve ser modificada com a adição das chamadas forças fictícias.

**A Terceira Lei de Newton** - To every action there is always opposed an equal reaction: or the mutual action of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts. Em português: A toda ação corresponde sempre uma reação oposta igual, ou ainda, a ação mútua de dois corpos, um sobre o outro, é sempre igual e com direções contrárias.

## 1.1 O princípio determinístico de Newton

As leis de Newton são baseadas em fatos experimentais e não podem ser demonstradas. O fato de que forças determinam acelerações, i.e., derivadas segundas da posição em relação ao tempo e não derivadas terceiras ou de ordem maior, leva ao chamado *princípio determinístico de Newton* [3]. Esse princípio afirma que o estado de um sistema mecânico é dado pelas posições e velocidades de todos os seus pontos materiais em um dado instante de tempo e que as forças agindo sobre ele determinam unicamente seu movimento. No caso de uma única partícula em um sistema de referência inercial, e supondo que sua massa seja constante<sup>2</sup>, a segunda lei diz que

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t). \quad (1.1)$$

Note que o valor de  $\mathbf{F}$  sobre a partícula depende apenas de seu estado e não deve envolver a aceleração ou derivadas superiores da posição em relação ao tempo. Assim, dados  $\mathbf{r}(t_0)$  e  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  calculamos  $\ddot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0), t_0)/m$ . Com a aceleração, podemos calcular a velocidade no instante posterior  $t_0 + \delta t$ :  $\dot{\mathbf{r}}(t_0 + \delta t) = \dot{\mathbf{r}}(t_0) + \ddot{\mathbf{r}}(t_0)\delta t$  e, com a velocidade, calculamos a posição:  $\mathbf{r}(t_0 + \delta t) = \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)\delta t$ . Dessa forma, conseguimos calcular o estado da partícula em  $t_0 + \delta t$ . Podemos, agora, recalcular a aceleração neste instante e prosseguir integrando as equações de movimento gerando a trajetória da partícula.

O fato de podermos prever o comportamento futuro de um sistema a partir do seu estado inicial e das forças agindo sobre ele é chamado de determinismo. O físico francês Pierre Simon de Laplace (1749-1827), maravilhado com as possibilidades de cálculo da mecânica Newtoniana, afirmou que um

---

<sup>2</sup>Para problemas de massa variável, como os problemas do foguete e da esteira rolante, veja o livro *Mecânica* de K. R. Symon [4]

demônio que pudesse conhecer as posições e velocidades de todas as partículas do universo e as forças entre elas seria capaz de prever inequivocamente seu futuro. Essa afirmativa, no entanto, mostrou-se errada mesmo dentro da teoria clássica devido a existência de movimento caótico, como veremos adiante.

Notamos ainda que, aplicando a mesma força  $\mathbf{F}$  em dois objetos diferentes, as acelerações (na direção da força) serão proporcionais:

$$\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (1.2)$$

Tomando um dos objetos como padrão para massa,  $m_1 = 1$  por exemplo, podemos medir a massa dos outros objetos.

## 1.2 O grupo de Galileo

Como mencionamos anteriormente, sistemas inerciais tem a seguinte propriedade importante: se  $K$  é inercial e  $K'$  move-se em relação à  $K$  com velocidade constante, então  $K$  também é inercial. A prova é bastante simples:

Suponha, por simplicidade, que os referenciais  $K$  e  $K'$  tenham eixos  $x, y, z$  e  $x', y', z'$  paralelos e que em  $t = 0$  suas origens coincidam, como ilustrado na figura 1.1. Seja  $\mathbf{V}$  a velocidade constante da origem de  $K'$  em relação à origem de  $K$ . Uma partícula  $m$  terá coordenadas  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  quando observada de  $K$  e  $K'$  respectivamente e, por construção

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{V}t. \quad (1.3)$$

A velocidade e aceleração da partícula nesses referenciais serão

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{V} \quad \mathbf{a}'(t) = \mathbf{a}(t).$$

Dessa forma, se não houverem forças sobre  $m$ ,  $\mathbf{a} = 0$  pois  $K$  é inercial por hipótese. Como  $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}' = 0$  também e  $K'$  também é inercial.

A transformação (1.3) é de um tipo bem particular, pois os eixos são paralelos e coincidem em  $t = 0$ . O conjunto geral de transformações que leva um referencial inercial em outro é conhecido como *Grupo de Transformações de Galileo* [3] e pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \mathcal{R}\mathbf{r}(t) - \mathbf{V}t - \mathbf{u} \\ t' &= t - s \end{aligned} \quad (1.4)$$

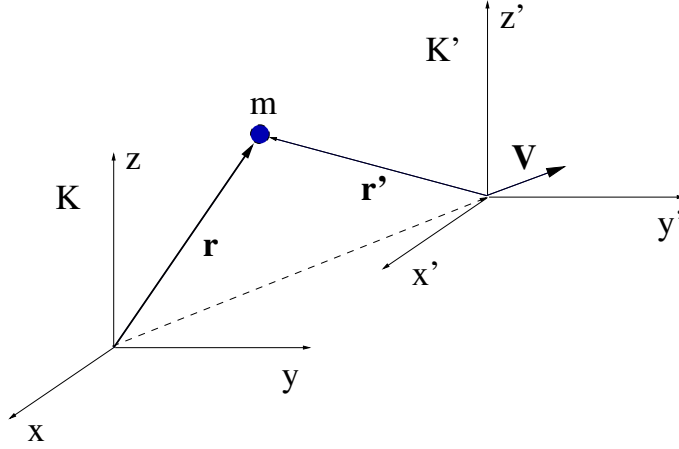


Figura 1.1: Os referenciais  $K$  e  $K'$  são inerciais.

onde  $\mathcal{R}$  é uma matriz ortogonal de determinante 1 (matriz de rotação),  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{u}$  vetores e  $s$  um parâmetro escalar. As transformações de Galileio formam um grupo com 10 parâmetros independentes e podem ser decompostas em três transformações elementares:

- Translação das origens do espaço e do tempo (4 parâmetros)

$$g_1(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{r}', t') = (\mathbf{r} - \mathbf{u}, t - s)$$

- Rotação dos eixos (3 parâmetros)

$$g_2(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{r}', t') = (\mathcal{R}\mathbf{r}, t)$$

- Movimento uniforme com velocidade constante (3 parâmetros)

$$g_3(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{r}', t') = (\mathbf{r} - \mathbf{V}t, t)$$

O requerimento de que as equações de movimento sejam invariantes por transformações de Galileio impõe uma série de restrições aos tipos de forças  $\mathbf{F}$  que esperamos encontrar na natureza. Vamos ver a invariância por translações temporais, por exemplo. Ela implica que se  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  então  $m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t')$  onde  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  e  $t' = t - s$ . Então, a equação de movimento em  $K'$  pode ser reescrita como  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t - s) \neq \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ , a não ser que  $\mathbf{F}$  não dependa explicitamente do tempo. A invariância por translações temporais

implica que um experimento realizado hoje deverá produzir os mesmos resultados se realizado amanhã sob as mesmas condições (veja o exemplo 5 da próxima seção onde a invariância é quebrada pela força  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ).

A invariância por rotação dos eixos implica que se  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  então  $m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}')$  onde  $\mathbf{r}' = \mathcal{R}\mathbf{r}$ . Então

$$m[\mathcal{R}\ddot{\mathbf{r}}] = \mathbf{F}(\mathcal{R}\mathbf{r}, \mathcal{R}\dot{\mathbf{r}}) = \mathcal{R}[m\ddot{\mathbf{r}}] = \mathcal{R}\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

A força deve então satisfazer a condição  $\mathbf{F}(\mathcal{R}\mathbf{r}, \mathcal{R}\dot{\mathbf{r}}) = \mathcal{R}\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ . Mostre que forças centrais satisfazem essa condição.

A invariância por translações espaciais e movimento uniforme implica que, para um sistema de partículas, as forças de interação só podem depender das coordenadas e velocidades relativas entre elas:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}(\{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\}, \{\dot{\mathbf{r}}_j - \dot{\mathbf{r}}_k\}).$$

### 1.3 Exemplos elementares

Apresentamos nesta seção alguns exemplos simples de solução da segunda lei de Newton em referenciais inerciais e comentamos sobre as propriedades de invariância das equações por translações espaciais e temporais.

**Exemplo 1.3.1 - Queda livre de pequenas alturas** - Supondo que a Terra é um referencial inercial, o que pode ser considerado uma boa aproximação em alguns casos, e escolhendo o eixo  $x$  na vertical, apontando para cima, a força gravitacional sobre uma partícula de massa  $m$  será  $\mathbf{F} = -mg\hat{x}$ , onde  $g \approx 9.8 \text{ ms}^{-2}$ . Podemos então tratar o problema como se fosse unidimensional, pois sabemos que nas direções  $y$  e  $z$  o movimento será de repouso ou retilíneo uniforme. A equação de movimento se reduz à  $\ddot{x} = -g$  e solução é

$$x(t) = x_0 + v_0t - gt^2/2.$$

**Exemplo 1.3.2 - Queda vertical de grandes alturas** - Nesse caso temos que levar em conta que a Terra é finita, de raio  $R$  e massa  $M$ . Medindo  $x$  a partir da superfície, a distância do objeto ao centro da Terra será  $r = R + x$  e a equação de movimento fica

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}$$



onde  $G = 6.673 \times 10^{-11} m^3 Kg^{-1} s^{-2}$  é a constante de gravitação universal. Substituindo  $r$  por  $R + x$ , lembrando que  $g = GM/R^2$  e supondo  $x \ll R$  podemos escrever

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{R^2} \frac{1}{(r/R)^2} = -g \frac{1}{(1 + x/R)^2} \approx -g + \frac{2gx}{R}.$$

A solução é deixada como exercício e o resultado é

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{R}{2}\right) \cosh(\nu t) + \frac{v_0}{\nu} \sinh(\nu t) + \frac{R}{2}.$$

onde  $\nu = \sqrt{2g/R}$ . Mostre que para  $\nu \rightarrow 0$  a solução do exemplo anterior é recuperada.

**Exemplo 1.3.3 - O oscilador harmônico I** - É difícil superestimar o papel do oscilador harmônico na Física. Voltaremos a falar dele em diversos momentos. Por enquanto basta pensar no movimento unidimensional de um corpo de massa  $m$  preso a uma mola ideal de constante elástica  $k$ . Se medirmos a posição da massa a partir de sua posição de equilíbrio, a sua equação de movimento será  $m\ddot{x} = -kx$ , ou ainda

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

A solução, sujeita às condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v_0$ , é

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

**Exemplo 1.3.4 - O oscilador harmônico II** - O exemplo anterior ilustra uma situação bastante comum de *não-invariância* por translações espaciais. De fato, se fizermos  $x' = x - a$  obtemos

$$m\ddot{x}' = m\ddot{x} = -kx = -k(x' + a) \neq -kx'.$$

Isso ocorre porque o sistema  $m\ddot{x} = -kx$  é de fato uma descrição reduzida de um problema de dois corpos, afinal de contas a outra extremidade da mola tem que estar presa em algum lugar! Considere, então, a situação mais realista descrita pela figura (1.2). As equações de movimento dos corpos com massas  $m_1$  e  $m_2$  são

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - l) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - l) \end{aligned}$$

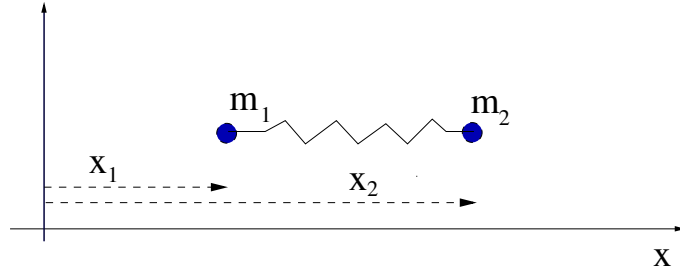


Figura 1.2: Duas massas presas por uma mola observadas de um referencial inercial.

onde  $l$  representa o comprimento natural da mola. Definindo coordenadas relativas e de centro de massa por

$$r = x_2 - x_1 - l, \quad R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

e as massas total e reduzida

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

podemos mostrar facilmente que as equações de movimento se reduzem a

$$\mu \ddot{r} = -kr \quad M \ddot{R} = 0.$$

Tanto as equações para  $x_1$  e  $x_2$  quanto para  $r$  e  $R$  são invariantes por translações. Fazendo  $x_1 \rightarrow x_1 + a$  e  $x_2 \rightarrow x_2 + a$  vemos que  $r \rightarrow r$  e  $R \rightarrow R + a$  e as equações permanecem idênticas. Fica como exercício resolver as equações acima, obtendo  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  em termos de suas condições iniciais, e estudar o limite em que  $m_1 \gg m_2$ .

**Exemplo 1.3.5 - Forças dependentes do tempo** - Como último exemplo, consideremos o movimento unidimensional de uma partícula sob a ação de uma força dependente do tempo. Para simplificar o cálculo vamos supor que  $m = 1$  e que escolhemos unidades tais que  $F(t) = t$ , com  $t$  medido em horas. A equação de movimento é  $\ddot{x} = t$ . Se fizermos um experimento hoje supondo que  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  obteremos a trajetória  $x_1(t) = t^3/6$ . Se repetirmos o experimento amanhã sob as mesmas condições teremos que fazer  $x(T) = \dot{x}(T) = 0$  onde  $T = 24$  horas. A solução será  $x_2(t) =$

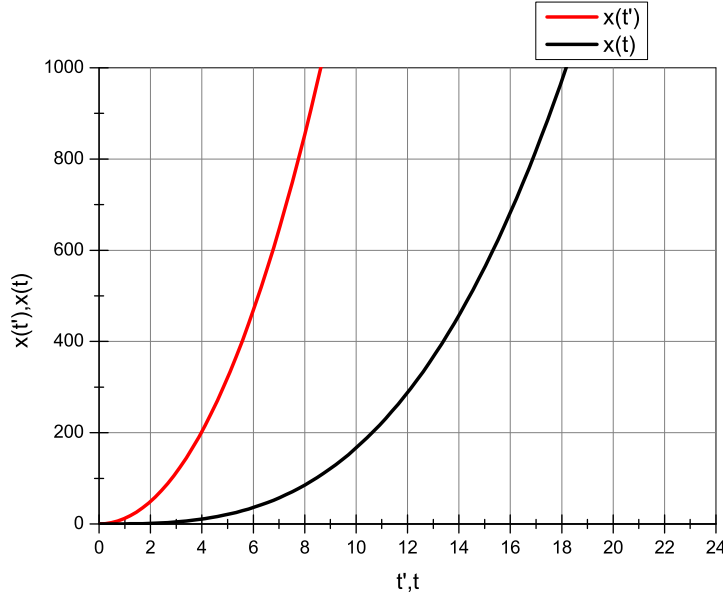


Figura 1.3: Trajetórias para  $x_1(t) = t^3/6$  (linha preta) e  $x_2(t') = t'^3/6 + t'^2T/2$  (linha vermelha), as trajetórias não são as mesmas como esperado.

$t^3/6 - tT^2/2 + T^3/3$ . Vamos agora comparar as trajetórias. Para tentar sobrepor-las em um mesmo gráfico (figura 1.3) temos que fazer  $t' = t - T$  em  $x_2$ , o que resulta  $x_2(t') = t'^3/6 + t'^2T/2$  (veja que  $x(t' = 0) = \dot{x}(t' = 0) = 0$ ). As trajetórias não são as mesmas, como esperado, pois essa força viola a invariância por translações temporais. Problemas onde aparecem forças dependentes do tempo são bastante comuns e não estão *errados*. Como no exemplo 3 acima, eles descrevem apenas uma parte do sistema, não o todo, o que pode ser conveniente em alguns casos. Incluindo na descrição a parte responsável pelo aparecimento dessas *forças externas*, o sistema global deve voltar a apresentar as propriedades de invariância desejadas.

**Exemplo 1.3.5 - Física de Aristóteles** - Uma partícula se move em uma dimensão sob a ação de uma força de atrito proporcional à velocidade e de uma força  $F_0$  constante. Após o intervalo de tempo  $T$  a força é removida.. A equação de movimento é  $m\dot{v} = -bv + F_0$  para  $0 < t < T$ . De acordo com Aristóteles, a partícula deveria se mover com velocidade constante enquanto a força age, voltando ao repouso após ela ser removida. Supondo que  $v(0) = 0$

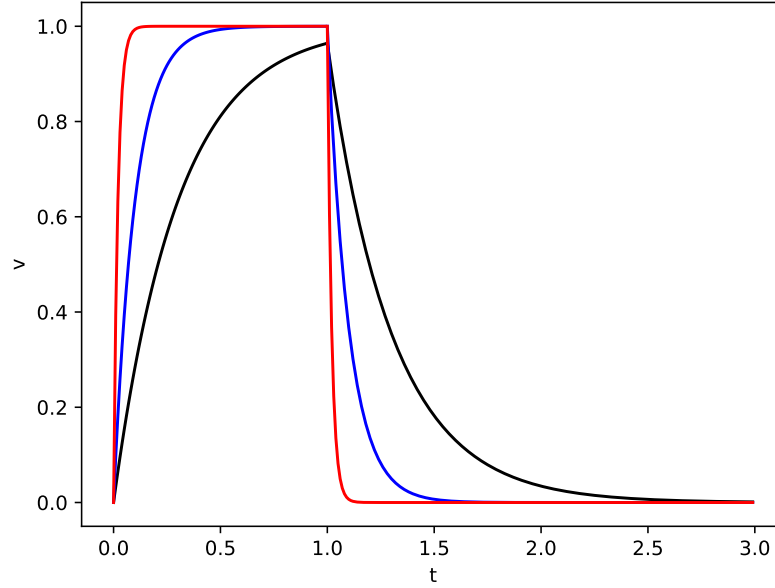


Figura 1.4: Velocidade em função do tempo para  $F_0 = b = T = 1$  e  $m = 0.3$  (linha preta),  $m = 0.1$  (linha azul) e  $m = 0.02$  (linha vermelha).

a solução da equação de movimento é

$$v(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{b} (1 - e^{-bt/m}) & \text{se } 0 < t < T \\ v_T e^{-b(t-T)/m} & \text{se } t > T \end{cases}$$

onde  $v_T = \frac{F_0}{b} (1 - e^{-bT/m})$ . A figura 1.4 mostra a solução para diversos valores de  $m$  com os outros parâmetros fixos. Conforme  $m/b \rightarrow 0$  a solução se aproxima da teoria de Aristóteles (curva vermelha). A razão  $m/b$  entre massa e coeficiente de atrito é similar ao número de Reynolds que aparece em mecânica de fluidos.

## 1.4 Movimento de uma partícula

Nesta seção vamos estudar as propriedades gerais do movimento de uma partícula sujeita a forças externas. Vamos supor que as observações são feitas em um SIR e que a massa da partícula é constante. Além do momento

linear  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , vamos definir também o momento angular da partícula em relação à origem como

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.5)$$

e o torque da força externa como

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.6)$$

Derivando  $\mathbf{L}$  em relação ao tempo obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} \quad (1.7)$$

Com esse resultado, e com a segunda lei de Newton, derivamos dois importantes teoremas de conservação:

**Teorema de conservação do momento linear** - Se a força total agindo sobre uma partícula é nula, então  $\dot{\mathbf{p}} = 0$  e seu momento linear permanece constante durante o movimento.

**Teorema de conservação do momento angular** - Se o torque total agindo sobre a partícula é nulo, então  $\dot{\mathbf{L}} = 0$  e seu momento angular permanece constante durante o movimento.

Outro conceito extremamente útil é o do **trabalho** realizado por uma força. Seja  $\mathbf{r}(t)$  a trajetória de uma partícula de massa  $m$  que se move sob a ação da força externa  $\mathbf{F}$ . O trabalho realizado por  $\mathbf{F}$  entre os pontos  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$  e  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$  ao longo de sua trajetória é definido por

$$W_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.8)$$

onde a integral acima é uma integral de linha feita ao longo da trajetória da partícula, isto é,  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ .

**Exemplo 1.4.1** - Uma partícula de massa  $m$  é forçada a se mover sobre o arco de um círculo de raio  $a$ . Uma mola presa ao ponto  $x = a$ ,  $y = 0$  é conectada à partícula, produzindo uma força  $\vec{F} = -k\vec{D}$  como ilustra a figura 1.5. Calcule o trabalho realizado pela força ao mover a partícula do ponto  $-a$  ao ponto  $a$ .

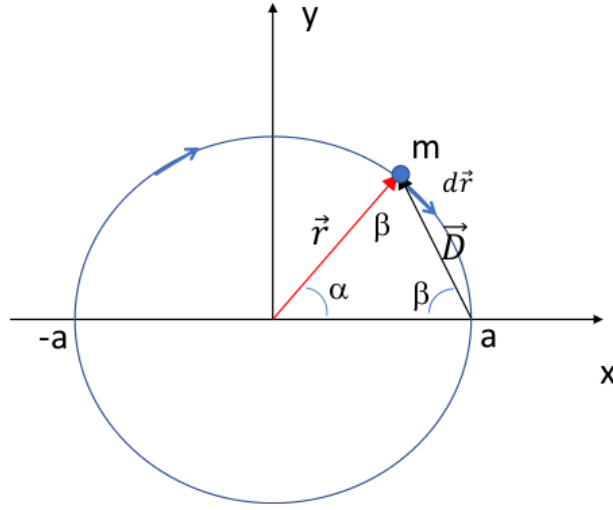


Figura 1.5: Partícula movendo-se sobre um arco de círculo com  $\vec{F} = -k\vec{D}$ .

Solução: Temos que

$$D^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha = 2a^2(1 - \cos \alpha) = 4a^2 \sin^2(\alpha/2)$$

e o módulo da força é  $F = 2ka \sin(\alpha/2)$ . O módulo de um pequeno deslocamento ao longo do círculo é  $dr = a d\alpha$ . Finalmente, o ângulo  $\theta$  entre  $d\vec{r}$  e  $\vec{F}$  satisfaz  $\theta + \beta = \pi/2$  onde  $\alpha + 2\beta = \pi$ , ou seja  $\theta = \alpha/2$ . Assim  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \theta = -F a d\alpha \cos(\alpha/2)$ , onde o sinal de menos vem da integração de  $\alpha = \pi$  até  $\alpha = 0$ . O trabalho fica

$$W = \int_{\pi}^0 [2ka \sin(\alpha/2)](-a d\alpha) \cos(\alpha/2) = 2ka^2 \int_0^{\pi} \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) d\alpha = 2ka^2.$$

**Exemplo 1.4.2** - Suponha que, ao invés de se deslocar sobre o círculo, a partícula do exemplo anterior seja forçada a se deslocar em linha reta, diretamente sobre o eixo  $x$ , de  $x = -a$  até  $x = +a$ . Mostre que o trabalho realizado pela força nesse caso é o mesmo que no caso anterior.

Solução: agora a força está apenas na direção  $x$  e temos  $\vec{F} = -k(x - a)\hat{x}$  e  $d\vec{r} = d\hat{x}$ . Assim  $W = \int_{-a}^{+a} k(a - x)dx = 2ka^2$ .

Podemos reescrever o trabalho como

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(v^2) dt \\ &= \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} \equiv T_1 - T_2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  e  $T(t) = mv^2(t)/2$  é a **energia cinética** da partícula no instante  $t$ . Esse resultado é conhecido como

**Teorema do trabalho-energia** - O trabalho realizado por uma força externa  $\mathbf{F}$  entre os pontos  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  é igual à variação da energia cinética da partícula entre esses dois pontos.

Consideremos agora a integral (1.8) entre os pontos  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  ao longo de um caminho arbitrário  $\gamma$  e vamos supor que  $\mathbf{F}$  depende apenas da posição  $\mathbf{r}$ . Se o valor da integral não depender do caminho, mas apenas dos pontos iniciais e finais, i.e., se

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

então, o valor da integral ao longo do caminho fechado  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  deve se anular. Usando o teorema de Stokes teremos

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 = \int_{S_{\gamma}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A},$$

onde  $S_{\gamma}$  é qualquer superfície limitada pela curva  $\gamma$ . Se isso vale para qualquer curva fechada, então  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . Nesse caso podemos escrever

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (1.10)$$

onde  $V$  é chamada de *energia potencial*, e a força é dita *conservativa*. Lembrando que

$$dV \equiv V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \nabla V \cdot d\mathbf{r}$$

temos que

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\nabla V \cdot d\mathbf{r} = -dV$$

e

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dV = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \equiv V_1 - V_2.$$

Da equação (1.9) vem que

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

ou ainda, definindo a *energia total*  $E = T + V$ , vemos que  $E_2 = E_1$ , i.e., o valor da energia no ponto 1 é igual a seu valor no ponto 2.

**Teorema de conservação da energia** - Se as forças agindo sobre uma partícula forem independentes da velocidade e do tempo e forem conservativas, i.e., se  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , então a energia total  $E = mv^2/2 + V(\mathbf{r})$  é constante ao longo do movimento.

Note que em uma dimensão toda força da forma  $F = F(x)$  será necessariamente conservativa. Veremos alguns exemplos desse caso a seguir.

## 1.5 Movimento em uma dimensão

Considere uma partícula de massa  $m$  movendo-se em uma dimensão sob a ação de uma força  $F(x)$ . Como  $F = -dV/dx$ , a energia potencial é dada por

$$V(x) = - \int_{\tilde{x}}^x F(x') dx'$$

onde a constante  $\tilde{x}$  pode ser escolhida conforme a conveniência do problema. A energia total da partícula

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \quad (1.11)$$

é uma constante do movimento, determinada unicamente pelas condições iniciais. Resolvendo essa equação para a velocidade obtemos

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))},$$

que pode ser integrada diretamente. Escrevendo que  $x(0) = x_0$  encontramos

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{(E - V(x'))}}. \quad (1.12)$$



Se conseguirmos resolver a integral explicitamente obteremos uma expressão para  $t$  em função de  $x$ , que, ao ser invertida, resultará na solução procurada,  $x = x(t)$ .

**Exemplo 1.5.1** - Considere o oscilador harmônico  $V(x) = kx^2/2 = m\omega_0^2 x^2/2$  onde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Escolhendo  $x_0 = 0$  a integral fica

$$t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - m\omega_0^2 x'^2/2E}}.$$

Fazendo a substituição  $x' = \sqrt{2E/m\omega_0^2} \sin \theta$  a integral fica simplesmente  $\sqrt{2E/m\omega_0^2} \theta$  e

$$t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \theta = \frac{1}{\omega_0} \theta,$$

ou  $\theta = \omega_0 t$ . Substituindo de volta em  $x$  obtemos o resultado esperado  $x(t) = \sqrt{2E/m\omega_0^2} \sin(\omega_0 t)$ .

### 1.5.1 Osciladores anarmônicos

O movimento de uma partícula sob a ação de forças não harmônicas pode ser bastante complicado e, só em casos particulares, as equações de movimento, podem ser resolvidas analiticamente. Nesta seção vamos ainda nos restringir a sistemas unidimensionais e considerar inicialmente uma partícula sob a ação de uma força conservativa dada pelo potencial  $V(x) = ax^4/4 + bx^3/3 + cx^2/2 + dx + e$ . A constante  $e$  pode ser eliminada pois não modifica a força  $F(x) = -dV/dx$ . Podemos ainda eliminar  $d$  fazendo  $x \rightarrow x + \alpha$  e escolhendo  $\alpha$  de maneira apropriada. Fixando  $a = 1$ , o que corresponde a re-escalar a variável  $x$ , obtemos uma expressão simplificada dada por

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}.$$

Os pontos onde  $V'(x) \equiv dV/dx = 0$  correspondem a pontos de equilíbrio da partícula, pois a força é nula nesses pontos. A estabilidade do ponto de equilíbrio é dada pelo valor de  $V''(x)$ : o ponto é estável se  $V''(x) > 0$  (mínimo da energia potencial) e instável se  $V''(x) < 0$  (máximo da energia potencial).

Nesse caso, os pontos de equilíbrio são dados por

$$x_0 = 0, \quad x_{\pm} = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4c}$$

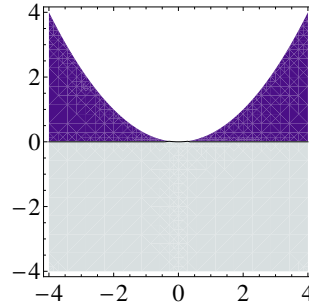


Figura 1.6: Diagrama da estabilidade dos pontos  $x_{\pm}$  no plano  $c$ - $b$ . Na região branca, dentro da parábola, só o ponto  $x_0$  existe e é estável.

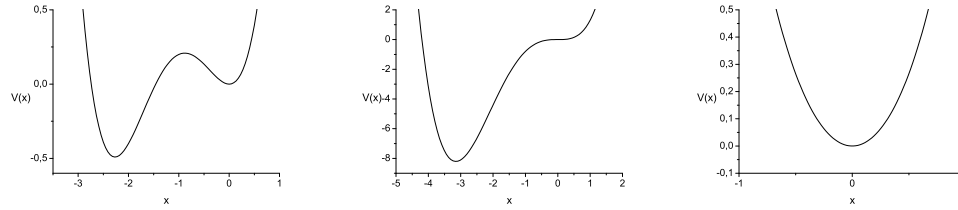


Figura 1.7: Função potencial para (a)  $b=3.15$ ,  $c=2$ ; (b)  $b=3.15$ ,  $c=0$ ; (c)  $b=0$ ,  $c=2$ .

com

$$V''(x) = \begin{cases} c & \text{se } x = x_0 \\ \frac{1}{2}(b^2 - 4c) \mp \frac{b}{2}\sqrt{b^2 - 4c} & \text{se } x = x_{\pm} \end{cases}$$

Os pontos  $x_{\pm}$  só existem quando  $b^2 > 4c$ . A figura (1.6) mostra um diagrama da estabilidade dos pontos de equilíbrio no plano  $c$ - $b$ . Na região branca, dentro da parábola, só o ponto  $x_0$  existe e é estável. Em toda região  $c < 0$   $x_0$  é instável e ambos  $x_+$  e  $x_-$  são estáveis. Para  $c > 0$  e à direita da parábola (região escura)  $x_0$  é estável,  $x_+$  é instável e  $x_-$  estável. Finalmente, na região simétrica, à esquerda da parábola (região escura também),  $x_0$  é estável,  $x_+$  é estável e  $x_-$  instável. A linha  $c = 0$  é uma linha crítica onde  $x_0 = x_+ = 0$  (os pontos coalescem) sendo marginalmente instáveis ( $V'' = 0$ ) e apenas  $x_-$  é estável. A figura (1.7) mostra alguns exemplos de  $V(x)$  para diferentes valores dos parâmetros  $b$  e  $c$ . No caso da figura 1.7(a), por exemplo, a partícula pode ficar confinada ao poço esquerdo ou direito do potencial, ou ainda, se tiver energia suficiente, oscilar sobre os dois poços.

Nesse caso, se adicionarmos uma força de atrito proporcional à velocidade a partícula perderá energia e acabará por parar em um dos mínimos, não necessariamente o de menor energia. O ponto de equilíbrio estável de energia mais alta é chamado de meta-estável, pois a partícula pode *escapar* para o ponto de energia mais baixa se puder absorver energia externa e transpor a barreira que separa os dois mínimos. Isso pode ocorrer, por exemplo, se o sistema estiver acoplado a um reservatório térmico onde  $K_B T$  seja da ordem da altura da barreira de potencial. Transições onde a estabilidade ou o número de pontos de equilíbrio muda, conforme um parâmetro do sistema é variado, são chamadas de bifurcações.

Como comentário final, notamos que se acrescentarmos uma força externa periódica da forma  $F_0 \cos(\bar{\omega}t)$ , o movimento da partícula pode tornar-se extremamente complicado e caótico, sendo aprisionado temporariamente em um dos poços, depois saindo, caindo no outro poço e assim por diante. No caso em que  $b = 0$  o sistema resultante é conhecido como *Oscilador de Duffing*.

No capítulo 7 estudaremos em mais detalhes a teoria de estabilidade linear de pontos de equilíbrio.

**Exemplo 1.5.2** - Considere uma partícula de massa  $m = 1/2$  no potencial quártico invertido,

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

Esse potencial tem um mínimo estável em  $x_0 = 0$  e dois pontos de máximo simétricos em  $x_{\pm} = \pm 1$ , sendo conhecido as vezes como *poço duplo invertido*. Embora o cálculo da integral (1.12) não possa ser feito em geral, podemos resolvê-la explicitamente se a energia da partícula for exatamente a energia correspondente aos pontos de máximo, i.e.,  $E = 1/4$ . Supondo que inicialmente  $x(0) = 0$ , podemos calcular quanto tempo a partícula leva para atingir o ponto de equilíbrio em  $x = 1$ . A resposta é surpreendente. Substituindo o potencial invertido com  $E = 1/4$  encontramos um quadrado perfeito dentro da raiz quadrada:

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - 2x'^2 + x'^4}} = \int_0^x \frac{dx'}{1 - x'^2}.$$

Fazendo  $x' = \tanh u$  a integral resulta exatamente  $u$  e obtemos  $t = u$  ou  $x(t) = \tanh t$ . Dessa forma, o tempo necessário para que  $x$  atinja o valor

de equilíbrio  $x = 1$  é infinito! Esse resultado é válido sempre que temos movimento sobre curvas chamadas de separatrizes, que conectam pontos de equilíbrio instáveis. No capítulo 4 visitaremos alguns problemas unidimensionais, particularmente o pêndulo simples, onde encontraremos as separatrizes novamente.

## 1.6 Sistemas de partículas

Quando estudamos o movimento de uma única partícula, as forças que agem sobre ela são necessariamente externas. No caso de um sistema com várias partículas, temos que distinguir entre as *forças internas*, que uma partícula exerce sobre a outra, e eventuais *forças externas* que podem agir sobre todas as partículas ou sobre um subconjunto delas [4]. Considere, por exemplo, um átomo de vários elétrons e suponha que seu núcleo possa ser considerado como uma única partícula de carga positiva. Se o átomo for colocado entre as placas paralelas de um capacitor carregado, teremos as interações eletromagnéticas internas entre os elétrons, e entre estes e o núcleo, e a força externa provocada pelo campo elétrico gerado pelo capacitor que age sobre todas as partículas carregadas do sistema.

Considere então um sistema com  $N$  partículas e seja  $\mathbf{F}_{ij}$  a força exercida pela partícula  $i$  sobre a partícula  $j$ . Seja ainda  $\mathbf{F}_i^e$  a força externa total que age sobre a partícula  $i$ . A segunda lei de Newton para a  $i$ -ésima partícula fica

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e. \quad (1.13)$$

A derivação das leis de conservação dos momentos linear e angular para um sistema de partículas depende explicitamente da aplicação da terceira lei de Newton, que obviamente não faz sentido quando consideramos uma única partícula sob a ação de forças externas. Como é usual vamos re-enunciar a terceira lei nas suas formas *fraca* e *forte*:

**Ação e reação - forma fraca** - A força exercida pela partícula  $i$  sobre a partícula  $j$  é igual em módulo, mas em sentido contrário, à força exercida pela partícula  $j$  sobre a partícula  $i$ :  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ , figura (1.8a).

**Ação e reação - forma forte** - A força exercida pela partícula  $i$  sobre a partícula  $j$  é igual em módulo, mas em sentido contrário, à força exercida

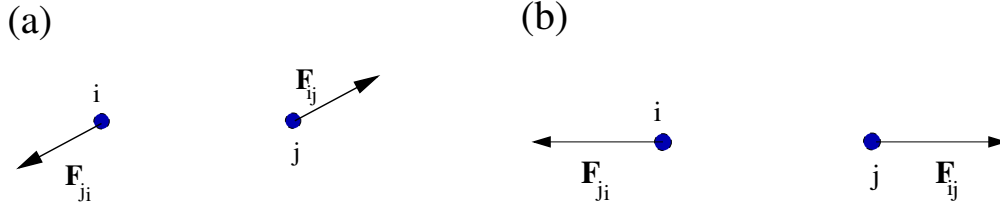


Figura 1.8: Ilustração da terceira lei de Newton nas formas (a) fraca e (b) forte.

pela partícula  $j$  sobre a partícula  $i$ . Além disso essas forças são exercidas na direção que une as partículas:  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  com  $\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ , figura (1.8b).

Se as forças internas satisfizerem a terceira lei pelo menos em sua forma fraca, então a soma de todas as forças internas se anula, pois, duas a duas, a soma é zero. Substituindo  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$  em (1.13) e somando sobre  $i$  obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) = \sum_{i,j \neq i} \mathbf{F}_{ji} + \sum_i \mathbf{F}_i^e = \sum_i \mathbf{F}_i^e \equiv \mathbf{F}^e$$

onde  $\mathbf{F}^e$  é a soma de todas as forças externas agindo sobre as partículas do sistema. Definimos agora a *coordenada do centro de massa* do sistema por

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (1.14)$$

onde  $M \equiv \sum_i m_i$  é a massa total. Em termos de  $\mathbf{R}$  a equação de movimento anterior fica

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}^e \quad (1.15)$$

ou ainda, em termos do *momento linear total*

$$\mathbf{P} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \quad (1.16)$$

obtemos

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^e \quad (1.17)$$

e a seguinte lei de conservação:

**Teorema de conservação do momento linear total -** Se a força externa total agindo sobre o sistema de partículas é nula, então  $\dot{\mathbf{P}} = 0$  e o momento linear total permanece constante durante o movimento.

Para derivarmos a lei de conservação do momento angular total precisamos que as forças satisfaçam a terceira lei na sua forma forte. O momento angular total do sistema de partículas é

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (1.18)$$

Derivando em relação ao tempo obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i$$

(note que  $\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i = 0$  pois esses vetores são paralelos). Substituindo  $\dot{\mathbf{p}}_i$  por (1.13) vem

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^e + \sum_{i,j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}.$$

A última soma dupla pode ser calculada se analisarmos a contribuição de cada par de partículas. Para o par  $k$  e  $l$  temos

$$\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kl} + \mathbf{r}_l \times \mathbf{F}_{lk} = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) \times \mathbf{F}_{kl} = 0$$

onde usamos a terceira lei fraca na primeira passagem,  $\mathbf{F}_{kl} = -\mathbf{F}_{lk}$ , e a forma forte na segunda passagem, onde a força é paralela à linha que une as partículas. Definindo o *torque total externo* por

$$\mathbf{N}^e = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^e \quad (1.19)$$

obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^e. \quad (1.20)$$

**Teorema de conservação do momento angular total -** Se o torque externo total agindo sobre o sistema de partículas é nulo, então  $\dot{\mathbf{L}} = 0$  e o momento angular total permanece constante durante o movimento.

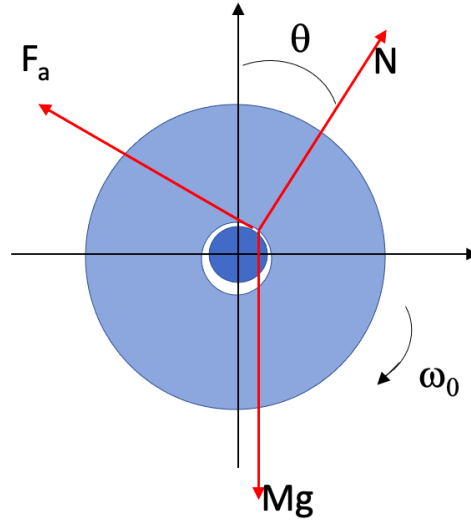


Figura 1.9: Roda girando em torno de um eixo. As forças que agem sobre a roda são o peso, a normal e a força de atrito no ponto de contacto entre a roda e o eixo. O ponto de contacto fica a um ângulo  $\theta$  em relação à vertical.

**Exemplo 1.6.1** - Uma roda de massa  $M$  e raio  $R$  tem um orifício central de raio  $a$  por onde passa um eixo de raio ligeiramente menor do que  $a$ , como ilustrado na figura 1.9. Suponha que a roda gire em torno do eixo com velocidade inicial  $\omega_0$  e que a força de atrito entre a roda e o eixo tenha módulo  $\mu N$ , onde  $N$  é a reação normal do eixo sobre a roda e  $\mu$  o coeficiente de atrito. Supondo que o centro de massa da roda fique parado enquanto ela gira, calcule o ângulo  $\theta$  onde se encontra o ponto de contacto e o tempo que a roda demora para parar de girar.

**Solução:** Um corpo rígido é um caso particular de sistema de muitas partículas onde as forças internas mantêm as distâncias entre elas sempre fixas. Vamos supor que essas forças internas satisfazem a terceira lei de Newton. Como o centro de massa está parado, a soma das forças externas deve se anular. Assim, pela figura,  $Mg \cos \theta = N$  e  $Mg \sin \theta = \mu N$ . Dividindo uma equação pela outra vemos que  $\tan \theta = \mu$ , o que mostra que o ângulo  $\theta$  não depende da velocidade angular da roda, e ficará constante até o momento em que a roda parar de girar. O momento angular  $\vec{L}$  da roda e todos os torques  $\vec{T}$ , calculados em relação à origem, estão apenas na direção perpendicular ao plano de

rotação e  $L = I\dot{\phi}$  onde  $I$  é o momento de inércia. Então  $dL/dt = I\ddot{\phi} = T^{ext}$ . O torque da força normal é nulo, pois ela está na direção radial. O torque da força peso pode ser obtido somando-se o torque de cada elemento de massa  $dm_i$  que compõe a roda:  $\vec{T}^p = \sum_i \vec{r}_i \times dm_i \vec{g} = (\sum_i dm_i \vec{r}_i) \times \vec{g} = M\vec{R} \times \vec{g}$ . O torque do peso é equivalente ao torque da massa total  $M$  aplicada no centro de massa  $\vec{R}$ . Como  $\vec{R} = 0$  o peso também não contribui para o torque. Assim  $I\ddot{\phi} = -\mu Na = -\mu Mga \cos \theta = -\mu Mga/\sqrt{1+\mu^2}$ . Essa equação pode ser integrada para encontrar  $\dot{\phi}$  com a condição inicial  $\dot{\phi}(0) = \omega_0$ . O tempo  $\tau$  que a roda leva para parar de rodar pode ser calculado impondo-se  $\dot{\phi}(\tau) = 0$ . O cálculo do momento de inércia  $I$  e de  $\tau$  é deixado como exercício ao leitor.

Para fechar essa seção discutimos brevemente a questão da conservação de energia em sistemas de muitas partículas. Seja  $\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e$  a força total agindo sobre a  $i$ -ésima partícula. Se  $\mathbf{F}_i$  depender apenas das posições das partículas do sistema (e não de suas velocidades ou do tempo),  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ , e se existir uma função potencial  $V = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  tal que

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}$$

então

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i^2 \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

permanece constante durante o movimento.

A prova é bastante simples. Começamos escrevendo a equação de movimento para a componente  $k$  da  $i$ -ésima partícula ( $k = x, y$  ou  $z$ ):

$$m_i \frac{dv_{ik}}{dt} = F_{ik} = -\frac{\partial V}{\partial x_{ik}}.$$

Nessa equação  $v_{ik}$  denota a componente  $k$  da velocidade da partícula  $i$ . Multiplicando os dois lados por  $v_{ik}$  obtemos

$$m_i v_{ik} \frac{dv_{ik}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_i v_{ik}^2}{2} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_{ik}} v_{ik} = -\frac{\partial V}{\partial x_{ik}} \frac{dx_{ik}}{dt}.$$

Somando dos dois lados sobre as componentes  $k$  e sobre as partículas  $i$  vemos que aparece de um lado a energia cinética total do sistema,  $T = \sum_i m_i v_i^2/2 =$



$\sum_i \sum_k m_i v_{ik}^2/2$ , enquanto que à direita aparece a derivada total do potencial  $V$  em relação ao tempo, pois

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_{ik}} \frac{dx_{ik}}{dt}.$$

Passando o termo do potencial para direita obtemos

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} (T + V) = 0$$

e, portanto,  $E = T + V$  é constante.

Note que não estamos apresentando as condições que as  $\mathbf{F}_i$  devem satisfazer para que a função  $V$  exista. Uma discussão interessante sobre isso pode ser encontrada no livro do Symon, no capítulo 4.

## 1.7 O problema de Kepler

O problema de dois corpos interagindo gravitacionalmente, ilustrado na figura (1.10), ficou conhecido como Problema de Kepler (1571-1630) devido às famosas leis do movimento planetário formuladas pelo astrônomo alemão. O problema foi de fato resolvido por Newton cerca de 50 anos após seu enunciado empírico por Kepler. Devido sua grande importância na Física e na Astronomia, e também por causa das aplicações que faremos mais tarde sobre movimento caótico no problema gravitacional de três corpos, resolveremos esse problema com certo detalhe nesta seção.

### 1.7.1 Equações de movimento e quantidades conservadas

As equações de movimento dos corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$ , considerados pontuais, são dadas por

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{aligned}$$

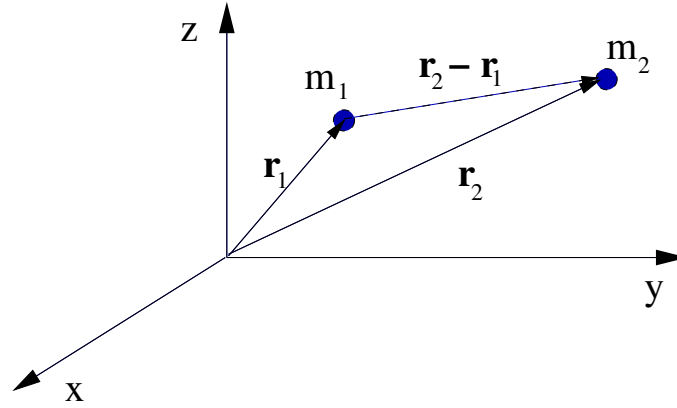


Figura 1.10: Interação gravitacional de dois corpos.

Essas equações podem ser bastante simplificadas se re-escritas em termos de coordenadas relativa e de centro de massa

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \end{cases}. \quad (1.21)$$

Somando diretamente as duas equações de movimento obtemos

$$M\ddot{\mathbf{R}} = 0, \quad (1.22)$$

onde  $M = m_1 + m_2$  é a massa total, e que indica a conservação do momento linear total, pois não há forças externas. Cancelando  $m_1$  nos dois lados da equação de movimento para o primeiro corpo e  $m_2$  na equação para o segundo e subtraindo uma da outra obtemos ainda

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.23)$$

onde  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  é a massa reduzida. Dessa forma, o problema de dois corpos em três dimensões é reduzido ao problema de um único corpo em 3D onde uma partícula fictícia de massa reduzida  $\mu$  é atraída para a origem por outro corpo fictício de massa  $M$ . Cancelando, ainda,  $\mu$  vemos que a dinâmica é determinada unicamente pela massa total  $M$ .

É fácil ver que as forças de interação podem ser derivadas a partir do potencial

$$V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = -\frac{GM\mu}{r}$$

com  $\mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 V$  e  $\mathbf{F}_{21} = -\nabla_1 V$ . A energia total, portanto, é conservada. Além disso, as forças satisfazem a terceira lei de Newton na forma forte, e o momento angular total também é conservado. Escrevendo

$$\mathbf{L} = m_1\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2$$

e usando as transformações (1.21) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m_1(\mathbf{R} - \frac{m_2}{M}\mathbf{r}) \times (\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}) + m_2(\mathbf{R} + \frac{m_1}{M}\mathbf{r}) \times (\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}) \\ &= M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mu\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}_r. \end{aligned}$$

Como  $\ddot{\mathbf{R}} = 0$  e  $\ddot{\mathbf{r}}$  está na direção de  $\mathbf{r}$  fica claro que  $d\mathbf{L}_{CM}/dt = d\mathbf{L}_r/dt = 0$  e os momentos angulares em relação ao centro de massa e relativo são conservados independentemente. O mesmo ocorre com a energia total do sistema:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \\ &= \left\{ \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) \right\} \equiv E_{CM} + E_r \end{aligned}$$

com  $E_{CM}$  e  $E_r$  também conservadas independentemente.

A conservação de  $\mathbf{L}_r$  mostra que o movimento relativo ocorre em um plano perpendicular à  $\mathbf{L}_r$ . Escolhendo o eixo  $z$  na direção de  $\mathbf{L}_r$ , podemos resolver as equações de movimento (1.23) introduzindo coordenadas polares no plano  $x$ - $y$ :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = y/x \end{cases} \quad (1.24)$$

com

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \\ \hat{\theta} &= -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Escrevendo  $\mathbf{r} = r\hat{r}$  e derivando duas vezes em relação ao tempo obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{d\theta}\dot{\theta} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}\tag{1.26}$$

onde usamos que  $d\hat{r}/d\theta = \hat{\theta}$  e  $d\hat{\theta}/d\theta = -\hat{r}$ .

Multiplicando por  $\mu$  e usando (1.23) obtemos duas equações, uma na direção radial e outra na direção angular. A segunda dessas equações pode ser escrita na forma

$$0 = \mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}).$$

Olhando a primeira linha da equação (1.26) vemos que  $r\dot{\theta} = v_\theta$  de forma que a quantidade entre parêntesis é o momento angular na direção  $z$ :  $\mu r^2\dot{\theta} = \mu r v_\theta = L_r$ . Com isso temos

$$\dot{\theta} = \frac{L_r}{\mu r^2}\tag{1.27}$$

ou ainda

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L_r}{\mu} \int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')}.\tag{1.28}$$

Essa equação poderá ser integrada quando a função  $r = r(t)$  for conhecida.

A equação radial fica

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GM\mu}{r^2}$$

e pode ser simplificada usando (1.27):

$$\begin{aligned}\mu\ddot{r} &= \mu r \left( \frac{L_r}{\mu r^2} \right)^2 - \frac{GM\mu}{r^2} \\ &= \frac{L_r^2}{\mu r^3} - \frac{GM\mu}{r^2} \\ &= -\frac{d}{dr} \left( \frac{L_r^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r} \right) \equiv -\frac{dV_{ef}}{dr}.\end{aligned}\tag{1.29}$$

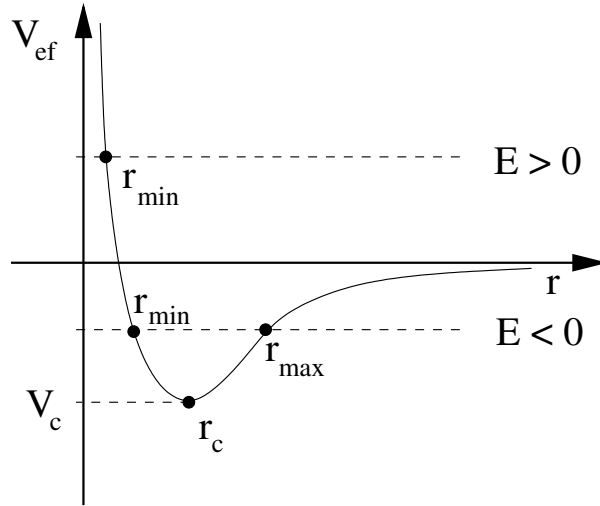


Figura 1.11: Potencial efetivo para  $L_r \neq 0$ . Para  $E < 0$ , órbita elíptica; para  $E = 0$ , órbita parabólica; para  $E > 0$ , hiperbólica.

Note que a energia associada ao movimento relativo também pode ser escrita em termos do potencial efetivo  $V_{ef}$  definido acima. Usando novamente a primeira das equações (1.26) temos

$$E_r = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GM\mu}{r} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef}. \quad (1.30)$$

Dessa forma, o movimento radial fica equivalente ao movimento de uma partícula de massa  $\mu$  em uma única dimensão  $r$  (nunca negativa!) sob a ação do potencial efetivo  $V_{ef}$ . Esse potencial leva em conta implicitamente a parte angular do movimento no termo que contém o momento angular.

### 1.7.2 Solução da equação radial

O potencial efetivo

$$V_{ef} = \frac{L_r^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}$$

é ilustrado na figura (1.11) para o caso genérico  $L_r \neq 0$ . O tipo de órbita descrita pelo sistema de dois corpos, aqui representado em termos de sua coordenada relativa, depende do valor da energia relativa  $E_r$ , que nesta seção chamaremos simplesmente de  $E$ .

A menor energia possível,  $E = V_c$ , para ocorre para  $r = r_c$  (veja a figura 1.11) onde

$$r_c = \frac{L_r^2}{GM\mu^2} \quad V_c = -\frac{G^2M^2\mu^3}{2L_r^2}. \quad (1.31)$$

Nesse ponto a força efetiva é nula e o movimento é circular com  $r = r_c$ . A equação (1.28) pode ser facilmente integrada e resulta  $\theta(t) = \theta_0 + L_r t / \mu r_c^2$ . O período deste movimento circular pode ser encontrado impondo que  $\theta(\tau) = \theta_0 + 2\pi$  e resulta  $\tau = 2\pi L_r^3 / G^2 M^2 \mu^3$ . Elevando essa equação ao quadrado e usando (1.31) obtemos  $\tau^2 = 4\pi^2 r_c^3 / GM$ , que é um caso particular da terceira lei de Kepler, como mostraremos adiante.

Para  $V_c < E < 0$  o movimento apresenta dois pontos de retorno radiais,  $r_{min}$  e  $r_{max}$ , conforme ilustra a figura (1.11), e fica confinado no plano  $x-y$  entre os anéis definidos por esses raios. Para  $E > 0$  o movimento tem uma máxima aproximação do centro de forças dado por  $r_{min}$  mas é ilimitado, de forma que a distância relativa entre os dois corpos pode ir a infinito. Apesar de ser possível resolver o problema de Kepler pelo método discutido na seção 1.5 usando a equação da energia, é mais fácil achar diretamente a equação da órbita, onde  $r$  é dado em função de  $\theta$ . Na verdade o problema fica realmente simples se o escrevermos em termos de  $u(\theta) = 1/r(\theta)$ . Usando uma linha para indicar derivação em relação à  $\theta$  temos:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -r^2 \dot{\theta} u' = -\frac{L_r}{\mu} u'$$

e

$$\ddot{r} = -\frac{L_r}{\mu} u'' \dot{\theta} = -\frac{L_r^2}{\mu^2} u^2 u''.$$

Multiplicando por  $\mu$  e usando a equação de movimento radial encontramos

$$-\frac{L_r^2}{\mu} u^2 u'' = \frac{L_r^2}{\mu} u^3 - GM\mu u^2$$

ou

$$u'' = -u + \frac{GM\mu^2}{L_r^2} \equiv -u + u_c$$

onde  $u_c = 1/r_c$  (veja a figura 1.11). A equação acima é nada menos do que a equação de um oscilador harmônico de frequência unitária submetido a uma força externa constante, como no caso de uma massa presa a uma mola sob a ação da gravidade. A solução é

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + u_c \quad (1.32)$$

onde a constante  $A$  pode ser escrita em função da energia da trajetória. Para isso notamos que os pontos de retorno  $r_{min}$  e  $r_{max}$  (este só para  $E < 0$ ) são dados por  $E = V_{ef}$  (figura 1.11). Em termos da variável  $u$  temos

$$E = \frac{L_r^2}{2\mu} u^2 - GM\mu u$$

ou

$$u^2 - 2u_c u - \frac{2\mu E}{L_r^2} = 0.$$

As duas soluções dessa equação devem ser comparadas com os valores máximos e mínimos atingidos por  $u(\theta)$  na equação (1.32), o que ocorre para  $\theta = \theta_0$  e  $\theta = \theta_0 + \pi$ :

$$u_{\pm} = u_c \pm \sqrt{u_c^2 + 2\mu E/L_r^2} \equiv \pm A + u_c$$

o que resulta

$$A = \sqrt{u_c^2 + 2\mu E/L_r^2} = u_c \sqrt{1 - E/V_c} \equiv u_c \epsilon \quad (1.33)$$

onde  $\epsilon$  é a *excentricidade da órbita*. Invertendo (1.32) e usando  $1/u_c = r_c$  dado pela equação (1.31) obtemos

$$r(\theta) = \frac{r_c}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)} \equiv \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (1.34)$$

O parâmetro  $a$  é definido por  $r_c = a(1 - \epsilon^2) = a(E/V_c)$ . Usando a equação (1.31) obtemos

$$a = \frac{GM\mu}{2|E|}. \quad (1.35)$$

Se  $V_c < E < 0$  vemos que  $\epsilon < 1$ ,  $a > 0$  e a órbita fica limitada entre  $r_{min} = a(1 - \epsilon)$  e  $r_{max} = a(1 + \epsilon)$ . Na próxima subseção vamos mostrar que isso corresponde a uma elipse com semieixo maior  $a$ . O parâmetro  $\theta_0$  indica a orientação da elipse no plano e tem uma interpretação importante: quando  $\theta = \theta_0$ ,  $r$  atinge seu menor valor possível, sendo portanto a posição de maior aproximação dos corpos, ou *periélio*. Se escolhermos um SIR em repouso em relação ao centro de massa, podemos tomar  $\mathbf{R} = 0$ , de forma que, pelas equações (1.21), teremos  $\mathbf{r}_1 = -(m_2/M)\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_2 = (m_1/M)\mathbf{r}$ , ou seja, as órbitas de ambos os corpos são elípticas, proporcionais à  $\mathbf{r}$ , mas sempre em direções opostas. A órbita do corpo de maior massa será sempre interna

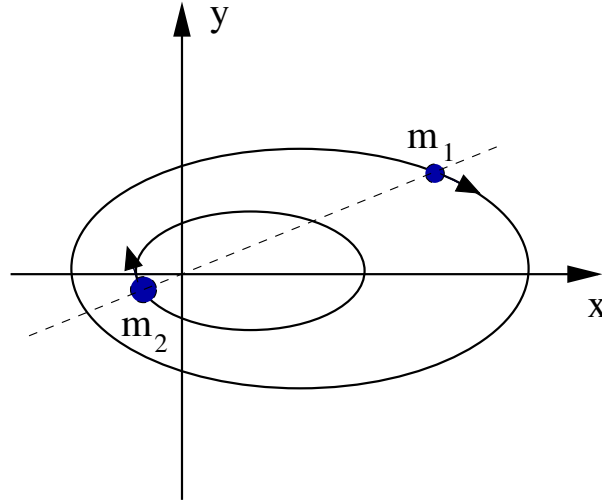


Figura 1.12: Órbitas elípticas no referencial do centro de massa supondo  $m_2 > m_1$ .

àquela do corpo de menor massa. Na figura (1.12) ilustramos o movimento supondo que  $m_2 > m_1$ . No caso do sistema solar, a elipse descrita pelo Sol tem semieixo maior menor do que o raio do próprio Sol.

Se  $E > 0$  teremos  $\epsilon > 1$  e  $a < 0$  (de forma que  $a(1 - \epsilon^2) > 0$ ) e a equação representa uma hipérbole cujas assíntotas podem ser obtidas fazendo  $r(\theta) \rightarrow \infty$ , o que resulta  $\theta = \theta_0 + \arccos(-1/\epsilon)$  e  $\theta = \theta_0 + 2\pi - \arccos(-1/\epsilon)$ .

No caso crítico  $E = 0$  a equação da órbita pode ser reescrita como  $r + r \cos \theta = r_c$ , onde escolhemos  $\theta_0 = 0$  por simplicidade. Fica como exercício mostrar que essa equação pode ser colocada na forma  $y^2 = r_c^2 - 2r_c x$ , que representa uma parábola deitada.

### 1.7.3 A equação da elipse

A equação da elipse com centro na origem do sistema de coordenadas e semi-eixos  $a$  e  $b$  é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e está ilustrada na figura 1.13 à esquerda. A excentricidade da elipse é definida como

$$\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$$



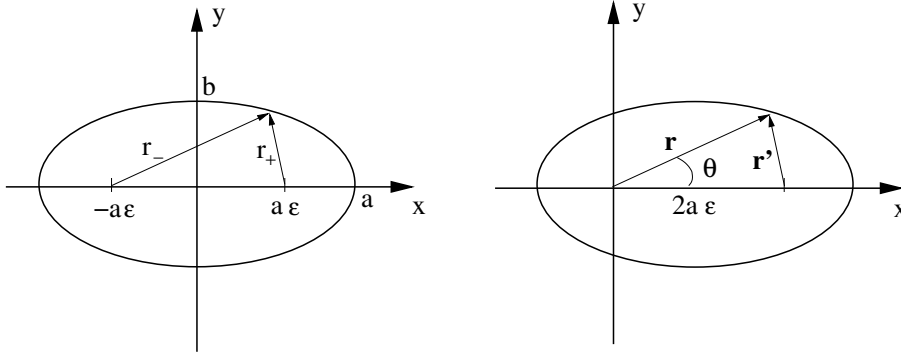


Figura 1.13: Elipse com centro na origem e com foco na origem.

e mede o seu alongamento:  $\epsilon = 0$  corresponde ao círculo e quanto mais próximo é seu valor de 1, mais alongada a elipse fica. É conveniente usar  $a$  e  $\epsilon$  como parâmetros independentes e escrever

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$$

Os focos da elipse estão dispostos simetricamente sobre o eixo  $x$  a distâncias  $\pm a\epsilon$  da origem.

Chamando de  $r_-$  e  $r_+$  as distâncias de um ponto arbitrário sobre a elipse até cada um dos focos (veja a figura 1.13), temos a seguinte propriedade geométrica:

$$r_- + r_+ = 2a.$$

Podemos demonstrar essa propriedade usando a equação da elipse ou usá-la como definição da elipse e, a partir dela, demonstrar a equação. Vamos adotar a primeira linha de raciocínio e deixamos como exercício fazer o caminho contrário. Sendo  $\mathbf{r} = (x, y)$  o vetor posição do ponto sobre a elipse medido a partir da origem, temos:

$$\mathbf{r}_- = \mathbf{r} + a\epsilon\hat{x} = (x + a\epsilon, y)$$

$$\mathbf{r}_+ = \mathbf{r} - a\epsilon\hat{x} = (x - a\epsilon, y)$$

de forma que  $r_{\mp} = \sqrt{(x \pm a\epsilon)^2 + y^2}$ . Usando a equação da elipse podemos

substituir  $y^2 = (1 - x^2/a^2)b^2 = (1 - \epsilon^2)(a^2 - x^2)$ :

$$\begin{aligned} r_{\mp} &= \sqrt{x^2 \pm 2a\epsilon x + a^2\epsilon^2 + (1 - \epsilon^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{a^2 \pm 2a\epsilon x + \epsilon^2 x^2} = \sqrt{(a \pm \epsilon x)^2} \\ &= a \pm \epsilon x. \end{aligned}$$

Somando obtemos imediatamente  $r_- + r_+ = 2a$ .

A equação da órbita que obtivemos na seção anterior tem três diferenças em relação à equação da elipse que descrevemos acima: um de seus focos está na origem (e não no centro); ela está escrita em coordenadas polares e; sua orientação é arbitrária, dada por  $\theta_0$ . Colocando o foco na origem temos a nova equação (veja a figura 1.13 direita)

$$\frac{(x - a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} = 1.$$

Usando agora (veja a figura) que  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - 2a\epsilon\hat{x} = (x - 2a\epsilon, y)$  e que  $r' = 2a - r$  obtemos:

$$r'^2 = (2a - r)^2 = (x - 2a\epsilon)^2 + y^2$$

$$4a^2 - 4ar + r^2 = x^2 + y^2 - 4a\epsilon x + 4a^2\epsilon^2$$

$$4a^2(1 - \epsilon^2) = 4a(r - \epsilon x) = 4ar(1 - \epsilon \cos \theta)$$

e, finalmente, cancelando o fator comum  $4a$  e isolando  $r$ :

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

que corresponde à equação do movimento de Kepler para energias negativas com  $\theta_0 = \pi$ .

### 1.7.4 As três leis de Kepler

A primeira das leis de Kepler afirma que os planetas giram em torno do Sol em órbitas elípticas. Como a elipse descrita pelo Sol é muito pequena, podemos considera-lo parado no centro de massa do sistema solar.

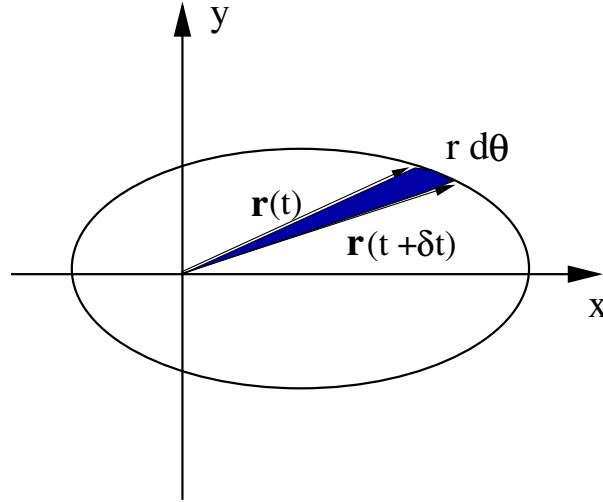


Figura 1.14: No intervalo  $dt$  o raio vetor se move de  $\mathbf{r}(t)$  a  $\mathbf{r}(t + \delta t)$  varrendo o ângulo  $d\theta$ .

A segunda lei de Kepler afirma que o raio vetor que une os planetas ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. De fato, a área varrida pelo raio vetor no tempo  $dt$  é, veja a figura 1.14, é

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

ou

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta} = \frac{L_r}{2\mu} = \text{constante}.$$

Finalmente, a terceira lei de Kepler diz que o quadrado do período orbital dos planetas é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita. Para demonstrar esse resultado basta integrar a lei das áreas sobre um período para obter

$$A = \frac{L_r \tau}{2\mu} = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = \pi a^2 \sqrt{E/V_c}.$$

Elevando os dois lados ao quadrado e usando  $E = -GM\mu/2a$  (veja o resultado abaixo da equação (1.34) e  $V_c$  dado por (1.31) obtemos,

$$\frac{L_r^2 \tau^2}{4\mu^2} = \pi^2 a^4 \frac{L_r^2}{GM\mu^2 a}.$$

ou

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Finalmente, definindo a frequência do movimento como  $\omega = 2\pi/\tau$  podemos reescrever essa equação na forma

$$a = \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{\omega^2} \right]^{1/3}. \quad (1.36)$$

## 1.8 Exercícios

1. Considere uma partícula em queda livre vertical onde a distância inicial em relação ao solo  $x_0$  não pode ser desprezada em relação ao raio da Terra  $R$ . Mostre que no limite em que  $x_0/R \ll 1$  a solução da equação de movimento é

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{R}{2}\right) \cosh(\nu t) + \frac{v_0}{\nu} \sinh(\nu t) + \frac{R}{2}.$$

onde  $\nu = \sqrt{2g/R}$ . Calcule  $x(t)$  para  $\nu \rightarrow 0$ .

2. Resolva o problema anterior de forma exata usando a Eq.(1.12) com  $E = m\dot{r}^2/2 - GMm/r$  e a condição  $E < 0$ . Dica: faça a mudança de variáveis  $\sqrt{-Er/GMm} = \cos\theta$ . Calcule  $r(t)$  e  $\dot{r}(t)$ . Mostre que quando  $r = 0$ ,  $\dot{r} = \infty$ .
3. Considere uma partícula de massa  $m = 1/2$  movendo-se sob a ação do potencial

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

Faça um esboço de  $V(x)$  e discuta os tipos de movimentos possíveis. Encontre os pontos de equilíbrio do potencial e discuta sua estabilidade. Encontre explicitamente a equação da trajetória para o caso particular onde  $E = 1/4$  e  $x(0) = 0$ .

4. Considere uma partícula de massa  $m$  movendo-se sob a ação do potencial

$$V(x) = V_0 \frac{x^4}{4}.$$

Como o potencial é limitado todas as trajetórias são fechadas. Obtenha uma expressão para o período das trajetórias em função de sua energia total  $E$ .

5. Considere uma partícula de massa  $m$  movendo-se sob a ação do potencial

$$V(x) = V_0 \left( \frac{x}{L} \right)^{2k}$$

onde  $k = 1, 2, \dots$ . Faça um esboço de  $V(x)$  para  $k = 1$ ,  $k = 2$  e  $k \rightarrow \infty$ . Obtenha uma expressão para o período das trajetórias em função de sua energia total  $E$ .

6. Uma partícula de massa  $m$  está sujeita à uma força elástica  $F = -kx$  e à força de atrito  $F_a = -b\dot{x}$  onde  $b$  e  $k$  são constantes positivas. Encontre  $x(t)$  e discuta os tipos de soluções que podem ocorrer.
7. Uma partícula de massa  $m$  está sujeita à força  $F = -kx + a/x^3$ . Determine a energia potencial  $V(x)$ . Descreva qualitativamente o movimento e encontre  $x(t)$ .
8. Mostre que a magnitude do vetor posição do centro de massa,  $R$ , é dado pela equação

$$M^2 R^2 = M \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2$$

onde  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ .

9. Considere um sistema de partículas e as coordenadas e velocidades relativas ao centro de massa

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \quad \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$$

onde  $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$ . Mostre que:

(a)  $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$ ,

(b)  $T = 1/2 M V^2 + 1/2 \sum_i m_i v_i'^2$

(c)  $\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = 0$ .

10. Mostre que a equação da elipse que descreve as órbitas de Kepler,

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \theta} \quad (1.37)$$

pode ser escrita em variáveis cartesianas na forma

$$\frac{(x - a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} = 1. \quad (1.38)$$

11. Suponha que duas partículas interajam através de um potencial central dado por

$$V(r) = -\frac{GM\mu}{r} - \frac{A}{r^2}.$$

Resolva a equação radial considerando a constante  $A$  positiva ou negativa. Mostre que existem soluções dadas por órbitas elípticas que precessionam. Calcule o período de precessão.

12. Faça um estudo qualitativo das órbitas no potencial

$$V(r) = -\frac{GM\mu}{r} - \frac{A}{r^3}.$$

13. Use a terceira lei de Kepler e a equação (1.35) para mostrar que a frequência no movimento de dois corpos é relacionada com a energia por

$$\omega^2 = \frac{8|E|^3}{G^2 M^2 \mu^3}.$$

14. Mostre que a equação para a coordenada radial relativa entre duas partículas interagindo através de um potencial central  $V(r)$  pode ser escrita como

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u - \frac{\mu}{L_r^2} \frac{dV}{du}$$

onde  $V(u) = V(r(u))$  e  $u = 1/r$ . Verifique essa equação usando os problemas 11 e 12.

15. Suponha que  $\vec{r}$  e  $\vec{p}$  estejam no plano x-y e não sejam paralelos, de forma que  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  esteja na direção z. Mostre que se  $\vec{r}$  e  $\vec{p}$  adquirirem uma pequena componente fora do plano x-y, então  $\vec{L}$  terá componentes fora da direção z. Isso mostra que se  $\vec{L}$  for constante o movimento deve ficar restrito ao plano x-y. Dica: escreva  $\vec{r} = (x, y, \epsilon)$ ,  $\vec{p} = (p_x, p_y, \delta)$  e calcule as componentes de  $\vec{L}$ .

# Capítulo 2

## As Equações de Euler-Lagrange

Apesar do princípio determinístico de Newton afirmar que, conhecidas as forças e o estado inicial de um sistema, podemos sempre calcular seu estado futuro, em muitos problemas a situação é bem mais complicada. Uma das grandes dificuldades encontra-se na existência de *vínculos* em vários problemas de interesse. Dependendo da natureza dos vínculos a simples aplicação direta da segunda lei de Newton não basta para encontrar a trajetória do sistema. Veremos vários exemplos a seguir.

As equações de Euler-Lagrange, que derivaremos nessa seção, podem ser pensadas como uma remodelação da segunda lei de Newton que conseguem lidar com a questão dos vínculos de forma mais natural. Existem duas maneiras de deduzir essas equações: a primeira utiliza diretamente a segunda lei e usa o conceito de *deslocamento virtual*, introduzido pelo físico francês Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), para eliminar as forças de vínculo das equações de movimento. A segunda, que veremos no próximo capítulo é, de certa forma, mais geral e usa o Princípio Variacional de Hamilton. O material apresentado aqui é fortemente baseado no livro *Classical Mechanics* de H. Goldstein [5]. Outras referências relevantes para esse capítulo são [4, 6].

### 2.1 Vínculos e graus de liberdade

Consideremos um sistema genérico com  $N$  partículas interagentes de coordenadas cartesianas  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ . Os vínculos aos quais essas partículas podem estar sujeitas são classificados em duas categorias:

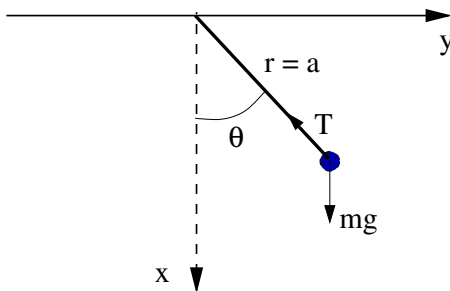


Figura 2.1: O pêndulo simples. A força de vínculo é a tensão no fio, que mantém a partícula a uma distância fixa  $r = a$  da origem.

**Vínculos Holonômicos** - são aqueles que podem ser expressos em termos de funções do tipo  $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$ . Exemplo: os vínculos sobre as partículas de um corpo rígido podem ser escritos como  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$ . No caso do pêndulo simples (veja figura 2.1) o vínculo é  $r - a = 0$ .

**Vínculos Não-Holonômicos** - são aqueles que não podem ser expressos dessa forma. Exemplo: vínculos que só podem ser escritos em forma diferencial (veja os exercícios 4 e 5 no final do capítulo) ou as paredes de um recipiente esférico de raio  $a$  onde encontram-se confinadas as moléculas de um gás. Nesse caso os vínculos são  $r_i < a$ .

Os vínculos introduzem duas dificuldades: em primeiro lugar, as coordenadas  $\mathbf{r}_i$  não são mais independentes e, em segundo, as forças de vínculo não são conhecidas a priori. No caso do pêndulo, por exemplo, a tensão no fio deve ser calculada a partir das equações de movimento.

Se houverem  $k$  vínculos holonômicos, podemos usar as  $k$  equações  $f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$  para eliminar  $k$  variáveis. O número de variáveis independentes  $n = 3N - k$  é o *número de graus de liberdade* do sistema. Temos então duas opções: usar  $n$  das  $3N$  coordenadas cartesianas originais ou introduzir  $n$  novas variáveis  $q_1, q_2, \dots, q_n$  que sejam independentes e que especifiquem unicamente a configuração do sistema. Variáveis desse tipo são chamadas de *coordenadas generalizadas* e devemos ser capazes de escrever



todas as coordenadas originais em termos delas:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_n, t).\end{aligned}\tag{2.1}$$

No exemplo do pêndulo plano, figura 2.1, as coordenadas cartesianas da partícula são  $x$  e  $y$ . Em termos de coordenadas polares a equação de vínculo é  $r = a$  e basta  $\theta$  para especificar sua posição. A transformação nesse caso é

$$\begin{aligned}x &= a \cos \theta \\ y &= a \sin \theta.\end{aligned}$$

O sistema tem apenas 1 grau de liberdade com coordenada generalizada  $q = \theta$ .

## 2.2 O princípio de D'Alembert: caso estático

O princípio de D'Alembert, ou princípio do trabalho virtual, usa a noção de coordenadas generalizadas e o conceito dos deslocamentos virtuais para eliminar as forças de vínculo da descrição do problema. Veremos inicialmente como fazer isso no caso estático, onde estamos interessados apenas nas configurações de equilíbrio, e depois veremos como a ideia pode ser estendida para a dinâmica.

Nesse formalismo, a distinção entre forças de vínculo e outras forças, que chamaremos de *forças aplicadas*, é fundamental. Seja então

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i\tag{2.2}$$

a força total atuando na  $i$ -ésima partícula do sistema, onde  $\mathbf{f}_i$  são as forças de vínculo e  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  são as forças aplicadas, que podem ser externas ou devido às outras partículas do sistema.

Um conjunto de **deslocamentos virtuais** sobre o sistema é definido como pequenas alterações *instantâneas*  $\delta \mathbf{r}_i$  na posição das partículas de tal forma que não violem os vínculos. Poderíamos exigir então que os deslocamentos fossem sempre perpendicular às forças de vínculo. D'Alembert notou, no entanto, que a definição mais abrangente e correta é que o trabalho total realizado pelas forças de vínculo em deslocamentos virtuais seja nulo:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.\tag{2.3}$$

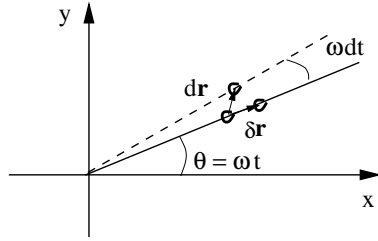


Figura 2.2: Barra girando com conta que desliza. Nesse caso  $\delta \mathbf{r} \neq d\mathbf{r}$

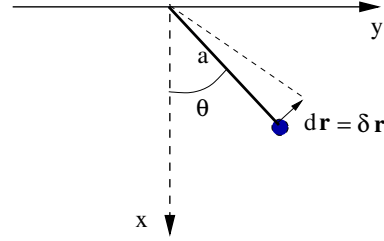


Figura 2.3: No pêndulo simples  $\delta \mathbf{r} = d\mathbf{r} = ad\theta \hat{\theta}$ .

A distinção entre deslocamentos reais  $d\mathbf{r}_i$ , que de fato podem ocorrer no sistema, e os virtuais  $\delta \mathbf{r}_i$  está no fato de que os últimos são feitos com o tempo congelado. Usando as transformações (2.1) para coordenadas generalizadas temos

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt \quad (2.4)$$

enquanto que

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.5)$$

**Exemplo 2.2.1:** Considere uma barra girando horizontalmente com velocidade angular constante  $\omega$  e na qual uma conta pode deslizar sem atrito, conforme ilustrado na figura 2.2. O deslocamento virtual da partícula ocorre com o tempo congelado e é feito ao longo da barra com esta parada. O deslocamento real da conta, por outro lado, leva em conta a rotação da barra. Note que a força de vínculo em cada instante é sempre perpendicular à barra e  $\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = 0$ .

**Exemplo 2.2.2:** No caso do pêndulo simples, figura 2.3, o deslocamento virtual coincide com o real e está na direção  $\hat{\theta}$ , perpendicular à tensão no fio.

Nesta seção vamos considerar apenas situações de equilíbrio, onde  $\mathbf{F}_i = 0$ . Então, usando (2.3)

$$0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i.$$

Note que conseguimos eliminar totalmente as forças de vínculo da equação de equilíbrio. No entanto, justamente devido aos vínculos, os deslocamentos  $\delta \mathbf{r}_i$  não são independentes e essa equação não implica que  $\mathbf{F}_i^{(a)} = 0$ . De fato sabemos que a condição de equilíbrio é  $\mathbf{F}_i^{(a)} = -\mathbf{f}_i$ .

Usando a equação (2.5) obtemos

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

ou ainda

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = 0 \quad (2.6)$$

onde

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (2.7)$$

são as **forças generalizadas**. Como as coordenadas generalizadas são independentes, a condição de equilíbrio se reduz à  $Q_j = 0$ , que podem ser resolvidas sem o conhecimento das forças de vínculo.

**Exemplo 2.2.3:** Considere o pêndulo novamente, ilustrado nas figuras 2.1 e 2.3. Nesse caso  $\mathbf{F}^{(a)} = mg\hat{x}$ ,  $\mathbf{f} = -T\hat{r}$  e a transformação de  $(x, y)$  para a coordenada generalizada  $\theta$  é  $x = a \cos \theta$ ,  $y = a \sin \theta$ . A força generalizada para a coordenada  $\theta$  é

$$Q_\theta = mg\hat{x} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = mg \frac{\partial x}{\partial \theta} = -mga \sin \theta.$$

A condição de equilíbrio  $Q_\theta = 0$  fornece  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ .

**Exemplo 2.2.4:** Suponha que o corpo na extremidade do pêndulo tenha massa  $m$  e carga elétrica  $q$ . Se, além do campo gravitacional, for aplicado um campo elétrico horizontal constante,  $\mathbf{E} = E_0\hat{y}$  a força aplicada total será  $\mathbf{F}^{(a)} = mg\hat{x} + qE_0\hat{y}$ , de forma que

$$Q_\theta = mg \frac{\partial x}{\partial \theta} + qE_0 \frac{\partial y}{\partial \theta} = -mga \sin \theta + qaE_0 \cos \theta.$$

Agora a condição de equilíbrio resulta  $\tan \theta = qE_0/mg$ .

Para terminar essa seção observamos que o critério  $Q_j = 0$  para encontrar os pontos de equilíbrio tem algumas limitações. Quando não existem forças aplicadas, por exemplo, as forças generalizadas são identicamente nulas. Nesse caso  $\vec{F}_i = \vec{f}_i$  e os pontos de equilíbrio devem satisfazer  $\vec{f}_i = 0$ . Considere um pêndulo montado sobre uma mesa plana sem atrito (e sem gravidade). Nesse caso  $\vec{f} = 0$  para qualquer  $\theta$  desde que  $\dot{\theta} = 0$ , pois não há tensão no fio, e qualquer ângulo representa um equilíbrio possível.

Outro caso onde o critério  $Q_j = 0$  não funciona para determinar os pontos de equilíbrio é quando o sistema não é autônomo, ou seja, quando existem forças obrigando o sistema a girar ou se mover de forma pré-determinada. Mais especificamente, o critério não funciona quando as coordenadas generalizadas são escolhidas em referenciais não-inerciais. Isso acontece, por exemplo, quando temos pêndulos ou osciladores montados sobre carros acelerados (problema 2.6) ou aros girando com velocidade angular constante (problema 2.7). No caso da barra girando, figura 2.2, não existem forças aplicadas, mas a única solução de equilíbrio é  $r = 0$  com  $\dot{r} = 0$ . Nessas situações aparecem as chamadas forças fictícias e temos que escrever as equações de movimento completas, como faremos na próxima seção, e impor  $\ddot{q}_j = \dot{q}_j = 0$  para encontrar os equilíbrios.

## 2.3 O princípio de D'Alembert e as equações de Lagrange

O princípio de D'Alembert pode também ser usado para fornecer uma descrição completa da dinâmica do sistema sem que as forças de vínculo precisem ser incluídas explicitamente. O ponto de partida para essa descrição é a segunda lei de Newton, escrita na forma

$$0 = \mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0.$$

Multiplicando tudo por deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{r}_i$ , somando sobre  $i$  e usando novamente que o trabalho das forças de vínculo se anula para deslocamentos virtuais, obtemos

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

O primeiro termo dessa equação nós já calculamos na seção anterior e o

resultado é

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (2.8)$$

onde as forças generalizadas  $Q_j$  são dadas por (2.7).

Para simplificarmos o segundo termo e escrevê-lo diretamente em termos das coordenadas generalizadas  $q_j$  precisaremos de quatro resultados preliminares:

**R1** - Derivando as relações (2.1) em relação ao tempo obtemos

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

o que mostra que  $\dot{\mathbf{r}}_i$  é função de  $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ . Além disso vemos que

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

**R2** - A seguinte relação é verdadeira:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}.$$

Para demonstrá-la basta calcular cada lado da equação separadamente:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}$$

e

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

onde tratamos as variáveis  $q_k$  e  $\dot{q}_k$  como independentes.

**R3** - Usando a regra elementar  $2f(x)\partial f(x)/\partial x = (\partial/\partial x)f^2(x)$  podemos escrever

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

onde  $T$  é a energia cinética do sistema.

**R4** - Usando exatamente o mesmo truque temos

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Podemos agora simplificar facilmente o segundo termo da equação dinâmica de D'Alembert. Começamos escrevendo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i,j} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j. \end{aligned}$$

Usando **R1** e **R2** obtemos

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right\} \delta q_j.$$

Usando ainda **R3** e **R4**

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j.$$

Finalmente, usando o resultado (2.8), transformamos as  $3N$  equações correspondentes à segunda lei de Newton na equação única

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0.$$

Como os  $\delta q_j$  são independentes as seguintes  $n$  equações devem ser satisfeitas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.9)$$

para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Obtemos assim a primeira forma das Equações de Lagrange, que envolve a energia cinética e as forças generalizadas.

**Forças conservativas** - No caso em que as forças aplicadas são conservativas,  $\mathbf{F}_i^{(a)} = \nabla_i V$ , podemos escrever

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

e as equações de Lagrange assumem a forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0.$$

Se, além disso, o potencial (e as forças) for independente das velocidades generalizadas, de forma que  $\partial V / \partial \dot{q}_j = 0$ , as equações (2.9) podem simplificadas ainda mais escrevendo

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (2.10)$$

onde  $L = T - V$  é a *função lagrangiana*, que deve ser escrita em termos das coordenadas e velocidades generalizadas. Essa é a forma mais tradicional das Equações de Lagrange.

**Forças não-conservativas** - Se parte das forças aplicadas for conservativa e parte não for, podemos escrever  $\mathbf{F}_i^{(a)} = -\nabla_i V + \mathbf{F}_i^{(nc)}$ , onde explicitamos a parte não-conservativa. Nesse caso as equações assumem a forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{nc} \quad (2.11)$$

onde as forças generalizadas do lado direito são calculadas apenas com  $\mathbf{F}_i^{(nc)}$ .

**Forças dependentes da velocidade** - As equações (2.10) ainda são válidas se as forças generalizadas dependerem das velocidades de tal forma que exista uma função  $U(q, \dot{q})$  tal que a seguinte relação seja satisfeita:

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (2.12)$$

O leitor pode facilmente verificar que as equações (2.9) se reduzem às (2.10) com  $L = T - U$  nesse caso. Apesar de parecer extremamente especial, as equações (2.12) são satisfeitas para a força de Lorentz, como veremos na próxima seção.

Veremos a seguir alguns exemplos elementares de aplicação das equações de Lagrange.

**Exemplo 2.3.1** O objetivo deste primeiro exemplo é ilustrar certos cuidados que devemos ter em relação às várias derivadas parciais e totais que aparecem ao longo dos cálculos no formalismo de Lagrange. Considere um sistema fictício de dois graus de liberdade cuja lagrangiana é dada por  $L = q_1^2 \dot{q}_2 + \dot{q}_1^2$ . Essa lagrangiana tem as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1^2 \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 2q_1 \dot{q}_2 \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0.$$

Veja que  $q_2$  não aparece em  $L$ . As derivadas totais em relação ao tempo ficam

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = 2\ddot{q}_1 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = 2q_1 \dot{q}_1$$

de forma que as duas equações de movimento ficam  $\ddot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 = 0$  e  $2q_1 \dot{q}_1 - 0 = 0$ .

**Exemplo 2.3.2** Considere novamente o pêndulo simples, figura 2.1. Em coordenadas polares o raio é fixo  $r = a$  e  $\theta$  é a única coordenada livre. A transformação de  $x, y$  para  $\theta$  é  $x = a \cos \theta$ ,  $y = a \sin \theta$ . A energia cinética é obtida calculando-se

$$\dot{x} = -a\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = a\dot{\theta} \cos \theta$$

e  $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 = ma^2\dot{\theta}^2/2$ . Como  $V = -mgx = -mga \cos \theta$  obtemos

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta$$

e a equação de movimento fica

$$a\ddot{\theta} = -g \sin \theta.$$



**Exemplo 2.3.3** Considere o problema da barra girando horizontalmente com velocidade angular constante  $\omega$  ilustrado na figura 2.2. Escolhendo a barra ao longo do eixo  $x$  em  $t = 0$  a posição angular da conta é dada por  $\theta = \omega t$ , que é uma equação de vínculo dependente do tempo. A única variável livre é  $r$ , que escolhemos como coordenada generalizada. A transformação de  $x, y$  para  $r$  é  $x = r \cos(\omega t)$ ,  $y = r \sin(\omega t)$ . Não existem forças aplicadas, de forma que  $L = T$ . As velocidades são dadas por

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\omega t) - \omega r \sin(\omega t)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\omega t) + \omega r \cos(\omega t)$$

(compare com o resultado **R1** acima), de forma que

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

As derivadas parciais são  $\partial L / \partial \dot{r} = m\dot{r}$  e  $\partial L / \partial r = m\omega^2 r$ , de forma que a equação de Lagrange (2.10) resulta, após cancelarmos a massa,  $\ddot{r} = -\omega^2 r$ . Essa é a equação de um oscilador invertido e a solução é dada em termos de funções hiperbólicas. Escolhendo  $r(0) = r_0$  e  $\dot{r}(0) = v_0$  a solução é

$$r(t) = r_0 \cosh(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t).$$

Note que podemos interpretar o segundo termo da lagrangiana como um potencial,  $V(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ . Isso produz uma força (fictícia) radial  $F(r) = m\omega^2 r$  devido ao referencial não inercial da barra, onde  $r$  é medido.

**Exemplo 2.3.4** Disco de massa  $m$  rolando sem deslizar em um plano inclinado. O problema é ilustrado na figura 2.4. Para especificar a posição do disco temos que fornecer as coordenadas  $(x, y)$  do centro do disco e sua orientação, dada pelo ângulo  $\phi$  entre uma marca sobre o disco e o ponto de contato deste com a superfície inclinada. Essas coordenadas, no entanto, não são independentes, pois existem dois vínculos. Vamos mostrar que o sistema tem apenas um grau de liberdade e que uma boa coordenada generalizada é dada por  $u$  (veja figura) que dá a distância percorrida pelo centro do disco sobre o plano. Os vínculos são:

(1) Como o disco rola sem deslizar,  $a d\phi = du$ , que pode ser integrada resultando em  $a\phi = u$  supondo que  $\phi = 0$  quando  $u = 0$ .

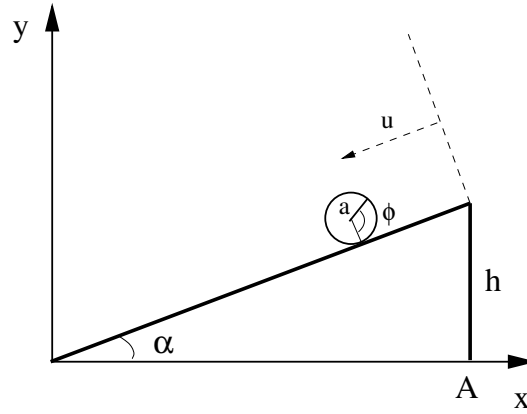


Figura 2.4: Disco rolando em plano inclinado.

(2) Como o disco está sempre sobre o plano,  $\Delta y / \Delta x = \tan \alpha$ .

Esses vínculos nos permitem escrever  $x$ ,  $y$ ,  $\phi$ , e as respectivas derivadas totais em relação ao tempo, em termos de  $u$  e  $\dot{u}$ :

$$\begin{aligned} x &= A - u \cos \alpha - a \sin \alpha & \dot{x} &= \dot{u} \cos \alpha \\ y &= h - u \sin \alpha + a \cos \alpha & \dot{y} &= -\dot{u} \sin \alpha \\ \phi &= u/a & \dot{\phi} &= \dot{u}/a. \end{aligned}$$

A lagrangiana pode ser calculada facilmente:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 - mgy \\ &= \frac{\dot{u}^2}{2} \left( m + \frac{I}{a^2} \right) - mgu \sin \alpha + V_0 \end{aligned}$$

onde  $I$  é o momento de inércia do disco e  $V_0$  é constante. A equação de Lagrange para  $u$  resulta

$$\ddot{u}(m + I/a^2) = mg \sin \alpha$$

de onde calculamos a aceleração (constante) do centro do disco:

$$\ddot{u} = \frac{mg \sin \alpha}{m + I/a^2}.$$

**Exemplo 2.3.5** Vínculos na forma diferencial. O primeiro vínculo do exemplo anterior foi escrito na forma diferencial  $ad\phi = du$  e posteriormente integrado para  $a\phi = u$ . É bastante comum, especialmente em sistemas com discos e aros que rolam sem deslizar, o aparecimento de vínculos desse tipo. Suponha então que um vínculo tem a forma

$$\sum_{i=1}^n g_i(x, t) dx_i + g_0(x, t) dt = 0$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Vínculos desse tipo são chamados de *semi-holonômicos* e são integráveis se existirem funções  $h(x, t)$  e  $f(x, t)$  tal que

$$dh = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial h}{\partial t} dt = f(x, t) \left[ \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i + g_0(x, t) dt \right] = 0.$$

$f(x, t)$  é chamada de *função integrante*. Nesse caso  $fg_i = \partial h / \partial x_i$  e a seguinte propriedade é satisfeita pelas funções  $g_i$ :

$$\frac{\partial(fg_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(fg_j)}{\partial x_i}.$$

Essa é uma condição necessária e suficiente para que o vínculo seja identificado como holonômico e possa ser integrado.

Vínculos semi-holonômicos podem também ser escritos como

$$\sum_{i=1}^n g_i(x, t) \dot{x}_i + g_0(x, t) = 0$$

e representam vínculos entre posições e velocidades. Para cada vínculo, uma velocidade pode ser escrita em termos das outras variáveis. Podemos então nos perguntar como esses vínculos afetam o número de graus de liberdade do sistema. Para  $N$  partículas em 3 dimensões e  $k$  vínculos holonômicos definimos  $n = 3N - k$  como o número de graus de liberdade. Adicionando  $m$  vínculos semi-holonômicos vamos definir o número de graus de liberdade como  $n_g = 3N - k - m/2$ , que corresponde à metade do número de condições

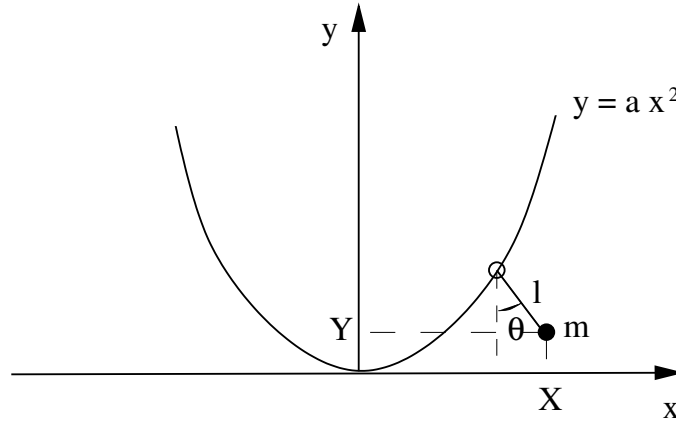


Figura 2.5: Pêndulo com ponto de suspensão sobre parábola.

iniciais necessárias para resolver o problema. Se  $m = 0$  temos  $n = 3N - k$  coordenadas generalizadas e precisamos de  $2n$  condições iniciais; metade disso é  $n$ . Se, além disso, temos  $m$  vínculos semi-holonômicos, eliminamos uma velocidade para cada um deles precisamos apenas de  $2n - m$  condições iniciais. Metade disso é  $n - m/2$ . Veja os problemas 11 e 12 no final do capítulo.

**Exemplo 2.3.6** Considere um pêndulo cujo ponto de suspensão desliza sem atrito sobre uma parábola  $y = ax^2$  como ilustrado na figura 2.5. As coordenadas do ponto de apoio são  $x$  e  $y$ , as da massa são  $X$  e  $Y$  e  $\theta$  é o ângulo que o fio do pêndulo faz com a vertical. O sistema tem dois graus de liberdade e as coordenadas generalizadas podem ser escolhidas como  $x$  e  $\theta$ . As equações que conectam a posição da partícula com  $x$  e  $\theta$  são:

$$\begin{aligned} X &= x + l \sin \theta & \dot{X} &= \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta \\ Y &= ax^2 - l \cos \theta & \dot{Y} &= 2ax\dot{x} + l\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

A lagrangiana é

$$L = \frac{m}{2}[(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (2ax\dot{x} + l\dot{\theta} \sin \theta)^2] - mg(ax^2 - l \cos \theta).$$

Fica como exercício escrever as equações de movimento.

**Exemplo 2.3.7** - Um pêndulo é montado de tal forma que seu fio de comprimento  $L$  se curva sobre um anel de raio  $R$ , oscilando sob a ação da gravidade,

como ilustrado na figura 2.6. O ponto onde o fio perde contato com o anel forma um ângulo reto com a direção radial e a parte livre do fio tem comprimento  $L - \alpha R = L - (\pi/2 - \theta)R$ . O sistema tem um único grau de liberdade que escolhemos como  $\theta$ . As coordenadas da massa  $m$  são dadas por:

$$\begin{aligned}x &= (R - R \sin \theta) + [L - (\pi/2 - \theta)R] \cos \theta \\y &= R \cos \theta + [L - (\pi/2 - \theta)R] \sin \theta.\end{aligned}$$

As velocidades ficam:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -R\dot{\theta} \cos \theta + R\dot{\theta} \cos \theta - [L - (\pi/2 - \theta)R]\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= -R\dot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta} \sin \theta + [L - (\pi/2 - \theta)R]\dot{\theta} \cos \theta.\end{aligned}$$

Finalmente as energias cinética e potencial são dadas por

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} [\dot{\theta}^2 (L - \pi R/2 + R\theta)^2]$$

$$V = -mgx = -mg \{ (R - R \sin \theta) + [L - (\pi/2 - \theta)R] \cos \theta \}.$$

Fica como exercício obter a equação de movimento.

## 2.4 Lagrangiana para a força de Lorentz

Mostraremos agora que a força de Lorentz, que um campo eletromagnético  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  exerce sobre uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$  no vácuo,

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (2.13)$$

pode ser colocada na forma (2.12). O primeiro passo para isso é escrever a força de Lorentz em termos dos potenciais vetor e escalar  $\mathbf{A}$  e  $\Phi$ .

Os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  no vácuo satisfazem às equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

A primeira dessas equações implica que podemos escrever o campo magnético em termos do potencial vetor como  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Substituindo na segunda equação e trocando a ordem das derivadas encontramos

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

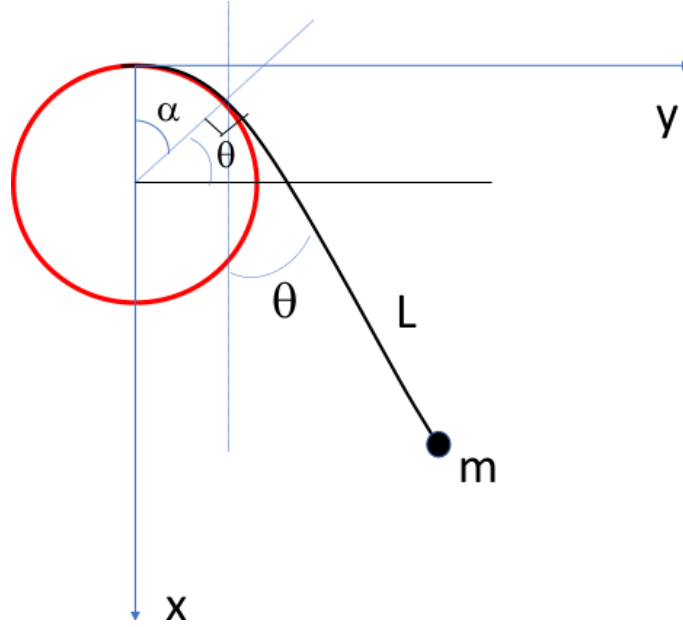


Figura 2.6: Pêndulo com ponto de suspensão sobre anel.

A função dentro do parêntesis pode então ser escrita como o gradiente de uma função, que escolhemos como  $-\nabla\Phi$ . Assim

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

e a força de Lorentz fica

$$\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]. \quad (2.14)$$

Para mostrar que  $\mathbf{F}$  pode de fato ser escrita na forma da equação (2.12) vamos manipular as componentes da força separadamente. Faremos o cálculo para a componente  $x$  apenas. O termo difícil de simplificar na expressão acima é o último. Escrevendo explicitamente o duplo produto vetorial temos

$$\begin{aligned} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_x &= v_y(\nabla \times \mathbf{A})_z - v_z(\nabla \times \mathbf{A})_y \\ &= v_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ &= v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \left( v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

onde somamos e subtraímos os dois últimos termos da segunda linha. Parte dessa expressão pode agora ser reconhecida como a derivada total de  $A_x$  em relação ao tempo. De fato temos

$$\begin{aligned}\frac{dA_x}{dt} &= \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_x &= v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{dA_x}{dt}.\end{aligned}$$

Note que a derivada parcial só atua em  $A_x$ , pois  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  são todas consideradas variáveis independentes.

Usando essa expressão podemos escrever a componente  $x$  de (2.14) como

$$\begin{aligned}F_x &= q \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} \right] \\ &= q \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} \right].\end{aligned}$$

O primeiro termo já está na forma desejada com  $U = q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$ . Falta apenas mostrar que o último termo pode ser substituído por  $d/dt(\partial U/\partial v_x)$ . De fato, usando a independência das coordenadas e velocidades nas derivadas parciais temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial (-v_x A_x)}{\partial v_x} = -\frac{dA_x}{dt}.$$

Dessa forma obtemos

$$F_x = \left[ -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x} \right]$$

onde

$$U = q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

e

$$L = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - q\Phi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad (2.15)$$

## 2.5 Exercícios

1. Considere o sistema mecânico descrito pela figura 2.7 onde um corpo de massa  $m$  oscila no plano  $x - y$  preso por um fio inextensível de comprimento total  $f$ . O fio passa por uma roldana ideal, estende-se horizontalmente por uma distância  $a$  e desce verticalmente passando por outra roldana. Na outra extremidade do fio está preso um segundo corpo de massa  $M$  que só pode se mover verticalmente.
  - (a) Quantos graus de liberdade tem o sistema?
  - (b) Obtenha expressões para os deslocamentos virtuais  $\delta \vec{r}_1$  e  $\delta \vec{r}_2$  dos corpos de massas  $m$  e  $M$ .
  - (c) Calcule as forças generalizadas e encontre as condições para haver equilíbrio.
  - (d) Escreva as equações de movimento.

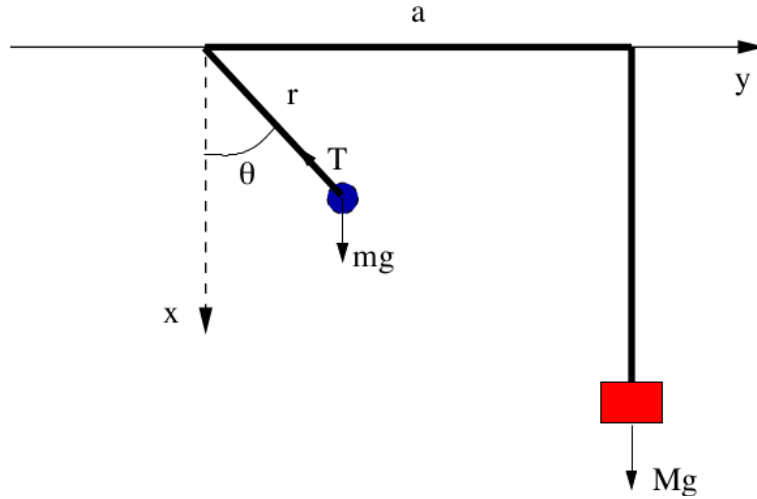


Figura 2.7: Pêndulo de comprimento variável preso à outra massa que oscila verticalmente.

2. O pêndulo ilustrado na figura 2.8 consiste de um corpo de massa  $m$  preso por um fio inextensível no qual existe uma mola de constante elástica  $k$ . Escreva a lagrangiana do sistema usando como coordenadas generalizadas o ângulo  $\theta$  e o comprimento  $r$  medido a partir do ponto de repouso da mola. Escreva as equações de movimento.



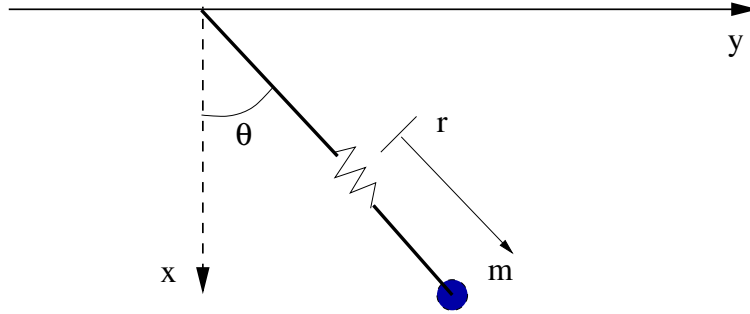


Figura 2.8: Pêndulo com mola.

3. Considere um pêndulo plano onde um corpo de massa  $m$  é preso por um fio inextensível de comprimento  $a$ . Orientando o eixo  $y$  para a direita e o eixo  $x$  para baixo, suponha que o ponto de apoio, na extremidade oposta ao corpo, está conectado a um motor e se move horizontalmente segundo a equação  $b \sin(\omega t)$  onde  $b < a$ . Encontre a lagrangiana e escreva a equação de movimento do corpo.
4. Em relação ao problema anterior, suponha que o ponto de apoio se move verticalmente segundo a equação  $b \sin(\omega t)$ . Encontre a lagrangiana e a equação de movimento do corpo.
5. Considere um pêndulo plano com um corpo de massa  $m$ . O fio que sustenta o corpo passa por uma roldana e é conectado a um motor que faz com que seu comprimento varie de acordo com a expressão  $a = a_0 + b \sin(\omega t)$ , com  $b < a_0$ . Encontre a lagrangiana e a equação de movimento do corpo.
6. Um pêndulo é montado sobre um trem que se move com aceleração  $\alpha$  constante. Escreva a lagrangiana do pêndulo e obtenha a equação de movimento supondo que o trem parte do repouso em  $t = 0$ . Encontre as posições de equilíbrio (veja o comentário no final da seção 2.2). Mostre que esse problema é análogo ao exemplo 2.2.4 onde, além da força da gravidade, é aplicada uma segunda força igual a  $-m\alpha$  na direção do movimento do trem. Mesmo problema para um oscilador harmônico montado no trem.
7. Um anel de raio  $R$  é montado na posição vertical de forma a poder rodar em torno de um eixo também vertical que passa pelo seu ponto

de apoio e pelo seu centro. No anel é colocada uma conta de massa  $m$  que pode deslizar sem atrito. Suponha que o anel seja colocado em rotação com velocidade angular constante  $\Omega$ .

- (a) Escreva as equações de vínculo e encontre o número de graus de liberdade do sistema.
- (b) Descreva a posição da conta utilizando coordenadas esféricas com origem no centro do anel.
- (c) Escreva a lagrangiana.
- (d) Escreva as equações de movimento.
- (e) Mostre que se  $\Omega > \sqrt{g/R}$  existem três pontos de equilíbrio da conta. Encontre esses pontos e estude sua estabilidade em função de  $\Omega$ .

8. Considere um pêndulo esférico, isto é, uma massa  $m$  presa à um fio inextensível e de massa desprezível que pode oscilar por todo o espaço, não apenas em um plano. Escreva a lagrangiana e as equações de movimento. Mostre que existe uma solução de movimento circular, onde  $\theta$  é constante, e encontre o período desse movimento.

9. Considere coordenadas  $u$  e  $v$  definidas em termos das coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  por

$$\begin{aligned} u &= \ln(r/a) - \theta \cot \xi \\ v &= \ln(r/a) + \theta \tan \xi \end{aligned}$$

onde  $a$  e  $\xi$  são constantes positivas. Encontre a energia cinética de uma partícula massa  $m$  em termos de  $u$ ,  $v$ ,  $\dot{u}$  e  $\dot{v}$ . Encontre expressões para as forças generalizadas  $Q_u$  e  $Q_v$  em termos das componentes  $F_r$  e  $F_\theta$  [4].

10. Duas massas  $m_1$  e  $m_2$  estão suspensas por um fio de comprimento  $L_1$  que passa por uma polia. Outras duas massas  $m_3$  e  $m_4$  estão suspensas por outro um fio de comprimento  $L_2$  passando por outra polia. Essas duas polias estão conectadas por um fio de comprimento  $L_3$  através de uma terceira polia fixa. Quantos graus de liberdade tem o sistema? Escreva a lagrangiana e as equações de movimento. Calcule as acelerações. Despreze a massa das polias e dos fios, assim como as forças de atrito.

11. Obtenha as equações de vínculo para um disco rolando sem deslizar em um plano. Essas equações são um caso especial de vínculos diferenciais da forma

$$\sum_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i = 0.$$

Mostre que nesse caso não existe uma função  $f(x)$  tal que

$$\frac{\partial(fg_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(fg_j)}{\partial x_i}$$

para todo  $i, j$  e que, portanto, os vínculos são não-holonômicos. Veja o exemplo 3.4.3 do próximo capítulo.

12. Duas rodas de raio  $a$  são montadas nas pontas de um eixo de tamanho  $b$  de forma que elas possam girar de forma independente (fig. 2.9). O sistema rola sem deslizar sobre um plano. Sejam  $x$  e  $y$  as coordenadas do ponto médio do eixo (projetadas no plano),  $\phi$  e  $\phi'$  ângulos de referência sobre cada roda e  $\theta$  o ângulo que a direção do eixo faz com o eixo  $x$ . Mostre que o sistema tem dois vínculos não-holonômicos dados por

$$\begin{aligned}\cos \theta dx + \sin \theta dy &= 0 \\ \sin \theta dx - \cos \theta dy &= \frac{a}{2}(d\phi + d\phi')\end{aligned}$$

e um vínculo holonômico

$$\theta = C - \frac{a}{b}(\phi - \phi')$$

onde  $C$  é uma constante.

13. Sejam  $q_1, q_2, \dots, q_n$  um conjunto independente de coordenadas generalizadas. Considere agora uma transformação para um novo conjunto de coordenadas independentes dadas por  $s_i = s_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Mostre que as equações de Lagrange são invariantes por esse tipo de transformação, i.e., mostre que nas novas variáveis obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_k} = 0$$

14. Considere um pêndulo duplo plano onde a primeira partícula tem massa  $m_1$  e carga elétrica  $q_1$  e está presa por uma barra de massa desprezível

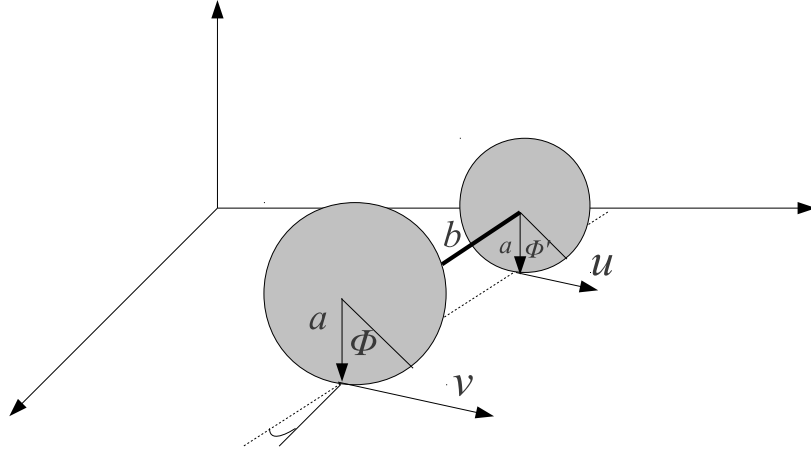


Figura 2.9: Duas rodas de raio  $a$  são montadas nas pontas de um eixo de tamanho  $b$ .

de comprimento  $l_1$ . A segunda partícula tem massa  $m_2$  e carga elétrica  $q_2$  e está suspensa por outra barra sem massa de comprimento  $l_2$  presa à primeira partícula. No sistema atua, além da força da gravidade, um campo elétrico constante de intensidade  $E_0$  na direção horizontal.

- (a) Quantos graus de liberdade tem o sistema? Escreva explicitamente as equações de vínculo.
  - (b) Aplique o princípio de D'Alembert para encontrar a posição de equilíbrio do sistema.
  - (c) Escreva a lagrangiana e as equações de movimento.
15. Suponha que a função potencial  $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  seja tal que a força sobre cada partícula do sistema possa ser escrita como

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right).$$

Mostre que em termos de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  onde

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

as forças generalizadas vão ser dadas por

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

16. A lagrangiana de um sistema com  $n$  graus de liberdade é dada por

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(q) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu$$

onde a matriz  $g$  é simétrica e usamos a convenção de soma sobre índices repetidos. Assumindo que  $\det(g) \neq 0$  e que a inversa de  $g$  exista, de tal forma que  $g^{\mu\nu} g_{\nu\tau} = \delta_\tau^\mu$ , mostre que as equações de Lagrange levam à

$$\ddot{q}^\mu + \Gamma_{\nu\tau}^\mu \dot{q}^\nu \dot{q}^\tau = 0$$

onde

$$\Gamma_{\nu\tau}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\xi} \left( \frac{\partial g_{\nu\xi}}{\partial q^\tau} + \frac{\partial g_{\tau\xi}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\tau}}{\partial q^\xi} \right)$$

são conhecidos como símbolos de Christoffel.

17. Escreva a Lagrangeana e calcule os símbolos de Christoffel definidos no problema anterior para o caso de um pêndulo duplo montado sobre uma mesa horizontal sem atrito, i.e., sem a ação da força de gravidade.



# Capítulo 3

## Princípios Variacionais

A idéia de descrever o movimento a partir de um princípio de mínimo é bastante antiga. O primeiro desses princípios de que se tem notícia é o de Heros de Alexandria, que viveu aproximadamente entre os anos 10 e 70 DC,<sup>1</sup> que postulou que ‘raios de luz’ se propagavam em linha reta quando restritos a um meio homogêneo. Temos aqui um princípio de menor caminho entre dois pontos. O fato de raios de luz mudarem de direção quando passam de um meio a outro (refração) já era conhecido nessa época, mas só foi formulado matematicamente de modo empírico pelo holandês Willebrord van Roijen Snell (1591-1626) em 1621 e pelo matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665) em 1650, na forma de outro princípio de mínimo, mais geral que aquele enunciado por Heros. Embora nosso foco principal seja a Mecânica, vale a pena começar este capítulo com algumas considerações sobre o Princípio de Fermat.

### 3.1 O princípio de Fermat

Sabemos que luz é radiação eletromagnética, que pode se comportar como raios, ondas ou partículas (fótons). Quando a luz se comporta como raios estamos no chamado *limite da óptica geométrica*, quando  $\lambda \ll L$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz (da ordem de  $10^{-7}$  m para a luz visível) e  $L$  a dimensão típica do aparato de medida utilizado [9, 10].

---

<sup>1</sup>Uma ótima abordagem histórica e conceitual pode ser obtida no livro *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, de W. Yourgrau e S. Mandelstam [7]. Outra referencia interessante é *The Variational Principles of Mechanics*, de L. Lanczos [8].

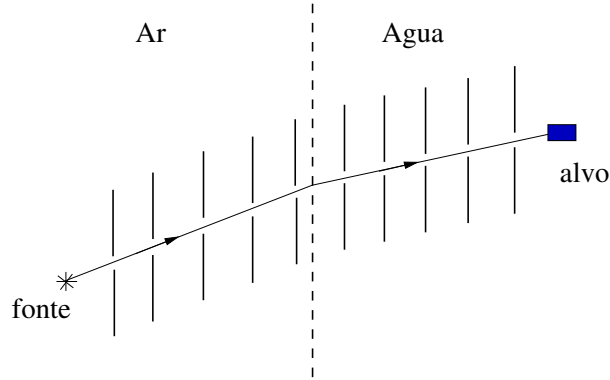


Figura 3.1: Trajetória de um raio de luz ao mudar de meio.

A figura 3.1 ilustra a determinação do caminho percorrido pela luz desde uma fonte até o alvo, mudando de meio durante o percurso. Coloca-se primeiramente um anteparo na frente do alvo de forma a deixar passar apenas a luz que o atinge. O orifício no anteparo deve ter tamanho  $L \gg \lambda$ , caso contrário ocorrerá difração e não será possível a descrição da luz por meio de raios. Atrás desse primeiro anteparo colocamos um segundo anteparo que, mais uma vez, deixa passar apenas a luz que atinge o alvo, e assim sucessivamente até a fonte. Vemos que os orifícios em cada meio se alinham, mas que há uma mudança de direção na passagem entre os meios.

Em 1650 Fermat enunciou um princípio que permitia a determinação do caminho da luz nessa situação: “O caminho percorrido pela luz em qualquer combinação de meios, com quaisquer índices de refração, é tal que o tempo de percurso é um extremo, mínimo ou máximo”.

Quando uma função  $f(x)$  tem um ponto de extremo em  $x_0$  então  $df(x_0)/dx = 0$ . Isso implica que, para pontos  $x = x_0 + \delta x$  próximos de  $x_0$ , o valor de  $f(x)$  é aproximadamente igual à  $f(x_0)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} \delta x^2 \\ &= f(x_0) + \mathcal{O}(\delta x^2). \end{aligned}$$

ou seja,

$$\delta f \equiv f(x) - f(x_0) \approx 0$$

i.e., a *variação de  $f(x)$*  é nula em primeira ordem nas vizinhanças do ponto  $x_0$ .



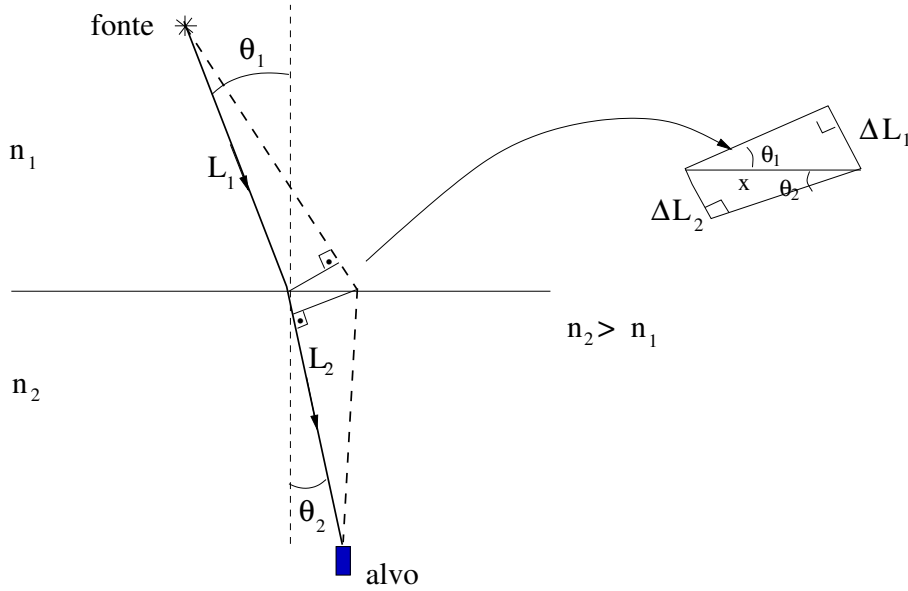


Figura 3.2: Minimização do tempo de percurso.

Vamos mostrar que a aplicação do princípio de Fermat para a refração leva à lei de Snell. A figura 3.2 mostra o caminho do raio de luz que vai da fonte, onde o índice de refração é  $n_1$  ao alvo, onde o índice é  $n_2$ . O comprimento dos caminhos em cada meio é  $L_1$  e  $L_2$  respectivamente e os ângulos que esses raios fazem com a perpendicular à superfície que separa os meios é  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . A figura mostra também um caminho vizinho àquele percorrido pela luz. A idéia é impor que o tempo gasto no percurso do caminho correto e no caminho vizinho sejam iguais.

O tempo de percurso no caminho correto (linha grossa) é

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2}$$

onde  $v_1 = c/n_1$  e  $v_2 = c/n_2$  são as velocidades da luz nos respectivos meios e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. O caminho vizinho é um pouco mais longo no meio 1 e um pouco mais curto no meio 2, e o tempo de percurso sobre ele é (veja a ampliação da região próxima à superfície na figura)

$$\tau' = \frac{L_1 + \Delta L_1}{v_1} + \frac{L_2 - \Delta L_2}{v_2} = \tau + \frac{\Delta L_1}{v_1} - \frac{\Delta L_2}{v_2}.$$

Para que  $\delta\tau = \tau' - \tau = 0$  devemos ter  $\Delta L_1/v_1 = \Delta L_2/v_2$ . Como  $\Delta L_1 = x \sin \theta_1$ ,  $\Delta L_2 = x \sin \theta_2$  e  $v_i = c/n_i$  ( $x$  é a diagonal do paralelogramo – veja a figura) então

$$\frac{x \sin \theta_1}{c/n_1} = \frac{x \sin \theta_2}{c/n_2}$$

ou

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

que é a famosa Lei de Snell.

## 3.2 O método variacional de Euler-Lagrange

Na mecânica o primeiro princípio variacional foi aparentemente proposto pelo filósofo francês Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) em 1744. Leonhard Euler (1707-1783) o reformulou logo em seguida e, um pouco mais tarde Joseph Louis Lagrange (1736-1813) desenvolveu o cálculo de variações por volta de 1760. No entanto, foi apenas William Rowan Hamilton (1805-1865) que o modificou para sua forma atual, introduzindo a função lagrangiana  $L = T - V$ . Nesta seção vamos introduzir o cálculo de variações de forma abstrata e aplicá-lo à mecânica na próxima seção apenas.

O cálculo de variações se propõe a encontrar certas curvas que tornem extremo (mínimo, máximo ou ponto de sela) um determinado *funcional*. Seja  $y = y(x)$  uma curva suave com condições de contorno  $y(x_1) = y_1$  e  $y(x_2) = y_2$  fixas. Denotaremos  $y' = dy/dx$ . Considere agora o funcional

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$$

onde  $f$  é uma função suave arbitrária. A pergunta que queremos responder é: dada  $f$ , qual a curva  $y(x)$ , com condições de contorno fixas, que produz o menor valor possível da integral  $J$ ? O cálculo de variações na verdade encontra curvas que extremizam  $J$ . O tipo de extremo obtido, se máximo, mínimo ou ponto de sela, deve ser verificado a posteriori. A curva que extremiza o valor de  $J$  é dita *estacionária*, pois o valor de  $J$  é fixo (em primeira ordem) para curvas vizinhas. O problema de raios de luz que discutimos na seção anterior se encaixa nesse esquema: as condições de contorno são fixadas pelas posições da fonte e do alvo e  $f dx = dt = v ds = [c/n(y)] ds$  onde  $ds$  é um elemento de caminho. Para cada caminho  $y(x)$  calculamos o tempo de percurso e buscamos o caminho que o extremize.

Para resolver esse problema procedemos de forma análoga ao exemplo do raio de luz da seção anterior. Seja  $y = y(x)$  a solução procurada. Vamos construir uma família de curvas vizinhas à  $y(x)$  e impor que a variação de  $J$  seja nula quando calculada para essas curvas. Seja então

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$$

e

$$y'(x, \alpha) = y'(x) + \alpha\eta'(x)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro pequeno, que faremos tender à zero, e  $\eta(x)$  é uma função suave arbitrária com  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Como isso garantimos que  $y(x, \alpha)$  satisfaça as condições de contorno para todo  $\alpha$ . A figura 3.3 ilustra a curva estacionária procurada e uma curva da família vizinha. Podemos ainda reescrever essas equações na forma

$$y(x, \alpha) - y(x) = \eta(x)\alpha \equiv \delta y(x)$$

e

$$y'(x, \alpha) - y'(x) = \eta'(x)\alpha \equiv \delta y'(x).$$

Note que a função  $\delta y(x)$  é definida para  $x$  fixo e pode ser considerada um deslocamento virtual no mesmo sentido de D'Alembert.

Vamos então considerar o funcional

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x) dx.$$

Expandindo  $J(\alpha)$  em primeira ordem em torno de  $\alpha = 0$  obtemos

$$J(\alpha) = J(0) + \left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha$$

ou ainda

$$\delta J = J(\alpha) - J(0) = \left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha \equiv 0.$$

Impomos então que  $\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$  e, ao mesmo tempo, impomos que essa condição deva ser satisfeita por qualquer curva  $\eta(x)$  com  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ .

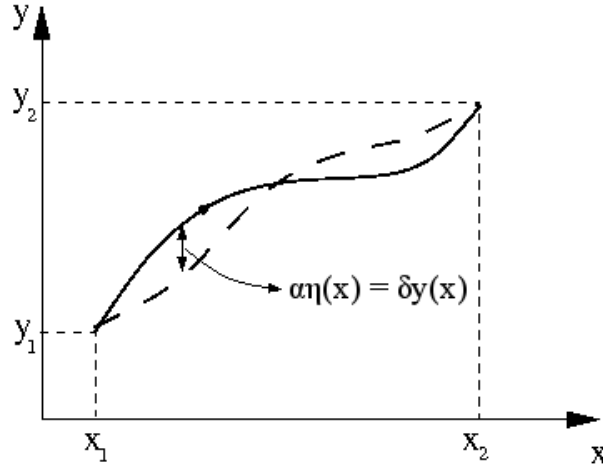


Figura 3.3: Curva estacionária (contínua) e curva vizinha (tracejada). O deslocamento  $\delta y(x)$  é definido para  $x$  fixo e pode ser considerado virtual, no mesmo sentido de D'Alembert.

Calculando a derivada em relação à  $\alpha$  obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{dJ}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right] dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right] dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde fizemos uma integração por partes no segundo termo. Como  $\partial y / \partial \alpha = \eta(x)$  e  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  obtemos

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx$$

ou ainda, multiplicando por  $\alpha$  dos dois lados,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y(x) dx. \tag{3.2}$$

Como  $dJ/d\alpha$  deve ser zero sobre a curva estacionária, em  $\alpha = 0$ , para toda função suave  $\eta(x)$ , a curva procurada deve satisfazer à equação

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.3)$$

que é conhecida como Equação de Euler, publicada em 1744. Para uma derivação mais rigorosa dessa equação e do cálculo de variações em geral, veja L. Elsgolts, *Differential Equations and the Calculus of Variations*, Mir Publishers. A importância dessa equação na matemática e na física é enorme, pois vários problemas podem ser colocados na forma de uma equação de extremo.

A extensão do cálculo de variações para funcionais com vários graus de liberdade é imediata. Se  $f = f(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, x)$  definimos a família de curvas vizinhas por

$$y_k(x, \alpha) = y_k(x) + \alpha \eta_k(x), \quad k = 1, \dots, n$$

onde as curvas  $\eta_k$  são independentes e satisfazem  $\eta_k(x_1) = \eta_k(x_2) = 0$ . A derivada  $dJ/d\alpha$  nesse caso resulta

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_k} \right) \right] \eta_k(x) dx. \quad (3.4)$$

Para que essa derivada se anule para quaisquer funções  $\eta_k$  devemos ter

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_k} \right) = 0 \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

A semelhança dessa equação com a equação de Lagrange (2.10) é óbvia, o que indica que o movimento de corpos previstos pela segunda lei de Newton deve também extremizar alguma quantidade. Essa quantidade, denominada *ação*, tem uma importância fundamental na física e será discutida de vários pontos de vista durante esse curso. Antes de voltar à mecânica, vamos ver três exemplos clássicos de aplicação da equação de Euler.

Como um primeiro exemplo simples, vamos encontrar o caminho de menor distância entre dois pontos do plano. Sejam  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  as coordenadas dos dois pontos e uma curva suave  $y(x)$  qualquer ligando esses pontos. O elemento de distância ao longo dessa curva é

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{y'^2 + 1} dx$$

de forma que o comprimento da curva entre os pontos é

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{y'^2 + 1} \, dx.$$

A curva que minimiza a distância entre os pontos deve então satisfazer a equação de Euler com  $f(y, y', x) = \sqrt{y'^2 + 1}$ . Como  $\partial f / \partial y = 0$ ,  $\partial f / \partial y' = c = \text{constante}$ . Portanto a equação de Euler fica

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = c$$

ou  $y' = a = \text{constante}$  e  $y(x) = ax + b$ , que é a linha reta. As constante  $a$  e  $b$  devem ser encontradas de tal forma que  $y(x_1) = y_1$  e  $y(x_2) = y_2$ .

Os próximos dois exemplos tem soluções um pouco mais longas e vamos tratá-los nas subseções seguintes.

### 3.2.1 A catenóide

Neste exemplo procuramos a superfície de revolução de mínima área. Considere novamente dois pontos no plano  $x - y$  com coordenadas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  e uma curva suave  $y(x)$  qualquer ligando esses pontos. Ao rodar essa curva em torno do eixo  $y$  criamos uma superfície, chamada de superfície de revolução, ilustrada na figura 3.4. Qual a forma da curva que produz a superfície com a menor área possível? Cada elemento  $ds$  da curva, centrado no ponto  $(x, y(x))$ , ao ser rodado gera um pequeno anel de raio  $x$  e área  $dA = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{y'^2 + 1} dx$ . A área total gerada pela curva é

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{y'^2 + 1} \, dx.$$

Agora temos  $f(y, y', x) = x \sqrt{y'^2 + 1}$  e novamente  $\partial f / \partial y = 0$ . A equação de Euler fica

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{xy'}{\sqrt{y'^2 + 1}} \right) = 0$$

ou

$$\frac{xy'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = a.$$

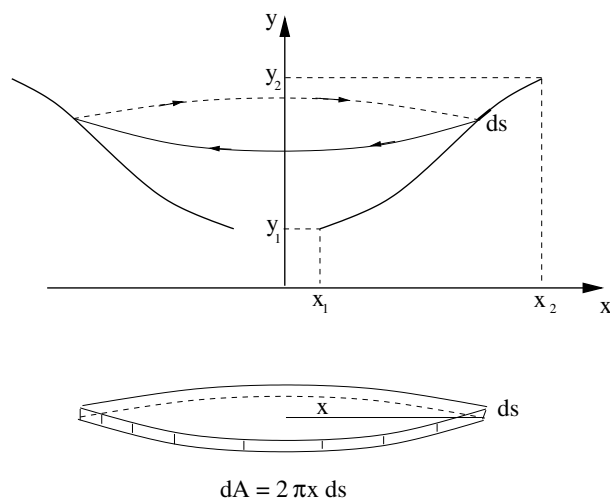


Figura 3.4: Superfície de revolução gerada por rotação de uma curva. A área gerada por cada elemento da curva é  $dA = 2\pi x \, ds$ .

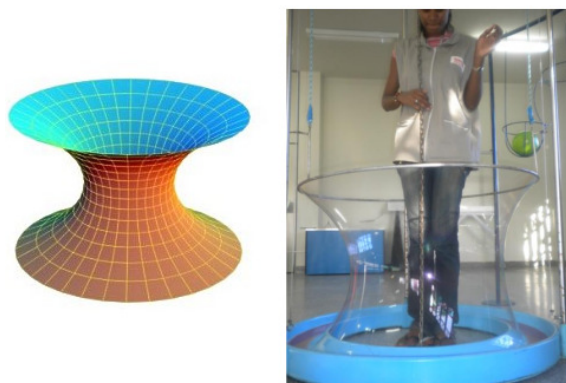


Figura 3.5: A catenóide, gerada pela rotação do cosseno hiperbólico (esquerda) e uma bolha gigante mostrando a superfície (direita, foto: *SANTOS, Obed Alves. CCTECA de Aracaju. 2010. color.*).

Elevando os dois lados ao quadrado e isolando  $y'$  obtemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

ou

$$y = \int \frac{a \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b.$$

A integral pode ser feita facilmente com a mudança de variáveis  $x = a \cosh u$  e resulta  $y = au + b =$  ou

$$x = a \cosh \left( \frac{y - b}{a} \right)$$

que é conhecida como *catenária*. A superfície gerada é a catenóide, mostrada no lado esquerdo da figura 3.5. Essa superfície aparece, por exemplo, quando uma bolha de sabão é formada entre dois anéis circulares paralelos, de raios arbitrários, minimizando a tensão superficial, como mostrado no lado esquerdo da figura 3.5.

### 3.2.2 A braquistócrona

O problema aqui é encontrar a curva ligando dois pontos a alturas diferentes de tal forma que uma partícula partindo do repouso do ponto mais alto atinja o ponto mais baixo no menor tempo possível, deslizando pela curva sob a ação da gravidade e sem atrito [10]. O ponto 1, mais alto, é escolhido na origem, conforme ilustra a figura 3.6. O problema foi proposto e solucionado em 1697 pelo matemático suíço Johann Bernoulli (1667-1748). O problema é interessante pelo fato de combinar o problema variacional com a conservação de energia. De fato, usando

$$E = mv^2/2 - mgy$$

e o fato de  $v(0) = y(0) = 0$  vemos que a energia da partícula é nula. Como  $E = 0$ ,  $v = \sqrt{2gy}$  e o tempo de percurso, que é a quantidade que queremos minimizar, pode ser escrito como

$$t = \int_0^t dt' = \int_0^L \frac{ds}{v} = \int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$



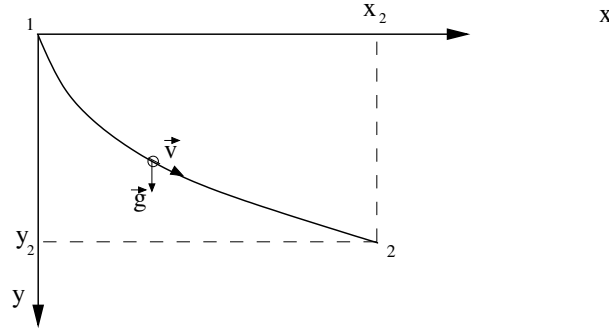


Figura 3.6: O problema da braquistócrona.

O funcional que teremos que usar na equação de Euler é agora mais complicado, dado por

$$f(y, y', x) = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}.$$

As derivadas que precisamos são:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2y} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y''}{\sqrt{2gy} (1 + y'^2)^{3/2}} - \frac{y'^2}{2y \sqrt{2gy(1 + y'^2)}}$$

onde a última derivada requer alguma simplificação. Substituindo na equação de Euler e multiplicando tudo por  $\sqrt{2gy} (1 + y'^2)^{3/2}$  obtemos

$$y'' - \frac{y'^2}{2y} (1 + y'^2) = -\frac{1}{2y} (1 + y'^2)^2$$

que pode ser colocada na forma

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = -\frac{1}{2y}.$$

A solução dessa equação segue da seguinte sequência de identidades e transformações:

$$\frac{1}{2y'} \frac{d}{dx} [\log(1 + y'^2)] = -\frac{1}{2y}$$

$$\frac{d}{dx} [\log(1 + y'^2)] = -\frac{d}{dx} \log y$$

$$\frac{d}{dx} [\log[(1 + y'^2)y]] = 0$$

$$y(1 + y'^2) = c = \text{constante}.$$

A solução desta última equação pode ser finalmente obtida em forma paramétrica. Escrevendo  $y' = \cot(s)$  a equação fornece

$$y = \frac{c}{1 + \cot^2(s)} = c \sin^2(s) = \frac{c}{2}(1 - \cos(2s)).$$

Usando agora  $dx = dy/y'$  e a forma  $y = c \sin^2(s)$  obtemos

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{y'} = \frac{2c \sin(s) \cos(s) ds}{\cot(s)} \\ &= 2c \sin^2(s) ds = c(1 - \cos(2s)) ds \end{aligned}$$

ou

$$\begin{cases} x(s) &= d + \frac{c}{2}(2s - \sin(2s)) \\ y(s) &= \frac{c}{2}(1 - \cos(2s)) \end{cases}.$$

Quando  $s = 0$ ,  $y = 0$  e, de acordo com nossa escolha do ponto inicial,  $x(0) = 0$  também. Isso implica que  $d = 0$ . Chamando  $c = 2A$  e reparametrizando a curva por  $r = 2s$  encontramos

$$\begin{cases} x(r) &= A(r - \sin r) \\ y(r) &= A(1 - \cos r) \end{cases}.$$

Essa curva, que satisfaz a equação

$$[x(r) - Ar]^2 + [y(r) - A]^2 = A^2$$

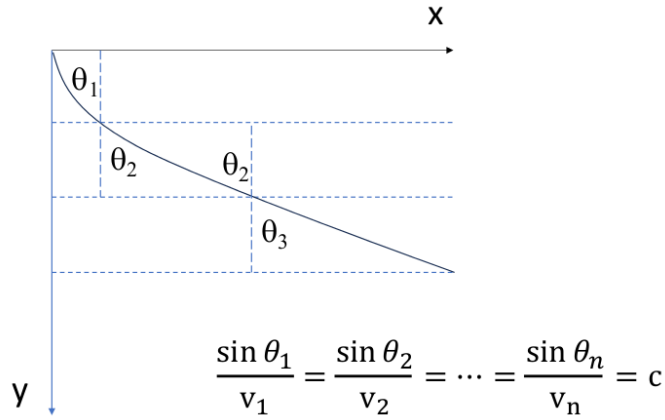


Figura 3.7: A braquistócrona e a lei de Snell

é conhecida como *ciclóide*, e é como um círculo cujo centro se desloca enquanto tentamos desenhá-lo. Usando novamente a conservação de energia na forma  $m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 = mgy$  é fácil mostrar que  $\dot{r} = \sqrt{g/A} \equiv \omega$  e, portanto,  $r = \omega t$ . Assim obtemos finalmente

$$\begin{cases} x(t) = \frac{g}{\omega^2}(\omega t - \sin \omega t) \\ y(t) = \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos \omega t). \end{cases}$$

A constante  $\omega$  é obtida impondo-se a passagem da curva pelo ponto  $(x_2, y_2)$ . As equações  $\omega^2 x_2 = g(\omega T - \sin(\omega T))$  e  $\omega^2 y_2 = g(1 - \cos(\omega T))$  devem ser resolvidas para calcular a constante  $\omega$  e o tempo total de percurso  $T$ .

**Exemplo 3.2.1** *A braquistócrona e a lei de Snell.* A equação da braquistócrona  $y(1 + y'^2) = c$  pode ser obtida diretamente a partir da lei de Snell. Para ver isso, dividimos a trajetória da partícula em pequenos segmentos retos, conforme ilustrado na figura 3.7. Cada segmento pode ser pensado como um meio onde a velocidade da partícula é  $v_n = \sqrt{2gy_n}$ . Ao mudar de meio vale  $\sin \theta_n / v_n = \sin \theta_{n+1} / v_{n+1}$ . Pela figura vemos que

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} = \frac{\sin \theta_3}{v_3} = \dots = \frac{\sin \theta_n}{v_n}.$$

Dessa forma concluímos que  $\sin \theta / v$  deve ser constante. Além disso,  $\tan \theta_n = \Delta x_n / \Delta y_n$ , ou  $\tan \theta = 1/y'$  o que leva à  $\sin \theta = 1/\sqrt{1 + y'^2}$  e implica na

equação desejada.

### 3.3 O princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton foi inspirado por outro, publicado no mesmo ano de 1744 por Maupertuis. O princípio de ação mínima de Maupertuis dizia basicamente que *a quantidade de ação necessária para que qualquer mudança seja feita pela natureza é sempre a menor possível*. No caso de uma partícula, a *ação* foi definida por Maupertuis como a integral de  $mv^2$ , isto é, o dobro da energia cinética da partícula. Maupertuis ficou fascinado com sua descoberta e atribuiu um caráter religioso ao princípio, como mostra a seguinte afirmação [7]:

*With the laws of movement thus deduced, being found to be precisely the same as those observed in nature, we can admire the application of it to all phenomena, in the movement of animals, in the vegetation of plants, in the revolution of the heavenly bodies: and the spectacle of the universe becomes so much the grander, so much the more beautiful, so much more worthy of its Author... . These laws, so beautiful and so simple, are perhaps the only ones which the Creator and Organizer of things has established in matter in order to effect all the phenomena of the visible world ...*

Hamilton modificou o princípio de Maupertuis definindo a ação como a integral da lagrangiana:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (3.6)$$

A ação proposta inicialmente por Maupertuis é hoje conhecida como *ação reduzida* e voltaremos a falar dela adiante.

Como vimos na seção anterior, a imposição de que a variação primeira de  $S$  seja nula leva naturalmente às equações de Lagrange na forma (2.10), como obtidas através do princípio de D'Alembert dos deslocamentos virtuais para forças conservativas. A aplicação do princípio de Hamilton requer, portanto, que as forças aplicadas sejam derivadas de uma função potencial e que os

vínculos sejam holonômicos. Repetimos as equações aqui por completeza:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (3.7)$$

O princípio de Hamilton diz que dentre todos os caminhos conectando as coordenadas iniciais  $q_k(t_1)$  às finais  $q_k(t_2)$ , aquele que de fato corresponde à trajetória do sistema é o que torna nula a primeira variação de  $S$ .

### 3.4 Multiplicadores de Lagrange

O método variacional de Euler-Lagrange-Hamilton pode ser estendido de forma a incluir vínculos escritos na forma diferencial

$$\sum_k a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0 \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (3.8)$$

onde os coeficientes  $a_{lk}$  e  $a_{lt}$  são funções de  $q_1, q_2, \dots, q_n$  e  $t$ . O índice  $l$  indica que podem haver várias equações desse tipo. Vínculos dessa forma podem representar tanto vínculos holonômicos quanto não-holonômicos (veja o exemplo 2.3.5 do capítulo 2). De fato, vínculos holonômicos da forma  $f_l(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$  levam à

$$df_l = \sum_k \frac{\partial f_l}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f_l}{\partial t} dt \equiv \sum_k a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0.$$

O princípio de Hamilton impõe que a trajetória do sistema  $q_k(t)$  é tal que a ação,  $\int L dt$ , é um extremo em relação a trajetórias vizinhas  $q_k(t) + \delta q_k(t)$ . Os deslocamentos  $\delta q_k(t)$  são virtuais, feitos com o tempo fixo, conforme ilustrado na figura 3.3. Em particular  $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$ . Assim, para que os vínculos sejam satisfeitos quando calculamos a ação para uma curva vizinha, devemos impor que [5, 8]

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0 \quad (3.9)$$

e que

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] \delta q_k dt = 0 \quad (3.10)$$

(compare com a equação (3.4)).

O conjunto de coordenadas  $q_k$  pode ser escolhido de várias formas. Se esse conjunto já satisfizer todos os vínculos automaticamente então todos os  $a_{lk}$  serão nulos, os  $q_k$  serão independentes e (3.10) implicará nas equações de Lagrange para cada uma das coordenadas. Esse é o caso do pêndulo, por exemplo, se escolhermos  $q = \theta$  (veja o exemplo 2.3.2 do capítulo 2). No entanto, podemos escolher inicialmente um conjunto maior de coordenadas, não independentes, que satisfaçam equações de vínculo. No caso do pêndulo, poderíamos escolher as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  e o vínculo  $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ , ou ainda  $x dx + y dy = 0$ , que está na forma (3.9). Nesse caso as equações (3.10) não implicarão em equações de Lagrange para  $x$  e  $y$ , pois  $dx$  e  $dy$  não são independentes. Teremos que combinar (3.10) e (3.9) para obter as equações corretas. O método dos multiplicadores de Lagrange faz exatamente isso. Note que, no caso de vínculos não holonômicos, essa é a única alternativa possível, pois as equações (3.8) não podem ser integradas para eliminarmos as coordenadas redundantes.

O truque para incorporarmos as equações de vínculo (3.9) no problema variacional é o seguinte: começamos introduzindo  $m$  variáveis auxiliares  $\lambda_l$ , uma para cada equação de vínculo, conhecidos como *multiplicadores de Lagrange* e re-escrevemos (3.9) como

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0.$$

Integrando dos dois lados no tempo e somando sobre  $l$  obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k,l} \lambda_l a_{lk} \delta q_k dt = 0.$$

Finalmente, como essa integral é nula, podemos subtraí-la da equação (3.10) para obter

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right] \delta q_k dt = 0.$$

Como existem  $m$  equações de vínculo, apenas  $n - m$  dos deslocamentos originais  $\delta q_k$  são independentes. Escolhemos esses como  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{n-m}$ . No entanto, os  $m$  valores dos  $\lambda_l$ 's podem ser escolhidos a vontade. Escolhemos

então os valores de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  de tal forma que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0$$

para  $k = n - m + 1, n - m + 2, \dots, n$ . Temos aqui  $m$  equações que resolvemos para os  $m$   $\lambda_l$ 's.

Com essa escolha a equação variacional acima pode ser reduzida para

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n-m} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right] \delta q_k dt = 0.$$

Note que a soma agora só vai de  $k = 1$  até  $n - m$  e só aparecem os  $\delta q_k$  correspondentes. Mas esses são independentes por escolha e, portanto,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0 \quad (3.11)$$

para  $k = 1, 2, \dots, n - m$ . Como escolhemos os  $\lambda_l$  de modo que a mesma equação fosse satisfeita para  $k = n - m + 1, n - m + 2, \dots, n$ , ela vale para todo  $k$ , de 1 a  $n$ !

Assim temos  $n$  equações para  $n + m$  variáveis: os  $n$   $q$ 's e os  $m$   $\lambda$ 's. As  $m$  equações restantes são as equações de vínculo (3.8). Dividindo-as por  $dt$  podemos reescrevê-las na forma de equações diferenciais

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} = 0$$

$$\text{ou} \quad (3.12)$$

$$f_l(q_1, \dots, q_n, t) = 0$$

para  $l = 1, 2, \dots, m$ , onde a segunda forma só é possível se os vínculos forem holonômicos. O conjunto de  $n + m$  equações (3.11) e (3.12) fecha o problema.

A interpretação dos multiplicadores de Lagrange pode ser percebida da seguinte forma: se removermos os vínculos e aplicarmos forças externas de forma a obter o mesmo movimento, então poderíamos usar as equações de Lagrange na forma (2.11):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

onde  $L$  contém as forças aplicadas, deriváveis de um potencial, e os  $Q_k$  seriam as forças generalizadas de vínculo. Comparando com (3.11) vemos que

$$Q_k = \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk}. \quad (3.13)$$

Assim o cálculo dos multiplicadores de Lagrange permite o cálculo das forças de vínculo, que tinham sido eliminadas do problema por D'Alembert e Hamilton.

**Exemplo 3.4.1** *O pêndulo simples em coordenadas polares.* Usando as variáveis  $r$  e  $\theta$  e a equação de vínculo  $r - a = 0$ , ou  $dr = 0$ , temos

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta.$$

As três incógnitas são  $r$ ,  $\theta$  e  $\lambda$  e os coeficientes da equação de vínculo são  $a_r = 1$ ,  $a_\theta = 0$ ,  $a_t = 0$ . As equações (3.11) e (3.12) ficam

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta - \lambda = 0$$

$$m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) + mgr \sin \theta = 0$$

$$r - a = 0.$$

Usando  $r = a$  vem que  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$  e obtemos

$$Q_r = \lambda = -ma\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta$$

$$a\ddot{\theta} = -g \sin \theta.$$

Vemos que  $Q_r$  é a tensão no fio. Compare essa solução com o exemplo 2.3.2 do capítulo anterior.

**Exemplo 3.4.2** *A barra girando* – figura 2.2 e exemplo 2.3.3. Em vez de usarmos apenas a coordenada generalizada  $r$ , usamos  $r$  e  $\theta$  e a equação de vínculo  $\theta = \omega t$ , ou  $d\theta - \omega dt = 0$ . Aqui temos  $a_r = 0$ ,  $a_\theta = 1$ ,  $a_t = -\omega$ . As equações (3.11) e (3.12) ficam

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = 0$$

$$m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) - \lambda = 0$$

$$\theta - \omega t = 0.$$



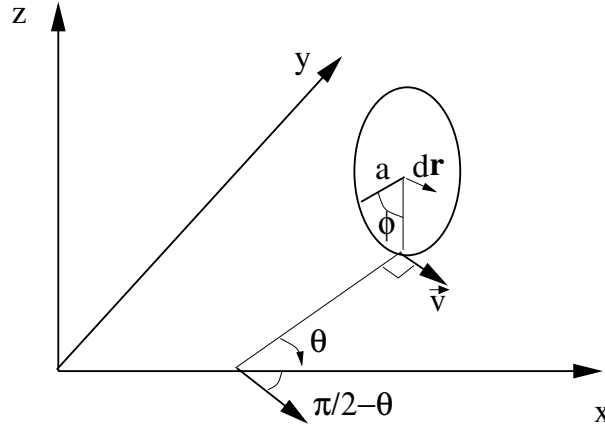


Figura 3.8: Disco rolando sem deslizar.

Substituindo  $\theta = \omega t$  nas outras encontramos

$$\ddot{r} = r\omega^2$$

$$Q_\theta = \lambda = 2m\omega r \dot{r}.$$

A primeira equação já foi resolvida no exemplo 2.3.3 e a segunda segue desta. Escolhendo  $v_0 = 0$

$$r(t) = r_0 \cosh(\omega t)$$

$$Q_\theta = \lambda = 2mr_0^2 \cosh(\omega t) \sinh(\omega t) \approx \frac{mr_0^2}{2} e^{2\omega t}.$$

**Exemplo 3.4.3** *Disco rolando sem deslizar.* Um disco de raio  $a$  e massa  $M$ , concentrada na sua borda como um aro, rola sem deslizar no plano  $x$ - $y$ , conforme ilustra a figura 3.8. Precisamos de 4 coordenadas para posicionar o sistema: as coordenadas  $(x, y)$  do centro do disco, a orientação do disco  $\theta$  em relação ao eixo  $x$  e outro ângulo  $\phi$  para dar a orientação do disco em relação ao seu próprio eixo. O vínculo é dado pelo módulo da velocidade do centro:  $v = -a\dot{\phi}$ . O sinal de menos indica que  $\mathbf{v}$  e  $\dot{\phi}$  tem direções contrárias (veja a figura). Como o vetor velocidade é sempre paralelo ao plano do disco suas componentes são:

$$\dot{x} = v \cos(\pi/2 - \theta) = v \sin \theta$$

$$\dot{y} = -v \sin(\pi/2 - \theta) = -v \cos \theta.$$

ou, como  $v = -a\dot{\phi}$ ,

$$dx + a \sin \theta d\phi = 0$$

$$dy - a \cos \theta d\phi = 0.$$

Temos então duas equações de vínculos não-holonômicos, como o leitor pode facilmente demonstrar. A lagrangiana é a própria energia cinética, dada por

$$L = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{Ma^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{Ma^2\dot{\theta}^2}{4},$$

onde os momentos de inércia do disco em relação ao eixo perpendicular a seu plano é  $Ma^2$  e em relação a um eixo paralelo a seu plano passando pelo centro é  $Ma^2/2$ . As quatro equações de Lagrange mais as duas equações de vínculo são:

$$M\ddot{x} - \lambda_1 = 0$$

$$M\ddot{y} - \lambda_2 = 0$$

$$Ma^2\ddot{\phi} - \lambda_1 a \sin \theta + \lambda_2 a \cos \theta = 0$$

$$Ma^2\ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{x} = -a\dot{\phi} \sin \theta$$

$$\dot{y} = a\dot{\phi} \cos \theta.$$

Embora a solução geral dessas equações seja difícil, podemos usar nossa intuição para encontrar pelo menos três soluções que representam movimentos simples.

1 - disco rodando em torno de seu eixo:  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $\phi = \phi_0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  e  $\theta = \theta_0 + \omega t$ .

2 - disco rolando na mesma direção:  $\theta = \theta_0$ ,  $\phi = \phi_0 + \beta t$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $x = x_0 - a\beta t \sin \theta_0$  e  $y = y_0 + a\beta t \cos \theta_0$ .

3 - disco descrevendo movimento circular:  $\theta = \omega t$ ,  $x = x_0 + R \cos(\omega t)$ ,  $y = y_0 + R \sin(\omega t)$ ,  $\phi = \phi_0 + R\omega t/a$ ,  $\lambda_1 = -MR\omega^2 \cos(\omega t)$ ,  $\lambda_2 = -MR\omega^2 \sin(\omega t)$ . Fazendo  $R = 0$  recuperamos a solução 1. Serão essas as únicas soluções possíveis?

Note que o torque do campo gravitacional não está sendo levado em consideração, o que faz com que o disco não se incline. Além disso, a energia

total é conservada. Quando esses ingredientes são adicionados ao problema várias complicações interessantes aparecem e ele recebe o nome de *Disco do Euler* [11].

**Exemplo 3.4.4** *Vínculos Holonômicos.* Caso as equações de vínculo possam ser escritas na forma  $f_l(q) = 0$ ,  $l = 1, 2, \dots, m$  com  $df_l = \sum_k a_{lk} dq_k = 0$  então o procedimento descrito acima pode ser simplificado. As equações de movimento (3.11) podem ser obtidas diretamente a partir da lagrangiana auxiliar

$$L' = L + \sum_{l=1}^m \lambda_l f_l(q). \quad (3.14)$$

Usando as propriedades que as  $f_l(q)$  dependem apenas das coordenadas (e não de suas velocidades) e que  $df_l/dq_k = a_{lk}$  o leitor pode verificar que as equações de Lagrange para  $L'$  coincidem com as equações (3.11).

**Exemplo 3.4.5** *Extremo de funções sujeitas à vínculos.* Queremos encontrar os extremos de uma função  $f(x)$ , onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sujeita aos vínculos  $g(x) = 0$  e  $h(x) = 0$ . Os vínculos tornam as variáveis  $x_k$  dependentes. Definimos então

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x) - \mu h(x)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são multiplicadores de Lagrange. Note que nos pontos  $x$  que satisfazem os vínculos  $F(x) = f(x)$ , pois nesses pontos  $g = h = 0$ . Temos que

$$\delta F(x) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k} - \mu \frac{\partial h}{\partial x_k} \right) \delta x_k.$$

Usamos agora o truque de Lagrange: encontramos  $\lambda$  e  $\mu$  impondo que a expressão no parêntesis seja nula para  $k = n-1$  e  $k = n$ . Com isso podemos reduzir a somatória para  $k = 1$  à  $k = n-2$ , e podemos tomar os  $x_k$  correspondentes como as variáveis independentes. Como elas são independentes, podemos impor que a expressão no parêntesis seja nula para  $k = 1, 2, \dots, n-2$ . Dessa forma, equações que dão os extremos de  $f$  sujeita aos vínculos são:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k} - \mu \frac{\partial h}{\partial x_k} = 0$$

para todo  $k$ , de 1 à  $n$ , junto com  $g(x) = h(x) = 0$ .

**Exemplo 3.4.5** *Maximização da entropia.* Podemos usar o exemplo anterior para maximizar a entropia

$$S = -k_B \sum_i \rho_i \ln \rho_i$$

sujeita aos vínculos  $\sum_i \rho_i = 1$  e  $\sum_i E_i \rho_i = E$ . Os valores  $\rho_i$  representam a probabilidade do sistema se encontrar com energia  $E_i$ . Definindo

$$S' = -k_B \sum_i \rho_i \ln \rho_i - \lambda (\sum_i \rho_i - 1) - \mu (\sum_i E_i \rho_i - E)$$

obtemos

$$\delta S' = \sum_i [-k_B \ln \rho_i - k_B - \lambda - \mu E_i] \delta \rho_i.$$

Impondo que  $-k_B \ln \rho_i - k_B - \lambda - \mu E_i = 0$  para todo  $i$  obtemos

$$\rho_i = e^{-1-\lambda/k_B-\mu E_i/k_B} = \rho_0 e^{-\beta E_i}$$

onde redefinimos as constantes. Usando as equações de vínculo é fácil mostrar que  $\rho_0 = Z^{-1}$ , onde  $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$  é a função de partição, e  $E = -\partial/\partial\beta \ln Z$ .

## 3.5 Coordenadas cíclicas e leis de conservação

Para lagrangianas do tipo

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$$

a derivada em relação à velocidade que aparece nas equações de Lagrange tem um significado simples:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m \dot{x}_k$$

é o momento da  $k$ -ésima partícula na direção  $x$ . É natural então definirmos o *momento generalizado*

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (3.15)$$

conjugado à coordenada generalizada  $q_k$ .

Um exemplo importante e não trivial aparece já com a lagrangiana de uma partícula sujeita a campos eletromagnéticos externos. Para

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\Phi + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$$

obtemos  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}$ , que tem uma parte mecânica e uma parte devido ao campo.

Suponha que a lagrangiana de um sistema com  $n$  graus de liberdade seja tal que a coordenada  $q_k$  não apareça explicitamente em  $L$ . Nesse caso temos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \equiv \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

A variável  $q_k$  é dita **cíclica** e seu momento conjugado  $p_k$  é uma constante do movimento.

Em geral, leis de conservação estão associadas à simetrias do sistema. De fato, se a lagrangiana é independente de uma coordenada  $q_k$ , podemos deslocar o sistema na direção de  $q_k$  que as equações de movimento não vão se alterar. Assim, a conservação do momento linear está associada à simetria de translação; a conservação do momento angular à simetria de rotação; a conservação de energia à translação temporal.

### 3.5.1 Conservação dos momentos linear e angular

Vamos ilustrar as conservações de momento linear e angular com um sistema de apenas duas partículas onde

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

Veja que nenhuma das coordenadas é cíclica. No entanto, usando como coordenadas generalizadas as coordenadas relativas e de centro de massa (veja o capítulo 1, seção 1.7)

$$\begin{cases} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1}{M}\mathbf{r} \end{cases}$$

onde  $M = m_1 + m_2$  e  $\mu = m_1m_2/M$ , obtemos

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r).$$

A coordenada  $\mathbf{R}$  é cíclica, pois  $R_x$ ,  $R_y$  e  $R_z$  não aparecem em  $L$ . Então  $\mathbf{P} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{R}} = M\dot{\mathbf{R}}$ , que representa o momento linear total  $m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2$ , é constante. A simetria associada a essa conservação é a translação do sistema: se deslocarmos o centro de massa para  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} + d\mathbf{R}$  então, de acordo com as equações de transformação,

$$\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1 + d\mathbf{R}$$

$$\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 + d\mathbf{R}$$

e cada partícula do sistema é deslocada da mesma quantidade. Mostramos então que o deslocamento de todo o sistema não afeta sua dinâmica e essa invariância está por trás da conservação de  $\mathbf{P}$ .

Tomando agora  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} = 0$ , que é possível no referencial do centro de massa, podemos olhar a parte relativa. Como vimos no capítulo 1 o movimento relativo ocorre no plano perpendicular ao momento angular, que é conservado. Tomando o plano como  $x$ - $y$  e usando coordenadas polares  $r$  e  $\phi$  é fácil ver que a coordenada  $\phi$  é cíclica e que a quantidade conservada é o módulo do momento angular. A simetria associada é a de rotações em torno do eixo  $z$ .

É interessante, no entanto, esquecer por um momento da conservação do momento angular e escrever o problema diretamente em coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ . Os vetores posição e velocidade em coordenadas esféricas são dados por  $\mathbf{r} = r\hat{r}$  e  $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$  e a lagrangiana fica

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) - V(r).$$

A coordenada  $\phi$  é cíclica e portanto

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$$

é constante. Como  $r\sin\theta$  é a distância ao eixo  $z$  e  $r\dot{\phi}\sin\theta = v_\phi$ ,  $p_\phi$  é a componente  $z$  do momento angular. Por outro lado, o momento na direção  $\theta$  é  $p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta}$  e a equação para  $\theta$  pode ser escrita como

$$\frac{dp_\theta}{dt} - \mu r^2 \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta = 0$$

ou ainda

$$\frac{dp_\theta}{dt} - \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{\mu r^2 \sin^3\theta} = 0.$$

Multiplicando os dois lados por  $2\mu r^2 \dot{\theta} = 2p_\theta$  obtemos

$$2p_\theta \frac{dp_\theta}{dt} - \frac{2p_\phi^2 \dot{\theta} \cos \theta}{\sin^3 \theta} = 0$$

$$\frac{dp_\theta^2}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) = 0$$

e temos outra constante de movimento

$$\mathcal{L}^2 \equiv p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}.$$

Para ver que  $\mathcal{L}^2$  representa o módulo do momento angular total ao quadrado calculamos  $\vec{\mathcal{L}} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{\phi} - \mu r^2 \dot{\phi} \sin \theta \hat{\theta} = p_\theta \hat{\phi} - (p_\phi / \sin \theta) \hat{\theta}$ . Outra maneira de ver é escrevendo a energia cinética em termos de  $p_\theta$  e  $p_\phi$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2\mu} \left( \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2\mu r^2}. \end{aligned}$$

Veja que o vetor  $\vec{\mathcal{L}}$  é conservado tanto em módulo quanto em direção, ou seja,  $d\vec{\mathcal{L}}/dt = 0$ , embora  $p_\theta$  e  $(p_\phi / \sin \theta)$  não sejam constantes. Para mostrar a conservação de  $\vec{\mathcal{L}}$  em coordenadas esféricas é necessário notar que os versores  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$  também dependem do tempo.

### 3.5.2 Conservação da energia

A derivada total da lagrangiana em relação ao tempo é

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.16)$$

A função

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \sum_k p_k \dot{q}_k - L \quad (3.17)$$

onde  $q = (q_1, \dots, q_n)$  e  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ , é a **função energia** do sistema. A equação (3.16) mostra que  $h$  é constante se  $L$  não depender explicitamente do tempo. Veremos no próximo capítulo que  $h$  será identificada com a função Hamiltoniana quando as velocidades forem substituídas pelos momentos conjugados.

No caso de lagrangianas quadráticas nas velocidades,  $h$  pode ser simplificada. Se

$$L = T - V = \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q)$$

com  $a_{ij} = a_{ji}$ , então

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i a_{ki}(q) \dot{q}_i$$

e

$$\begin{aligned} h &= \sum_{i,k} a_{ki}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + V(q) \\ &= \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + V(q) = T + V. \end{aligned}$$

Nesse caso a função energia  $h$  coincide com a energia total  $T + V$ .

Lagrangianas quadráticas nas velocidades aparecem em situações bastante gerais. Suponha por exemplo que o sistema de partículas tenha um potencial  $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  e que a transformação das coordenadas cartesianas para as generalizadas seja independente do tempo:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Então

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

e

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \sum_{kl} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \equiv \frac{1}{2} \sum_{kl} a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$$



onde

$$a_{kl}(q) = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}.$$

Portanto, se  $V$  não depende das velocidades e se as coordenadas generalizadas se relacionam com as cartesianas por transformações independentes do tempo, então a função  $h$  é identificada com  $T+V$ , que é a energia do sistema. Quando essas condições não são satisfeitas,  $h$  ainda pode ser definida, mas não necessariamente coincide com a energia usual  $T+V$ . Se a transformação depender do tempo, por exemplo, teremos

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

e aparecerão termos lineares na velocidade na lagrangiana. Voltaremos a falar sobre esse assunto na seção 4.3.

### 3.6 Sobre a unicidade da lagrangiana

Nossas derivações das equações de Euler-Lagrange a partir do princípio de D'Alembert ou do princípio variacional de Hamilton pode ter passado a impressão que a lagrangiana de um sistema é uma função unicamente definida. Isso, no entanto, não é verdade. Assim como a energia de um sistema é definida a menos de uma constante, a função de Lagrange é definida a menos da derivada total de uma função suave arbitrária, desde que esta dependa apenas das coordenadas e do tempo. Vamos ver isso de duas maneiras:

Primeiramente, considere a função

$$L' = L + \frac{dF(q, t)}{dt}.$$

Mostraremos que as equações de movimento fornecidas por  $L'$  são idênticas às fornecidas por  $L$ . De fato,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( L + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \right).$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_k}$$

onde invertemos a ordem de derivação no último termo. Subtraindo uma equação da outra vemos que os termos envolvendo  $F$  se cancelam e obtemos as mesmas equações fornecidas diretamente por  $L$ .

Podemos também obter esse resultado diretamente do princípio variacional. A ação para  $L'$  é

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = S + F(q, t) \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Calculando a variação primeira obtemos

$$\delta S' = \delta S + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} = \delta S$$

pois  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ .

**Exemplo 3.6.1** A lagrangiana para uma partícula de carga  $e$  sujeita a potenciais eletromagnéticos  $\Phi$  e  $\mathcal{A}$  é dada pela equação (2.15):

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - e\Phi + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathcal{A}.$$

As mesmas equações de movimento podem ser obtidas a partir de

$$L' = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - e\Phi - e\mathbf{r} \cdot \dot{\mathcal{A}}$$

pois  $L = L' + d(e\mathbf{r}\mathcal{A})/dt$ .

## 3.7 Propriedades da Ação

Chamamos a trajetória que extremiza a ação de *trajetória clássica*, para distingui-la de outros caminhos que não satisfazem as equações de movimento. A integral de  $L(q, \dot{q}, t)$  sobre a trajetória clássica é a *ação clássica*. Se a trajetória clássica  $q(t)$  parte de  $q_1$  em  $t = t_1$  e chega em  $q_2$  em  $t = t_2$ , então

$$S(q_1, t_1; q_2, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

Consideremos agora uma outra trajetória clássica  $\bar{q}(t)$  vizinha à  $q(t)$ , conforme ilustra a figura 3.9. A nova trajetória começa em  $q_1 + \Delta q_1$  em  $t = t_1 + \Delta t_1$  e chega em  $q_2 + \Delta q_2$  em  $t = t_2 + \Delta t_2$ . Escrevemos

$$\bar{q}(t) = q(t) + \delta q(t)$$

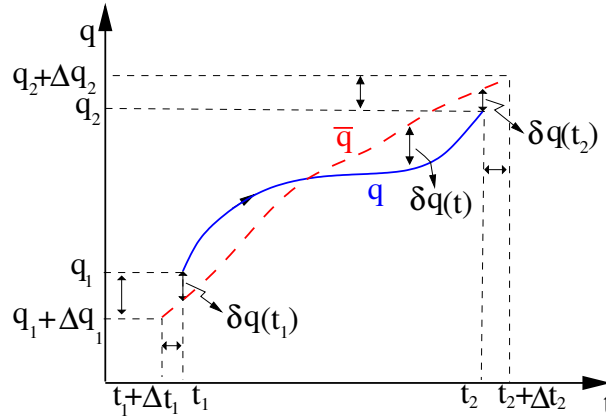


Figura 3.9: Duas trajetórias clássicas:  $q(t)$  com  $q(t_1) = q_1$  e  $q(t_2) = q_2$  (linha cheia, azul) e  $\bar{q}(t)$ , com  $q(t_1 + \Delta t_1) = q_1 + \Delta q_1$  e  $q(t_2 + \Delta t_2) = q_2 + \Delta q_2$  (linha tracejada, vermelho).

e enfatizamos que  $\delta q(t)$  é a diferença entre as trajetórias a tempo fixo. No extremo final, como os tempos de propagação são diferentes, temos:

$$\begin{aligned} \Delta q_2 &\equiv \bar{q}(t_2 + \Delta t_2) - q(t_2) \\ &= \bar{q}(t_2) + \dot{\bar{q}}(t_2)\Delta t_2 - q(t_2) \\ &= \bar{q}(t_2) - q(t_2) + \dot{q}(t_2)\Delta t_2 = \delta q_2 + \dot{q}(t_2)\Delta t_2. \end{aligned}$$

Na terceira linha substituímos  $\dot{\bar{q}}(t_2)\Delta t_2$  por  $\dot{q}(t_2)\Delta t_2$  porque a diferença é de segunda ordem nos desvios. Da mesma forma obtemos

$$\Delta q_1 = \delta q_1 + \dot{q}(t_1)\Delta t_1.$$

Podemos agora calcular a diferença entre a ação dessas duas trajetórias clássicas vizinhas. Para simplificar a notação e os cálculos, vamos fazer tudo para um único grau de liberdade. O leitor poderá verificar que toda manipulação vale para qualquer número de graus de liberdade. A variação da ação, que chamaremos de  $\Delta S$  para enfatizar que ambas as trajetórias são

clássicas, e não curvas arbitrárias, é

$$\begin{aligned}
 \Delta S &\equiv S(q_1 + \Delta q_1, t_1 + \Delta t_1; q_2 + \Delta q_2, t_2 + \Delta t_2) - S(q_1, t_1; q_2, t_2) \\
 &= \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\
 &= \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_1} \bar{L} dt + \int_{t_1}^{t_2} \bar{L} dt + \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t_2} \bar{L} dt - \int_{t_1}^{t_2} L dt
 \end{aligned}$$

onde  $\bar{L} = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ . Na primeira e terceira integrais o intervalo de integração é infinitesimal. Na segunda, que tem os mesmos limites de integração que a quarta, podemos expandir  $\bar{q}$  em torno de  $q$ . O resultado é:

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= -\bar{L}(t_1)\Delta t_1 + \bar{L}(t_2)\Delta t_2 + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} \delta \dot{q} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} \delta q \right] dt \\
 &= -L(t_1)\Delta t_1 + L(t_2)\Delta t_2 + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Novamente trocamos  $\bar{L}(t_i)\Delta t_i$  por  $L(t_i)\Delta t_i$ . Como a trajetória satisfaz as equações de Lagrange, a integral se anula. Usando ainda as definições de momento generalizado e função energia temos finalmente

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= L(t)\Delta t|_{t_1}^{t_2} + p\delta q|_{t_1}^{t_2} \\
 &= L(t)\Delta t|_{t_1}^{t_2} + p[\Delta q - \dot{q}\Delta t]|_{t_1}^{t_2} \\
 &= [L(t) - p\dot{q}]\Delta t|_{t_1}^{t_2} + p\Delta q|_{t_1}^{t_2} = -h(t)\Delta t|_{t_1}^{t_2} + p\Delta q|_{t_1}^{t_2} \\
 &= -h(t_2)\Delta t_2 + h(t_1)\Delta t_1 + p_2\Delta q_2 - p_1\Delta q_1
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são os valores do momento nos pontos inicial e final e  $h$  é a função energia. Como os deslocamentos  $\Delta q_i$  e  $\Delta t_i$  são arbitrários, podemos calcular a variação da ação em relação à cada um deles separadamente, zerando os

demais. Seguem então as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial q_1} &= -p_1 \\
 \frac{\partial S}{\partial q_2} &= +p_2 \\
 \frac{\partial S}{\partial t_1} &= +h(t_1) \\
 \frac{\partial S}{\partial t_2} &= -h(t_2).
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Se  $h$  for constante,  $h(t_1) = h(t_2)$ . Note como as derivadas de  $S$  em relação a seus parâmetros produz os parâmetros conjugados.

**Exemplo:** A partícula livre. Nesse caso  $q(t) = q_0 + v_0 t$  de forma que

$$S(q_f, q_0, \tau) = \int_0^\tau \frac{m}{2} \dot{q}^2 dt = \frac{m}{2} v_0^2 \tau,$$

onde  $v_0$  deve ser escrito em termos de  $q_0$ ,  $q_f$  e  $\tau$ . Pela equação da trajetória vemos que  $v_0 = (q_f - q_0)/\tau$ , de forma que

$$S(q_f, q_0, \tau) = \frac{m}{2\tau} (q_f - q_0)^2.$$

É fácil verificar que  $-\partial S/\partial q_0 = \partial S/\partial q_f = mv_0$  e que  $-\partial S/\partial \tau = mv_0^2/2 = E$ .

## 3.8 O princípio de Maupertuis

Na seção anterior calculamos a variação de  $S$  para duas trajetórias clássicas que começam e terminam em pontos ligeiramente diferentes. O resultado que obtivemos, equação (3.19), é na verdade válido em condições um pouco mais gerais do que mostramos. De fato, vamos supor que a trajetória de referência, partindo de  $q_1$  em  $t = t_1$  e terminando em  $q_2$  em  $t = t_2$  seja clássica, mas que a trajetória vizinha, com condições iniciais e finais diferentes, seja apenas um caminho qualquer. A diferença entre as ações nesse caso ainda será

dada pela equação (3.18). Como a quantidade dentro da integral é calculada na trajetória de referência, que é clássica, ela se anula pelas equações de Lagrange e segue o resultado (3.19). O símbolo  $\Delta$  agora significa apenas que os caminhos vizinhos admitem pequenas mudanças nas condições iniciais e finais, em oposição ao símbolo  $\delta$  que usamos quando as condições iniciais e finais estão fixas.

Vamos agora nos restringir a sistemas onde  $h$  é independente do tempo e, portanto, constante. Se calcularmos a variação de  $S$  sobre a trajetória clássica para caminhos vizinhos que tenham os pontos iniciais e finais fixos,  $\Delta q_1 = \Delta q_2 = 0$ , mas tempo de trânsito arbitrário,  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$  diferentes de zero, então, de acordo com (3.19),

$$\Delta S = -h(\Delta t_2 - \Delta t_1).$$

Por outro lado, a ação pode ser escrita como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - h)dt = \int_{t_1}^{t_2} p\dot{q} dt - h(t_2 - t_1).$$

e sua variação para caminhos que mantenham  $h$  constante e  $\Delta q_1 = \Delta q_2 = 0$  é

$$\Delta S = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p\dot{q} dt - h(\Delta t_2 - \Delta t_1).$$

No entanto, como  $\Delta S = -h(\Delta t_2 - \Delta t_1)$ , a condição

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p\dot{q} dt = \Delta \mathcal{S} = 0 \tag{3.21}$$

determina a trajetória clássica se as variações forem restritas à superfície de energia e com  $\Delta q_1 = \Delta q_2 = 0$ .

A quantidade  $\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} p\dot{q} dt$  é chamada de *ação reduzida* e foi a ação considerada inicialmente por Maupertuis, Euler e Lagrange. A equação (3.21) é conhecida historicamente como *princípio de Maupertuis* e diz que a ação reduzida é um extremo se considerarmos curvas  $q(t)$  com  $q(t_1) = q_1$  e  $q(t_2) = q_2$  sobre a superfície de energia, i.e., com  $p(t)\dot{q}(t) - L(q(t), \dot{q}(t)) = E = \text{constante}$ .

No caso especial da partícula livre,  $\dot{q} = p/m$  e (3.21) pode ser reescrita como  $\Delta \int T dt = 0$ , onde  $T = p^2/2m$  é a energia cinética. Como  $T = E$ , que é constante para as variações permitidas, o princípio de Maupertuis se reduz ao de Fermat  $\Delta \int dt = 0$ .

### 3.9 O teorema de Morse

O princípio de Hamilton é uma condição de extremo para a ação. Surge então a questão de saber que tipo de extremo é esse: mínimo, máximo ou ponto de sela. O teorema de Morse responde essa pergunta. Antes de enunciar e demonstrar o teorema vamos fazer algumas considerações gerais.

Funções de uma única variável,  $f(x)$ , tem um ponto de extremo local em  $x_0$  se  $f'(x_0) = 0$ , onde a linha representa derivada em relação à  $x$ . O ponto  $x_0$  é de máximo se  $f''(x_0) < 0$  e de mínimo se  $f''(x_0) > 0$ . No caso limite  $f''(x_0) = 0$  o ponto é dito de inflexão.

Para funções de mais variáveis a análise é um pouco mais complicada. Tomemos o caso de duas variáveis,  $f(x, y)$ . Um ponto de extremo  $\mathbf{r}_0 \equiv (x_0, y_0)$  satisfaz  $f_x(\mathbf{r}_0) = f_y(\mathbf{r}_0) = 0$  onde  $f_x = \partial f / \partial x$  e  $f_y = \partial f / \partial y$ . Nas vizinhanças de  $\mathbf{r}_0$  podemos expandir  $f$  até segunda ordem como

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j + \mathcal{O}(3).$$

onde  $i$  e  $j$  valem  $x$  ou  $y$  e as derivadas segundas são calculadas em  $\mathbf{r}_0$ . O termo de segunda ordem, que contém a informação relevante sobre a vizinhança de  $\mathbf{r}_0$ , pode ser reescrito como

$$(\delta x \quad \delta y) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}.$$

Como a matriz de derivadas segundas é simétrica e real, podemos diagonalizá-la com uma transformação ortogonal, que é uma rotação do sistema original  $(x, y)$  para  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Além disso seus autovetores serão ortogonais. No novo sistema essa forma quadrática fica

$$(\delta \tilde{x} \quad \delta \tilde{y}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \tilde{x} \\ \delta \tilde{y} \end{pmatrix} = \lambda_1 (\delta \tilde{x})^2 + \lambda_2 (\delta \tilde{y})^2.$$

Os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  determinam a topologia de  $f(\mathbf{r})$  nas vizinhanças de  $\mathbf{r}_0$ . Se ambos forem positivos o valor de  $f(\mathbf{r})$  é sempre maior que o valor de  $f(\mathbf{r}_0)$  e  $\mathbf{r}_0$  é ponto de mínimo. Se ambos forem negativos  $\mathbf{r}_0$  é ponto de máximo e se um deles for positivo e o outro negativo temos um ponto de sela.

No caso do princípio variacional de Hamilton estamos procurando o extremo da ação, que não é uma simples função, mas um *funcional*, isto é, uma função de funções. De fato, para cada caminho possível ligando os pontos iniciais e finais temos um valor numérico para a ação. Quando extremizamos a ação não encontramos um ponto crítico, mas toda uma trajetória. Em outras palavras, o número de variáveis do funcional  $S$  é infinito. Para tornar essa afirmativa mais clara, notamos que as pequenas variações em torno da trajetória estacionária, que chamamos de  $\delta q(x) = \alpha \eta(x)$  (veja a figura 3.3) podem ser reescritas na forma [12]

$$\delta q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left[ n\pi \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \right]$$

que satisfazem automaticamente as condições de contorno  $\delta q(x_1) = \delta q(x_2) = 0$ . Para cada conjunto de coeficientes  $\{a_n\}$  temos uma trajetória diferente. O número de graus de liberdade, que é o número de maneiras independentes que podemos alterar a curva vizinha, é o número de  $a_n$ 's, que é infinito.

A segunda variação de  $S$  em torno da curva estacionária pode ser escrita como uma forma quadrática como no caso da função de duas variáveis:  $\delta^2 S = \sum_{ij} A_{ij} a_i a_j$ . Se todos os autovalores da matrix  $A$  forem positivos teremos um mínimo. Para cada autovalor negativo de  $A$  existe uma direção de máximo no espaço funcional e a curva estacionária passa a ser um ponto de sela.

Vamos agora enunciar o teorema de Morse e ver seu significado. Faremos a demonstração em duas etapas em seguida:

**Teorema de Morse** - As trajetórias clássicas correspondem a um mínimo da ação para tempos suficientemente curtos. Para tempos mais longos, cada vez que a trajetória passar por um *ponto conjugado*, onde

$$\det \left[ -\frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_2} \right] \rightarrow \infty \quad (3.22)$$

a variação segunda de  $S$  ganha um autovalor negativo. Nessa expressão  $S = S(q_1, q_2, t)$  é escrita como função dos pontos iniciais, finais e do tempo:  $q_1 = q(t_1)$ ,  $q_2 = q(t_2)$  e  $t = t_2 - t_1$ .

Para entender o significado físico da quantidade dentro do sinal de determinante, e também para as demonstrações que seguem, vamos considerar apenas sistemas com um único grau de liberdade. Isso facilita os cálculos e



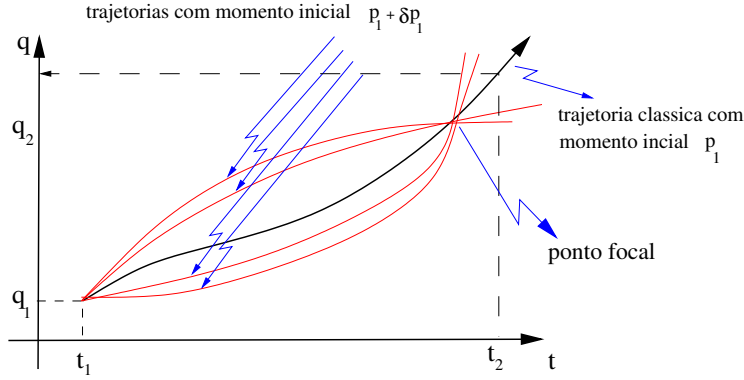


Figura 3.10: Pontos focais.

as interpretações. Vimos que a ação  $S(q_1, q_2, t)$  satisfaz a relação

$$p_1 = p(t_1) = -\frac{\partial S}{\partial q_1} \quad (3.23)$$

onde  $p_1 = p(t_1)$  é o momento inicial da partícula. Portanto,

$$-\frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial p_1}{\partial q_2}.$$

A condição  $\partial p_1 / \partial q_2 \rightarrow \infty$ , ou  $\partial q_2 / \partial p_1 \rightarrow 0$ , significa que se fizermos um pequeno deslocamento no momento inicial da trajetória,  $\delta p_1$ , a posição final  $\delta q_2$  não vai se alterar. Quando isso acontece temos um *ponto focal*, ilustrado na figura 3.10.

Um exemplo bastante simples onde os pontos focais aparecem é o oscilador harmônico. A equação de movimento  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  tem soluções  $x(t) = A \sin(\omega t)$  com  $x(0) = 0$ ,  $p(0) = m\omega A$  e energia  $E = m\omega^2 A^2/2$ , como ilustrado na figura 3.11 para diferentes valores de  $A$ , ou do momento inicial. Independente do valor do momento inicial as trajetórias retornam ao ponto  $x = 0$  depois de cada intervalo  $\pi/\omega$ . O cálculo da ação para o oscilador harmônico fornece

$$S(q_1, q_2, t) = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega t)} [(q_1^2 + q_2^2) \cos(\omega t) - 2q_1 q_2]$$

e

$$-\frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{m\omega}{\sin(\omega t)}$$

que diverge para  $t = n\pi/\omega$ , verificando o teorema de Morse.

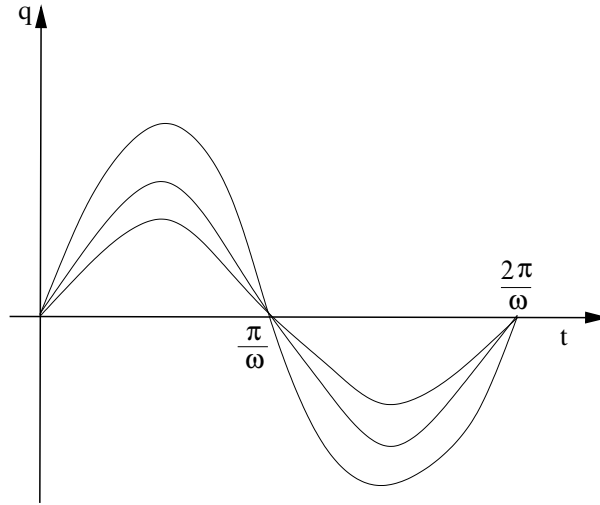


Figura 3.11: Pontos focais no oscilador harmônico.

### 3.9.1 Variação segunda da ação para sistemas simples

Para lagrangianas que sejam quadráticas nas posições e velocidades é possível calcular a variação segunda da ação diretamente usando o cálculo variacional apresentado na seção 3.2. Estendendo a equação (3.2) para segunda ordem é imediato ver que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt + \\ &\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \delta \dot{q}^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \delta \dot{q} \delta q + \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \delta q^2 \right] dt \equiv \delta^1 S + \delta^2 S. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como queremos avaliar  $\delta S$  sobre uma trajetória clássica, a variação primeira  $\delta^1 S$  será nula por definição. Para calcular a variação segunda usamos a expansão dos  $\delta q$  como

$$\delta q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left[ n\pi \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \right] \quad (3.25)$$

de onde obtemos

$$\delta \dot{q}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a_n}{t_2 - t_1} \cos \left[ n\pi \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \right]. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.25) e (3.26) em (3.24) podemos reescrever a variação segunda da ação na forma

$$\begin{aligned}\delta^2 S &= \frac{1}{2} \sum_{n,m} a_n a_m \left[ \frac{nm\pi^2}{(t_2 - t_1)^2} \alpha_{nm} + \frac{2n\pi}{(t_2 - t_1)} \beta_{nm} + \gamma_{nm} \right] \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{n,m} a_n A_{nm} a_m\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha_{nm} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \cos \left[ n\pi \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \right] \cos \left[ m\pi \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \right] dt \\ \beta_{nm} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \cos \left[ n\pi \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \right] \sin \left[ m\pi \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \right] dt \\ \gamma_{nm} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \sin \left[ n\pi \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \right] \sin \left[ m\pi \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \right] dt.\end{aligned}$$

Devido a forma complicada das matrizes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  que compõe  $A$ , esse cálculo geral é possível apenas para lagrangianas quadráticas, onde as derivadas segundas que aparecem ficam constantes. Ilustraremos o cálculo dos autovalores de  $A$  para dois exemplos simples: a partícula livre e o oscilador harmônico.

**A partícula livre.** Nesse caso

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2$$

e

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = \mu \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} = 0.$$

Devido à ortogonalidade dos senos e cossenos obtemos

$$\alpha_{nm} = \frac{\mu}{2} (t_2 - t_1) \delta_{nm} \quad \beta_{nm} = 0 \quad \gamma_{nm} = 0$$

e portanto

$$A_{nm} = \frac{n^2 \pi^2 \mu}{2(t_2 - t_1)} \delta_{nm} > 0.$$

Como  $A$  é diagonal e seus elementos são sempre positivos, a ação calculada para a trajetória clássica da partícula livre é sempre um mínimo: qualquer outro caminho que não seja o clássico produzirá um valor de ação maior que aquele dado pelo caminho clássico.

**O oscilador harmônico.** Agora temos

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \mu \omega^2 q^2$$

e

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = \mu \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} = -\mu \omega^2.$$

Usando novamente a ortogonalidade dos senos e cossenos obtemos

$$\alpha_{nm} = \frac{\mu}{2} (t_2 - t_1) \delta_{nm} \quad \beta_{nm} = 0 \quad \gamma_{nm} = -\frac{\mu \omega^2}{2} (t_2 - t_1) \delta_{nm}$$

e portanto

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \left[ \frac{n^2 \pi^2 \mu}{2(t_2 - t_1)} \delta_{nm} - \frac{\mu \omega^2}{2} (t_2 - t_1) \delta_{nm} \right] \\ &= \frac{\mu}{2(t_2 - t_1)} \delta_{nm} [n^2 \pi^2 - \omega^2 (t_2 - t_1)^2]. \end{aligned}$$

Assim como no caso da partícula livre a matriz é diagonal. O  $n$ -ésimo autovalor

$$\lambda_n = \frac{\mu}{2(t_2 - t_1)} [n^2 \pi^2 - \omega^2 (t_2 - t_1)^2]$$

se anula (e depois fica negativo para sempre) quando

$$t_2 = t_1 + \frac{n\pi}{\omega} = t_1 + n\tau/2$$

onde  $\tau = 2\pi/\omega$  é o período do oscilador. Compare esse resultado com a figura 3.11. Vemos então que após meio período de oscilação a ação não é mais um mínimo! Isso implica que existem outros caminhos, que não o clássico, que produzem valores de  $S$  menores que aquele produzido pelo clássico. A esperança de Maupertuis de que a Natureza agiria de modo a minimizar sua ação sobre as coisas materiais não se realiza.

### 3.9.2 Demonstração do teorema de Morse

Devido a forma complicada da variação segunda da ação dada pela equação (3.24), sua aplicação a sistemas gerais torna-se praticamente impossível. Para o caso genérico onde

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{q}^2 - V(q)$$

temos que adotar um procedimento diferente. A equação de movimento é simplesmente a segunda lei de Newton

$$\mu\ddot{q} = -\frac{dV}{dq}.$$

Seja  $q^0(t)$  a solução da equação com  $q(t_1) = q_i$ ,  $q(t_2) = q_f$ , e  $\delta q(t)$  uma variação dessa solução com  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . A ação calculada para a trajetória vizinha  $q(t) = q^0(t) + \delta q(t)$  é dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2}\mu\dot{q}(t)^2 - V(q(t)) \right] dt.$$

Em vez de expandir  $q(t)$  diretamente em torno de  $q^0(t)$ , o truque que usaremos é o de discretizar o tempo ao longo das trajetórias. Dividimos o intervalo de tempo em  $N$  partes de mesmo tamanho  $\epsilon$  e tal forma que  $t_2 - t_1 = N\epsilon$  e

$$q(t_1) = q_i \equiv q_0 \quad q(t_1 + n\epsilon) \equiv q_n \quad q(t_2) = q_f \equiv q_N.$$

No final do cálculo tomaremos o limite em que  $N \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ , mantendo  $N\epsilon = t_2 - t_1$ . Além disso fazemos  $q_n = q_n^0 + \xi_n$ , onde  $\xi_n = \delta q(n\epsilon)$  de forma

que

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\mu}{2} \frac{(q_n - q_{n-1})^2}{\epsilon^2} - V(q_n) \right] \epsilon \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\mu}{2\epsilon} (q_n^0 - q_{n-1}^0 + \xi_n - \xi_{n-1})^2 - V(q_n^0 + \xi_n) \epsilon \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\mu}{2} \frac{(q_n^0 - q_{n-1}^0)^2}{\epsilon^2} - V(q_n^0) \right] \epsilon + \right. \\
&\quad \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\mu}{\epsilon} (q_n^0 - q_{n-1}^0)(\xi_n - \xi_{n-1}) - V'(q_n^0) \xi_n \epsilon \right] + \\
&\quad \left. \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\mu}{2} \frac{(\xi_n - \xi_{n-1})^2}{\epsilon^2} - V''(q_n^0) \frac{\xi_n^2}{2} \right] \epsilon \right\} \equiv S_0 + \delta S^1 + \delta S^2
\end{aligned}$$

onde  $\xi_0 = \xi_N = 0$ .

O termo de primeira ordem é nulo, como já podíamos prever. De fato, o termo de primeira ordem proporcional à  $\xi_k$  é

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{\epsilon} (q_k^0 - q_{k-1}^0) - \frac{\mu}{\epsilon} (q_{k+1}^0 - q_k^0) - V'(q_k^0) \epsilon \\
&= -\epsilon \left[ \mu \frac{q_{k+1}^0 - 2q_k^0 + q_{k-1}^0}{\epsilon^2} + V'(q_k^0) \right] \rightarrow -\epsilon [\mu \ddot{q}^0 + V'(q^0)] = 0,
\end{aligned}$$

pois  $q^0$  satisfaz a equação de movimento.

A variação segunda da ação  $\delta^2 S = S - S_0$  pode agora ser escrita como uma forma quadrática. Definindo o vetor de  $N - 1$  componentes  $\xi^T = (\xi_{N-1}, \xi_{N-2}, \dots, \xi_2, \xi_1)$  (o super-escrito  $T$  significa transposto) podemos escrever

$$\delta^2 S = \frac{\mu}{2\epsilon} \xi^T A_N \xi \quad (3.27)$$

onde a matrix  $A_N$  é

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 - V''_{N-1}\epsilon^2/\mu & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 - V''_{N-2}\epsilon^2/\mu & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 - V''_{N-3}\epsilon^2/\mu & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

onde  $V''_k = V''(q_k^0)$ .

Para determinar o carácter do extremo de  $S$  temos que calcular os  $N - 1$  autovalores de  $A_N$ . Sabemos, no entanto, que se o potencial for suave, então para tempos curtos podemos aproximá-lo por constante,  $V(q) \approx V(q_i)$ . Temos então uma partícula livre e sabemos que todos os autovalores são positivos. Dessa forma, podemos calcular apenas o determinante de  $A_N$ . Para tempos curtos o determinante será positivo e cada vez que ele trocar de sinal saberemos que um autovalor ficou negativo. O determinante de  $A_N$  pode ser calculado pelo método dos cofatores. Aplicando o método à primeira linha de  $A_N$  obtemos

$$\det A_N = \left(2 - V''_{N-1}\frac{\epsilon^2}{\mu}\right) \det A_{N-1} - \det A_{N-2}.$$

É fácil ver que  $\det A_N$  cresce linearmente com  $N$  e precisaremos tomar o limite em que  $N$  vai a infinito. É conveniente então definir  $Q_N = \epsilon \det A_N$ , que permanece finito no limite de tempo contínuo. Com isso podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{Q_N - 2Q_{N-1} + Q_{N-2}}{\epsilon^2} = -\frac{V''_{N-1}}{\mu} Q_{N-1}.$$

No limite  $N \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$  obtemos

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -\frac{V''}{\mu} Q \quad \text{com} \quad Q(t_1) = 0$$

onde  $V'' = V''(q(t))$  é calculado na trajetória clássica. Como  $\epsilon \det A_N = Q_N$ , o determinante de  $A$  é então proporcional à  $Q(t_2)$ .

A equação satisfeita por  $Q$  tem uma interpretação muito simples. Fazendo  $q(t) = q(t)^0 + Q(t)$  e substituindo na equação de Newton obtemos

$$\mu(\ddot{q}^0 + \ddot{Q}) = -\frac{dV}{dq}(q^0 + Q) \approx -\frac{dV}{dq}(q^0) - \frac{d^2V}{dq^2}(q^0)Q$$

ou,  $\mu\ddot{Q} = -V''Q$ . Assim, o determinante de  $A$  pode ser obtido propagando-se uma pequena variação da trajetória clássica com condição inicial  $Q(t_1) = 0$ . Como a equação é de segundo grau precisamos também do valor de  $\dot{Q}$  em  $t = t_1$ . Veja que

$$Q_1 = (2 - V_1''\epsilon^2/\mu)\epsilon$$

$$Q_2 = [(2 - V_2''\epsilon^2/\mu)(2 - V_1''\epsilon^2/\mu) - 1]\epsilon \approx [3 - 2(V_1'' + V_2'')\epsilon^2/\mu]\epsilon$$

e

$$\frac{Q_2 - Q_1}{\epsilon} = 1 - \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

de forma que  $\dot{Q}(t_1) = 1$ .

O último passo da demonstração é relacionar  $Q(t_2)$  com a ação. Para isso usaremos mais uma vez a identidade (3.23). Usando então

$$p_i = \mu\dot{q}_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}$$

e o fato de  $S = S(q_f, q_i, t)$ , podemos calcular a variação na velocidade inicial que ocorrerá se fizermos pequenas variações nas posições inicial e final que especificam a trajetória:

$$\mu\delta\dot{q}_i = -\frac{\partial^2 S}{\partial q_i^2}\delta q_i - \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial q_f}\delta q_f.$$

Para  $\delta q_i = 0$  e  $\delta\dot{q}_i = 1$  obtemos

$$\delta q_f = Q(t_2) = \mu \left( -\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial q_f} \right)^{-1}.$$

Assim provamos que  $Q(t_2) \rightarrow 0$  quando  $\partial^2 S/\partial q_i\partial q_f$  vai a infinito, o que demonstra o teorema.

### 3.10 Causalidade e as integrais de caminho de Feynman

No primeiro livro da famosa série Lectures on Physics [13], Richard Feynman discute em grande detalhe o princípio de Fermat e nota que ele apresenta um



problema curioso de quebra de causalidade (veja a seção 26.5 do primeiro livro). A questão que se coloca é a seguinte: como o raio de luz sabe qual o caminho de mínimo tempo? Ele teria que percorrer vários caminhos, medir o tempo em cada um deles e, só depois, percorrer o caminho de menor tempo. Mas não é isso que acontece. Nas palavras de Feynman:

*The Fermat Principle, instead of saying it is a causal thing,..., it says this: we set up the situation and light decides which is the shortest time path, or the extreme one. But what does it do, how does it find out? Does it smells the nearby paths and checks them against each other? The answer is yes it does, in a way.*

O ingrediente que falta para entender esse aparente paradoxo é o caráter ondulatório da luz. A escala de distância dada pelo comprimento de onda da luz permite que ela *cheire* os caminhos vizinhos de forma a ir *surfando* no caminho que localmente minimiza o tempo de percurso. Na verdade a explicação completa é um pouco mais complicada. Em poucas palavras, a luz não sabe qual o caminho de menor tempo e, por isso mesmo, percorre *todos* os caminhos simultaneamente. Como isso é possível? Ora, isso é possível porque a luz não é composta de raios, mas sim de ondas (ou de fótons, mas não entraremos na quantização da luz aqui). A onda se espalha por todos os lados e a sensação do raio de luz aparece devido ao fenômeno de interferências construtivas (ao longo do raio) e destrutivas (fora dele).

O que é realmente curioso é que o mesmo problema de causalidade se apresenta na mecânica com o princípio de Hamilton: como a partícula sabe de antemão qual o caminho onde a ação é um extremo? A resposta, por incrível que pareça, é a mesma: ela não sabe, e por isso vai por todos os caminhos simultaneamente. Como? Ora, partículas não são exatamente partículas e as vezes se comportam como ondas. Essa é uma das descobertas um tanto desconcertantes da mecânica quântica. Embora não seja nosso objetivo discutir a teoria quântica aqui, vale a pena uma pequena digressão sobre o assunto.

Na mecânica quântica, a probabilidade de sairmos do ponto  $q_i$  em  $t_1 = 0$  e atingirmos o ponto  $q_f$  em  $t_2 = T$  é dada pelo módulo ao quadrado do *propagador*. Na formulação de Feynman de *integrais de caminho*, o propagador  $K(q_f, q_i, T)$  é escrito como uma soma sobre todos os caminhos possíveis ligando o ponto  $q_i$  a  $q_f$  no tempo  $T$ . O peso de caminho na soma é um número complexo igual a  $\exp(iS/\hbar)$  onde  $S$  é a ação ao longo do caminho e

$\hbar \approx 1.055 \times 10^{-34} \text{Js}$  é a constante de Planck:

$$K(q_f, q_i, T) = \int e^{\frac{iS}{\hbar}} \mathcal{D}q(t).$$

Essa certamente não é uma integral usual, pois integra-se sobre caminhos. O elemento de integração  $\mathcal{D}q(t)$  pode ser explicitado apenas se usarmos aqui a mesma idéia que usamos na demonstração do teorema de Morse, i.e., a discretização do tempo. Dividimos o intervalo de tempo em  $N$  partes de mesmo tamanho  $\epsilon$  e tal forma que  $T = N\epsilon$  e  $q(n\epsilon) \equiv q_n$ , mantendo os extremos fixos. No apêndice E apresentamos com um pouco mais de detalhe as integrais de caminho e mostramos que

$$\mathcal{D}q(t) \rightarrow \left( \frac{\mu}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^{N-1} dq_k.$$

Se as ações típicas são muito maiores que a constante de Planck, então o valor de  $S/\hbar$  para dois caminhos próximos pode ser muito diferente. Somar as contribuições de caminhos diferentes fica então parecido como somar números complexos aleatórios e o resultado tende a se anular. Essa é a interferência destrutiva.

Imagine no entanto que estamos somando contribuições nas vizinhanças do caminho clássico. Ali  $\delta^1 S = 0$ , caminhos vizinhos tem praticamente a mesma ação e suas contribuições são quase idênticas. Então, ao invés de suas contribuições se cancelarem, elas se somam e temos interferências construtivas. Nesse limite, chamado de limite semiclássico, podemos calcular o propagador somando apenas as contribuições nas vizinhanças da trajetória clássica:

$$K(q_f, q_i, T) \approx \int e^{\frac{i}{\hbar}[S_0 + \delta S^1 + \delta S^2]} \mathcal{D}q(t) = e^{\frac{i}{\hbar}S_0} \int e^{\frac{i}{\hbar}\delta S^2} \mathcal{D}q(t).$$

Discretizando o tempo e usando o resultado (3.27),  $\delta^2 S = \frac{\mu}{2\epsilon} \xi^T A_N \xi$ , as  $N-1$

integrações a serem feitas são Gaussianas e o resultado é

$$\begin{aligned}
 K(q_f, q_i, T) &\approx e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \left( \frac{\mu}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \left( \frac{2\pi i \hbar \epsilon}{\mu} \right)^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det A_N}} \\
 &= e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon \det A_N}} \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar}} \\
 &= e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar}} \sqrt{\frac{\mu}{Q(T)}}
 \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$K(q_f, q_i, T) \approx \frac{e^{\frac{i}{\hbar} S_0}}{\sqrt{2\pi i \hbar}} \left( -\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_f} \right)^{1/2}.$$

Esse último resultado é bastante importante na teoria semiclássica e conseguimos deduzi-lo usando somente os cálculos já elaborados na demonstração do teorema de Morse. Observe que essa aproximação diverge nos pontos focais. O cálculo exato continua em geral finito, mas com um pico próximo aos pontos focais, onde a densidade de trajetórias clássicas vai a infinito, como ilustra a figura 3.10.

## 3.11 Exercícios

1. Um partícula de massa  $m$  é colocada no alto de um anel de raio  $a$  preso na posição vertical. A partícula desliza sobre o anel sem atrito. Calcule a reação do anel sobre a partícula usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Supondo que a velocidade inicial da partícula é muito pequena, encontre o ângulo e a altura em que a partícula se descola do anel. Dica: use conservação de energia.
2. Uma partícula de massa  $m$  desliza sem atrito sobre um bloco de inclinação  $\alpha$  e massa  $M$ . O bloco, por sua vez, desliza sem atrito sobre o chão.
  - (a) Quantos graus de liberdade tem o sistema?
  - (b) Escreva a equação de vínculo, elimine uma das coordenadas e escreva a lagrangiana. Resolva o problema.

- (c) Escreva as equações de movimento usando um multiplicador de Langrange. Resolva o problema e compare com a solução anterior.
3. Escreva a lagrangiana e obtenha os momentos generalizados, as equações de movimento e a função energia dos seguintes problemas:
- (a) oscilador harmônico uni-dimensional.
- (b) partícula de massa  $m$  e carga  $q$  no potencial eletromagnético  $V(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = q(\Phi(\mathbf{r}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$
- (c) Partícula movendo-se em três dimensões num potencial central  $V(r)$  em coordenadas esféricas.
4. Sabemos que o vetor momento angular  $\vec{\mathcal{L}}$  é constante para forças centrais. Porque as componentes  $\mathcal{L}_\phi = p_\theta$  e  $\mathcal{L}_\theta = -p_\phi/\sin\theta$  não são constantes? Mostre explicitamente que  $d\vec{\mathcal{L}}/dt = 0$ .
5. Considere a lagrangiana

$$L = e^{\gamma t} \left( \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2} \right).$$

Escreva as equações de movimento. Considere agora a transformação  $s = e^{\gamma t/2}q$ . Qual a lagrangiana e equações de movimento em termos de  $s$ ? Existem grandezas conservadas [5]?

6. Considere o princípio variacional onde o funcional integrado é  $f(y, y', x)$ . Mostre que se  $f = f(y, y')$ , independente de  $x$ , então a seguinte equação é satisfeita pela curva estacionária:

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \alpha$$

onde  $\alpha$  é constante. Dica: calcule  $df/dx$  e use as equações de Euler-Lagrange. Escreva essa equação para  $f(y, y') = y'^2/2 - g(y)$  e interprete o resultado.

7. Mostre que o tempo de percurso de um raio de luz ao longo do caminho  $y = y(x)$  pode ser escrito como

$$t = \frac{1}{c} \int n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Suponha que  $n = n(y)$ , independente de  $x$ . Mostre que as equações de Euler-Lagrange associadas são dadas por  $ny'' = (1 + y'^2) \frac{dn}{dy}$ , que podem ainda ser simplificadas para  $n = A\sqrt{1 + y'^2}$  onde  $A$  é uma constante de integração. Obtenha a Lei de Snell a partir dessa equação.

8. Calcule a ação  $S(x_f, x_i, T)$  para a partícula livre. Verifique as relações  $\partial S/\partial x_f = p_f$ ,  $\partial S/\partial x_i = -p_i$  e  $\partial S/\partial t = -E$ . Dica: escreva a solução da equação de movimento em termos de  $x_f$ ,  $x_i$  e  $T$  antes de calcular a ação.
9. Calcule a ação  $S(x_f, x_i, T)$  para o oscilador harmônico e verifique as mesmas relações acima.
10. Para  $t > \pi/\omega$  a solução clássica do oscilador harmônico não é um mínimo da ação, mas um ponto de sela. Construa um caminho de  $x_i$  à  $x_f$  que tenha ação menor que a ação clássica quando  $2\pi/\omega > t > \pi/\omega$
11. Considere uma curva fechada no plano x-y parametrizada por  $(x(t), y(t))$  com  $t \in (0, 2\pi)$ . A área dentro dessa curva pode ser escrita como

$$A = \oint dx dy = \oint (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{A}$$

onde  $\vec{f} = \frac{1}{2}(-y(t), x(t), 0)$  e  $d\vec{A} = dx dy \hat{z}$ .

(a) Mostre, usando o teorema de Stokes, que

$$A = \int_0^{2\pi} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

onde  $d\vec{l} = (\dot{x}, \dot{y}, 0) dt$ .

(b) Encontre a curva que maximiza essa área sujeita ao vínculo de comprimento constante, i.e.,

$$L = \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} dt.$$

Dica: use o funcional

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt - \lambda \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} dt.$$

onde  $\lambda$  é um multiplicador de Lagrange.



## Capítulo 4

# As Equações de Hamilton

As equações de Lagrange para um sistema com  $n$  graus de liberdade,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (4.1)$$

formam um conjunto de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem no tempo. O formalismo de Hamilton transforma essas equações em um novo conjunto de  $2n$  equações de primeira ordem. Embora nenhuma física nova seja acrescentada, a formulação de Hamilton apresenta várias vantagens técnicas sobre a de Lagrange, como veremos ao longo do curso. Entre elas salientamos a unicidade das soluções no espaço de fases, as transformações canônicas e a teoria de perturbação. Outra motivação importante é a semelhança entre a descrição hamiltoniana da mecânica clássica e a mecânica quântica, que também discutiremos brevemente. A maneira mais imediata de se obter as equações de Hamilton a partir das equações de Lagrange é através de uma *transformação de Legendre*.

### 4.1 A transformada de Legendre

Seja  $f(x)$  uma função convexa, i.e., com  $f''(x) > 0$ . A informação contida em  $f(x)$  pode ser passada para uma função auxiliar  $g(u)$  definida por [3]

$$g(u) = ux - f(x), \quad (4.2)$$

onde  $x = x(u)$  é obtido invertendo a relação

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (4.3)$$

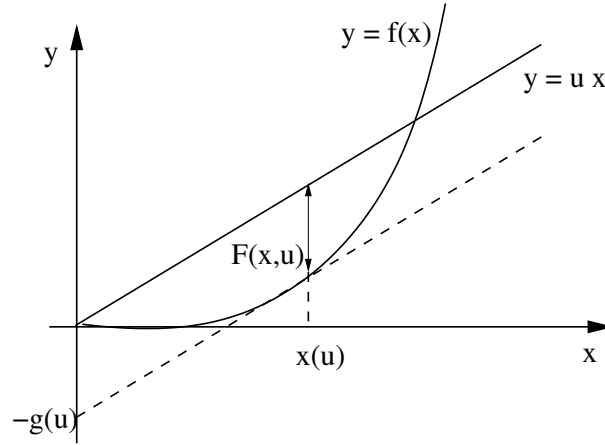


Figura 4.1: Interpretação gráfica da transformada de Legendre.

Passamos a descrever  $f(x)$  em termos de sua derivada. Note que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx = u(x) dx \quad (4.4)$$

e

$$dg = x du + u dx - \frac{\partial f}{\partial x} dx = x(u) du. \quad (4.5)$$

A transformada de Legendre tem uma interpretação geométrica que podemos entender graficamente. Para cada  $u$ , considere a reta  $y = ux$ . O ponto  $x(u)$  é tal que a distância  $F(x, u)$  entre a reta e a função  $f(x)$  é máxima:

$$F(u, x) \equiv xu - f(x) \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u - \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Impondo  $\partial F / \partial x = 0$  encontramos o ponto  $x = x(u)$  onde a distância é máxima e  $g(u) = F(x(u), u)$ .

É interessante notar que a ‘transformada ao quadrado’ é a identidade (propriedade involutiva): dado

$$g(u) = ux(u) - f(x(u)) \quad \text{com} \quad u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4.7)$$

então,

$$h(v) = vu(v) - g(u(v)) \quad \text{com} \quad v = \frac{\partial g}{\partial u}. \quad (4.8)$$



Usando a expressão para  $g$  obtemos

$$v = \frac{\partial g}{\partial u} = x(u) + u \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} = x(u) = x \quad (4.9)$$

e

$$h(v) = h(x) = xu - [ux - f(x)] = f(x). \quad (4.10)$$

Exemplo 1 -  $f(v) = mv^2/2$ . Nesse caso  $p = \partial f/\partial v = mv$ ,  $g(p) = pv(p) - f(v(p)) = p^2/2m$ .

Exemplo 2 - Se  $U(S, V)$  é a energia interna de um sistema termodinâmico em equilíbrio em função da entropia e do volume, então  $T = \partial U/\partial S$  e  $P = -\partial U/\partial V$ . Definimos a energia livre de Helmholtz como

$$F(T, V) = U - TS \quad \text{com} \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}.$$

As novas relações termodinâmicas em termos de  $F$  podem ser obtidas:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial V} dV \\ &= \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV - T dS - S dT \\ &= \frac{\partial U}{\partial V} dV - S dT = -P dV - S dT \end{aligned}$$

ou seja,

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad P = -\frac{\partial F}{\partial V}.$$

## 4.2 As equações de Hamilton

Voltando à mecânica, definiremos a função hamiltoniana a partir de uma transformação de Legendre em  $L(q, \dot{q}, t)$ , ‘trocando’ as velocidades  $\dot{q}_i$  pelos momentos conjugados definidos no capítulo 3, equação (3.15),  $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$  [3, 5]:

$$H(q, p, t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (4.11)$$

onde as  $n$  funções  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$  são obtidas resolvendo-se as  $n$  equações

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.12)$$

As equações de movimento de Lagrange podem agora ser reescritas em termos de  $H$ . Calculando a diferencial total dos dois lados de (4.11) e usando a convenção de soma sobre índices repetidos obtemos

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

onde o segundo termo cancelou o quarto pela definição dos momentos. Podemos agora igualar os termos da primeira com a última linha que multiplicam diferenciais iguais. Obtemos assim as equações de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Temos ainda uma terceira relação envolvendo o tempo. Antes de escrevê-la explicitamente vamos também calcular a derivada total de  $H$  em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= (-\dot{p}_i) \dot{q}_i + (\dot{q}_i) \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

Juntando tudo obtemos

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.14)$$

Assim, se  $L$  não depende explicitamente do tempo, então  $H$  não depende explicitamente do tempo e é uma constante do movimento.

Como indicado no início deste capítulo, as equações de Hamilton formam um conjunto de  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem no tempo. Essas equações são equivalentes às  $n$  equações diferenciais de Lagrange, que são de segunda ordem no tempo. As variáveis dinâmicas são trocadas de  $q$  e  $\dot{q}$  para  $q$  e  $p$ . Exploraremos as vantagens dessa nova descrição ao longo dos próximos capítulos.

**Exemplo 4.2.1** A partícula livre em coordenadas esféricas. O vetor velocidade é dado por  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$  e a lagrangiana fica

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta).$$

Os momentos conjugados são

$$\begin{cases} p_r = m\dot{r} \\ p_\theta = mr^2\dot{\theta} \\ p_\phi = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{r} = p_r/m \\ \dot{\theta} = p_\theta/(mr^2) \\ \dot{\phi} = p_\phi/(mr^2\sin^2\theta). \end{cases}$$

A hamiltoniana fica

$$\begin{aligned} H &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - L \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\phi^2}{mr^2\sin^2\theta} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 - \frac{mr^2}{2}\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 - \frac{mr^2\sin^2\theta}{2}\left(\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right). \end{aligned}$$

**Exemplo 4.2.2** O oscilador harmônico. A lagrangiana é

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

e o momento conjugado

$$p_x = m\dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = p_x/m$$

e

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}p_x - L = \frac{p_x^2}{m} - \frac{m}{2} \left( \frac{p_x}{m} \right)^2 + \frac{kx^2}{2} \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.2.3** Considere um sistema com  $n$  graus de liberdade com função lagrangiana contendo apenas termos lineares e quadráticos na velocidade:

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} + \dot{q}^T a - V_0(q, t)$$

onde  $a = a(q, t)$  é um vetor com  $n$  componentes,  $A = A(q, t)$  uma matriz  $n \times n$  simétrica e o superescrito  $T$  significa transposto. O momento conjugado à  $q_i$  é

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = a_i + \sum_j A_{ji} \dot{q}_j = a_i + \sum_j A_{ij} \dot{q}_j.$$

Em forma vetorial

$$p = a + A \dot{q} \quad \rightarrow \quad \dot{q} = A^{-1}(p - a).$$

Substituindo na definição de  $H$  obtemos

$$\begin{aligned} H &= p^T \dot{q} - L \\ &= p^T A^{-1}(p - a) + V_0 - (p - a)^T A^{-1} a - \frac{1}{2} (p - a)^T A^{-1} A A^{-1} (p - a) \\ &= (p - a)^T A^{-1} (p - a) + a^T A^{-1} (p - a) + V_0 - (p - a)^T A^{-1} a \\ &\quad - \frac{1}{2} (p - a)^T A^{-1} (p - a) \\ &= \frac{1}{2} (p - a)^T A^{-1} (p - a) + V_0. \end{aligned}$$

Na passagem da segunda para a terceira linha modificamos o primeiro  $p^T$  para  $(p - a)^T$ , somando o termo que foi subtraído em seguida. Esse termo cancela contra o quarto termo da terceira linha (note que ambos são escalares). Usamos também o fato que, se  $A$  é simétrica, então  $A^{-1}$  também é. Em particular, se  $a = 0$  temos  $L = T - V$  e  $H = p^2/2m + V = T + V$  que é

a energia do sistema.

**Exemplo 4.2.4** Hamiltoniana para a força de Lorentz. Considere uma partícula de carga  $e$  sujeita a potenciais  $\Phi$  e  $\mathcal{A}$ . A lagrangiana é dada pela equação (2.15):

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - e\Phi + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathcal{A}.$$

Comparando com o exemplo anterior temos  $V_0 = e\Phi$ ,  $A = m\mathbf{1}$  e  $a = e\mathcal{A}$ . A hamiltoniana fica então

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathcal{A})^2 + e\Phi. \quad (4.15)$$

## 4.3 Hamiltoniana versus Energia

A equação (4.14) mostra que se o tempo não aparecer em  $L$ , não aparecerá também em  $H$  e esta será constante. Nesta seção discutiremos a relação entre a função hamiltoniana e a energia do sistema. Mostraremos que nem sempre  $H$  representa a energia e que o fato de  $H$  poder ser conservada e poder representar a energia são propriedades independentes.

Vamos começar com um exemplo (veja [5], seção 8.1) onde um carrinho é puxado de forma a manter sua velocidade constante  $v_0$ . Sobre o carrinho uma massa pontual  $m$  oscila presa a uma mola de constante elástica  $k$  (figura 4.2).

Em relação ao sistema de referência fixo no chão, a posição da massa  $m$  é  $x$ , enquanto que a distensão da mola é  $y = v_0 t - x$ . A lagrangiana é dada por

$$L(x, \dot{x}, t) = T - V = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} (v_0 t - x)^2.$$

A equação de movimento resulta  $m\ddot{x} = -k(x - v_0 t)$  e a solução é

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + v_0 t$$

com  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Como esperado, a solução corresponde àquela no referencial de repouso do carrinho somada ao seu deslocamento. Como  $L$  é puramente quadrática na velocidade, podemos usar diretamente o resultado do exemplo 4.2.3 para a hamiltoniana:

$$H(x, p_x, t) = T + V = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{2} (v_0 t - x)^2.$$

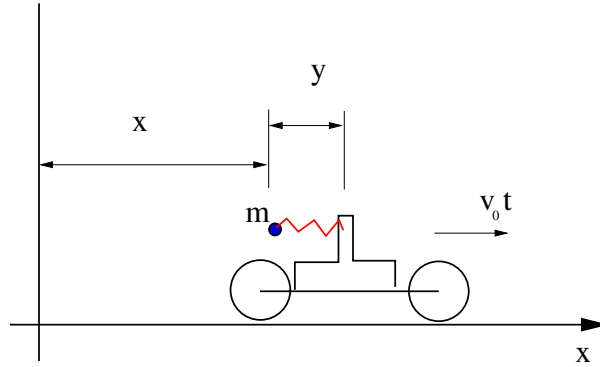


Figura 4.2: Oscilador harmônico preso a um carrinho móvel.

A hamiltoniana é a energia da partícula, que não é conservada devido à força externa que mantém o carrinho movendo-se com velocidade constante. De fato,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = k(v_0 t - x)v_0.$$

É fácil ver que a taxa de variação de energia é igual à potência da força externa. A força externa sobre carrinho é  $-ky$ , pois deve contrabalançar a força exercida pela mola. A potência externa é então  $P = -kyv_0 = -k(v_0 t - x)v_0$ .

Vamos agora escolher  $y = v_0 t - x$  como coordenada generalizada. Então  $\dot{y} = v_0 - \dot{x}$  e

$$L'(y, \dot{y}) = T - V = \frac{m}{2}(v_0 - \dot{y})^2 - \frac{k}{2}y^2$$

que não depende do tempo! Veja que também podemos escrever  $L'$  como

$$L' = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{k}{2}y^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2}v_0^2 t - mv_0 y \right) \equiv L'' + \frac{dF(y, t)}{dt}.$$

Como as equações de movimento de  $L'$  e  $L''$  são idênticas (veja a seção 3.6) obtemos diretamente  $m\ddot{y} = -ky$  e  $y(t) = A' \cos(\omega t + \phi')$  como esperado. O momento conjugado à  $y$  é

$$p_y = \frac{\partial L'}{\partial \dot{y}} = -m(v_0 - \dot{y}) \quad \rightarrow \quad \dot{y} = v_0 + p_y/m.$$

A nova hamiltoniana fica

$$H'(y, p_y) = p_y \dot{y} - L' = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k}{2}y^2 + v_0 p_y$$

que é claramente conservada, mas não representa a energia da partícula no referencial original. Reescrevendo

$$H'(y, p_y) = \frac{(p_y + mv_0)^2}{2m} + \frac{k}{2}y^2 - \frac{m}{2}v_0^2$$

e lembrando que  $p_y + mv_0 = m\dot{y}$ , vemos que  $H'$  nada mais é que a energia medida em um referencial inercial que se move junto com o carrinho (a menos do último termo que é constante).

Essa discussão pode ser generalizada no seguinte sentido: se a função lagrangiana for da forma

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}\dot{q}^T A \dot{q} + \dot{q}^T a - V(q, t) \equiv T - V$$

então, como vimos no exemplo 4.2.3,

$$H = \frac{1}{2}(p - a)^T A^{-1}(p - a) + V.$$

Podemos também escrever diretamente  $T + V$  em termos dos momentos. O resultado é

$$T + V = \frac{1}{2}(p - a)^T A^{-1}(p - a) + V + a^T A^{-1}(p - a).$$

Vemos então que  $H = T + V$  apenas se  $a = 0$ . Isso ocorre, por exemplo, quando a transformação das coordenadas cartesianas para as coordenadas generalizadas é independente do tempo, conforme a discussão no final da seção 3.5. Se a transformação depende do tempo, como no problema do oscilador no carrinho  $H \neq T + V$ . Estamos assumindo sempre que  $V$  não depende das velocidades.

No entanto, podemos olhar para a mesma lagrangiana de outra forma. Suponha que a transformação das coordenadas cartesianas para as coordenadas generalizadas seja independente do tempo mas que o potencial dependa linearmente da velocidade, como no caso da força de Lorentz. Então,  $U = V - \dot{q}^T a$  e  $L = T - U$ , onde a energia cinética corresponde apenas à parte puramente quadrática nas velocidades. No caso particular da força de Lorentz,  $A = m\mathbf{1}$ ,  $V = e\Phi$ ,  $a = e\mathcal{A}$  e

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathcal{A})^2 + e\Phi$$

que é a energia da partícula, enquanto que  $T + U$  não é. Isso ocorre porque o termo  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  na força de Lorentz não realiza trabalho e não contribui para a energia.

A conclusão é que a relação entre hamiltoniana e Energia deve ser olhada com cuidado. Em geral podemos afirmar que:

- Para potenciais independentes da velocidade e transformações  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q)$  independentes do tempo,  $H$  é a energia.
- Para potenciais independentes da velocidade e transformações  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, t)$  dependentes do tempo,  $H$  não é a energia.
- Para a força de Lorentz,  $H$  é a energia, enquanto que  $T + U$  não é.

## 4.4 O Princípio de Hamilton Modificado

O princípio variacional de Hamilton diz que a dinâmica natural descrita por sistemas mecânicos é tal que a ação é um extremo. Em outras palavras, a ação calculada sobre curvas vizinhas à trajetória correta é igual, em primeira ordem, à ação desta trajetória:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Essa propriedade é independente da descrição que utilizamos para formular o movimento, de Lagrange ou de Hamilton. Deve então ser possível obter as equação de Hamilton diretamente a partir desse mesmo princípio.

Usando a equação (4.11) podemos escrever  $L$  em termos de  $q$  e  $p$  como

$$L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)$$

onde  $\dot{q}_i$  deve ser também escrito em termos de  $q$  e  $p$  usando a primeira das equações de Hamilton (4.13). O princípio variacional assume então a forma

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt = 0. \quad (4.16)$$

Podemos tratar a variação de  $S$  nesse formato como a variação de uma função de  $2n$  variáveis independentes e suas derivadas,  $f(q, p, \dot{q}, \dot{p})$ . O método variacional implica que teremos  $2n$  equações de Euler-Lagrange, uma para cada



variável:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0.$$

Para  $f = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)$  obtemos

$$\frac{d}{dt} (p_i) + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt} (0) - \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

que são as equações de Hamilton. Essa versão do princípio variacional é chamada de Princípio de Hamilton Modificado.

Um detalhe que pode passar despercebido nessa derivação das equações de Hamilton é a questão das condições de contorno envolvidas no princípio variacional. O cálculo que fizemos no capítulo 3 para derivar as equações de Euler-Lagrange assume que estamos mantendo as variáveis livres fixas nos instantes inicial e final enquanto consideramos variações da ação para curvas vizinhas. De acordo com a equação (3.1), é necessário fazer uma integração por partes que gera os chamados ‘termos de superfície’. Esses termos se anulam devido à condição de contorno imposta às curvas vizinhas.

Quando aplicamos o princípio de Hamilton na sua forma original, com  $L = L(q, \dot{q}, t)$ , as variáveis livres são os  $q_i$  apenas e impomos  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ . Para aplicar o princípio de Hamilton na forma modificada teríamos que impor, além disso, que  $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$ , o que parece estranho. De fato, se as equações de Lagrange são equivalentes às de Hamilton, elas devem valer nas mesmas condições. De acordo com a equação (3.1) os termos de superfície que aparecem nesse caso são

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i} \delta p_i \right|_{t_1}^{t_2}.$$

No entanto, como  $f = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)$ , temos que  $\partial f / \partial \dot{p}_i = 0$  e não é necessário impor condição alguma sobre  $\delta p$  nos extremos.

Goldstein afirma em seu livro que, embora desnecessário, é útil pensar que  $\delta p$  seja zero nos extremos. Nesse caso podemos somar à  $L$  uma função

qualquer do tipo  $dF(q, p, t)/dt$  que isso não altera as equação de movimento, pois (veja a seção 3.6)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta F|_{t_1}^{t_2} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Esse truque, no entanto, é um tanto problemático. Enquanto é sempre possível encontrar soluções das equações de movimento que satisfaçam as condições de contorno usuais,  $q(t_1) = q_0$  e  $q(t_2) = q_f$ , não é possível em geral encontrar soluções quando tanto as coordenadas quanto os momentos iniciais são fixados. De fato, dados  $(q_0, p_0)$  em  $t = t_1$ , a solução que parte deste ponto é única, e não necessariamente passa por  $(q_f, p_f)$  em  $t = t_2$ . Voltaremos a essa discussão quando desenvolvermos a teoria de transformações canônicas no próximo capítulo. A idéia de impor  $\delta p = 0$  nos extremos é incorreta e também desnecessária.

## 4.5 Notação simplética

As  $2n$  equações de Hamilton de um sistema de  $n$  graus de liberdade podem ser compactadas e reescritas em uma forma mais elegante [5, 3, 14]. Para isso construímos primeiramente um vetor de  $2n$  componentes contendo todas as posições e momentos generalizados e o correspondente operador gradiente:

$$\eta = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad \nabla_\eta = \begin{pmatrix} \partial/\partial q_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial q_n \\ \partial/\partial p_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial p_n \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Vemos que o gradiente de  $H$ ,  $\nabla_\eta H$ , corresponde basicamente ao lado direito das equações de Hamilton (4.13). No entanto,  $\dot{q}_i$  está associado à uma derivada em relação à  $p_i$  e vice-versa. Além disso, uma das equações tem um sinal negativo. Para dar conta desses fatos definimos a matriz

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

onde cada um dos elementos acima é um bloco  $n \times n$ . Explicitamente:

$$J = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & +1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & +1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & +1 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right).$$

A matriz  $J$ , conhecida também como *matriz simplética fundamental*, tem as seguintes propriedades importantes:

$$J^T = -J, \quad J^2 = -1, \quad JJ^T = 1. \quad (4.19)$$

Com essas definições as equações de Hamilton assumem a forma compacta

$$\dot{\eta} = J\nabla_{\eta}H. \quad (4.20)$$

Usaremos essa notação exaustivamente no capítulo 5.

## 4.6 Espaço de Fases e Superfície de Energia

No formalismo Hamiltoniano as coordenadas  $q_i$  e os momentos  $p_i$  são tratados como variáveis independentes. O número de coordenadas  $n$ , que é sempre igual ao número de momentos conjugados, é o número de graus de liberdade do sistema. O espaço vetorial  $\mathcal{F}^{2n}$ , de dimensão  $2n$ , formado pelas coordenadas e momentos é chamado de **espaço de fases**. Um vetor nesse espaço é da forma

$$\eta = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

e as equações de movimento são dadas por (4.20).

Como as equações de Hamilton são de primeira ordem no tempo, o teorema de unicidade de Cauchy-Lipschitz garante que por cada ponto de  $\mathcal{F}^{2n}$  passa uma e apenas uma trajetória. Trajetórias clássicas nunca se cruzam no espaço de fases. De fato, para um conjunto de  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem precisamos fornecer  $2n$  condições iniciais. Tratando cada ponto do espaço de fases como uma condição inicial, podemos imaginar a dinâmica gerada por  $H$  como um fluxo contínuo que ‘arrasta’ as condições iniciais ao longo de suas trajetórias únicas, como um fluido. Mostraremos no próximo capítulo que esse fluido é incompressível.

Trajetórias em  $\mathcal{F}^{2n}$  podem também ser especificadas pelas  $n$  posições iniciais e  $n$  posições finais, como fizemos na análise dos princípios variacionais. No entanto, como veremos a seguir, pode haver mais de uma solução das equações de movimento que conecte esses pontos. Cada uma dessas soluções terá momentos iniciais e finais distintos, não violando a unicidade de soluções no espaço de fases. Alternativamente, podemos especificar  $n$  coordenadas iniciais e  $n$  momentos finais, etc, contanto que forneçamos  $2n$  variáveis independentes.

Para sistemas com hamiltonianas independentes do tempo definimos o conjunto de pontos

$$\Sigma_E = \{\eta \in \mathcal{F}^{2n} \text{ tal que } H(\eta) = E\}$$

como a **superfície de energia**, que tem dimensão  $\dim(\Sigma_E) = 2n - 1$ .

Como o valor de  $H$  sobre qualquer trajetória é constante, a condição inicial define uma superfície de energia  $\Sigma_E$  com  $H(\eta(0)) = E$  e  $\eta(t) \in \Sigma_E$ , i.e., a trajetória ficará sempre em  $\Sigma_E$ . Como todo ponto de  $\Sigma_E$  será transportado pela dinâmica em outro ponto de  $\Sigma_E$ , dizemos que a superfície de energia é invariante pela dinâmica.

**Exemplo 4.8.1** O oscilador harmônico unidimensional. A hamiltoniana é

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

e as equações de movimento

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q.$$

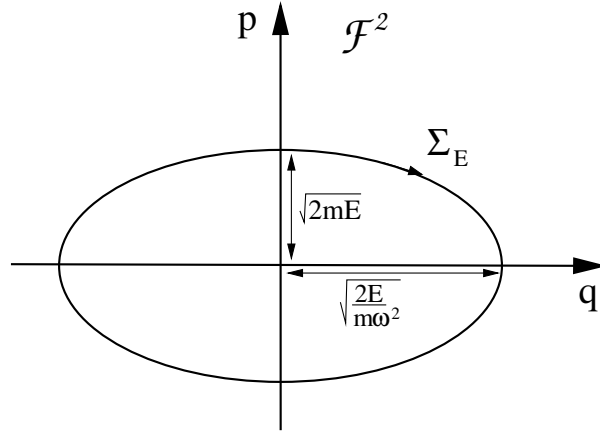


Figura 4.3: Espaço de fases  $\mathcal{F}^2$  e superfície de energia  $\Sigma_E$  para o oscilador harmônico unidimensional.

A solução geral é dada por

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t)$$

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t) - m\omega q_0 \sin(\omega t).$$

Em notação simplética isso fica simplesmente  $\eta(t) = A\eta_0$  onde

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) \\ -m\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \eta_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}.$$

A matriz  $A$  é periódica,  $A(t) = A(t + 2\pi/\omega)$  e ‘propaga’ a condição inicial  $\eta_0$ . Como a energia é a mesma em todo ponto da órbita temos

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} \equiv E$$

ou ainda

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\omega^2} = 1$$

que é a equação de uma elipse com semi-eixos  $a = \sqrt{2E/m\omega^2}$  e  $b = \sqrt{2mE}$ , definindo a superfície de energia  $\Sigma_E$ , conforme ilustra a figura 4.3.  $\Sigma_E$  tem a topologia de um círculo, também chamado de 1-toro,  $T^1$ . Note que,

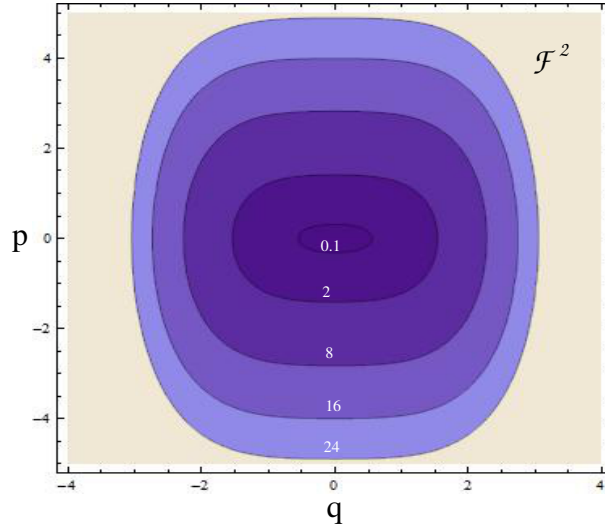


Figura 4.4: Espaço de fases  $\mathcal{F}^2$  e algumas superfícies de energia (valor de  $E$  indicado) para o oscilador anarmônico unidimensional com  $\lambda = \omega = 1$  e  $m = 1/2$ .

neste exemplo, a trajetória cobre totalmente a superfície de energia após um tempo suficientemente longo (neste caso basta um período) e o sistema é dito *ergódico*.

**Exemplo 4.8.2** Um oscilador anarmônico unidimensional. Considere um oscilador harmônico perturbado por um termo quártico:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \frac{\lambda q^4}{4}.$$

As equações de movimento são

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q - \lambda q^3.$$

Como  $H$  é positiva (soma de quadrados), para um dado valor  $H = E$  a posição e o momento ficam limitados aos valores  $|p| < \sqrt{2mE}$  e  $q^2 < \sqrt{m^2\omega^4/\lambda^2 + 4E/\lambda} - m\omega^2/\lambda$ . No entanto, a superfície de energia não é mais uma elipse, a não ser para energias  $E \ll m^2\omega^4/\lambda$ . A figura 4.4 mostra

algumas superfícies de energia para  $\lambda = \omega = 1$  e  $m = 1/2$ .

**Exemplo 4.8.3** O oscilador anarmônico puro. Seja

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \lambda q^{2k}$$

onde  $k$  é inteiro maior ou igual à 1. O movimento é claramente periódico, pois a superfície de energia é limitada (novamente  $H$  é uma soma de quadrados). Para  $k = 1$  o oscilador é harmônico. Para  $k = 2$  as superfícies de energia são parecidas com a do problema anterior no limite de altas energias. O interessante desse problema é que podemos calcular exatamente o período do movimento para qualquer valor de  $k$ . Para isso escrevemos  $p = m \, dx/dt$  e usamos o método de integração descrito na seção 1.5, equação (1.12):

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^{q(t)} \frac{dx}{\sqrt{(E - \lambda x^{2k})}}.$$

Para calcular o período temos que integrar sobre toda a volta. Como o problema é simétrico basta integrar de  $q_0 = 0$  até  $q_{max} = (E/\lambda)^{1/2k}$  e multiplicar o resultado por 4:

$$\tau(E) = 4\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^{(E/\lambda)^{1/2k}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - \lambda x^{2k}/E)}}.$$

Fazendo a substituição  $u = x(\lambda/E)^{1/2k}$  obtemos

$$\tau(E) = 2\sqrt{2m}\mathcal{I}_k E^{\frac{1-k}{2k}} \lambda^{-\frac{1}{2k}}$$

onde

$$\mathcal{I}_k = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{2k}}}$$

depende apenas da ordem da não-linearidade, e independe de quaisquer outros parâmetros do problema. Para  $k = 1$  temos  $\mathcal{I}_1 = \pi/2$  e  $\tau(E) = \pi\sqrt{2m/\lambda}$ . Escolhendo  $\lambda = m\omega^2/2$  recuperamos  $\tau = 2\pi/\omega$ , que independe da energia. Para  $k \leq 2$  o período de oscilação diminui com a energia, embora a amplitude do movimento aumente.

Para  $k = 2$ ,  $\mathcal{I}_1 = \sqrt{\pi}\Gamma(5/4)/\Gamma(3/4) \approx 1.311$  e  $\tau(E) \sim E^{-1/4}$ . No limite em que  $k$  vai a infinito o potencial se aproxima de um poço de paredes retas

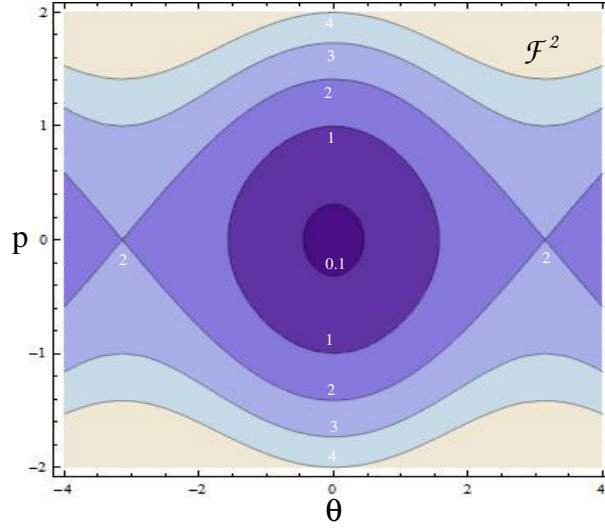


Figura 4.5: Espaço de fases do pêndulo e algumas superfícies de energia (valor de  $E$  indicado) para  $mga = 1$  e  $ma^2 = 1/2$ .

(o poço infinito, problema tradicional na mecânica quântica). Nesse caso temos que escolher  $\lambda = 1$  e obtemos  $\mathcal{I}_\infty = 1$  e  $\tau(E) = 2\sqrt{2mE}^{-1/2}$ .

**Exemplo 4.8.4** O pêndulo – veja o exemplo 2.3.2. A lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga(\cos \theta - 1)$$

e a hamiltoniana

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} - mga(\cos \theta - 1)$$

onde somamos a constante  $mga$  ao potencial por conveniência. As equações de movimento

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = p_\theta/ma^2$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mga \sin \theta$$

mostram que existem dois pontos de equilíbrio:  $(\theta, p_\theta) = (0, 0)$  e  $(\theta, p_\theta) = (0, \pi)$ . As superfícies de energia para  $E < 2mga$  são limitadas, correspondendo a oscilações do pêndulo, enquanto que para  $E > 2mga$  as superfícies são abertas, correspondendo a rotações do pêndulo. Para ver isso notamos



que os pontos de retorno, onde o pêndulo atinge sua maior amplitude, é determinado por  $p_\theta = 0$ . Fixando  $H = E$  isso resulta em  $\cos \theta = 1 - E/mga$ , que só tem solução se  $0 < E < 2mga$ . A superfície de energia  $E = 2mga$  é chamada de *separatriz* e, na verdade é composta de 3 partes disjuntas: o ponto de equilíbrio em  $\theta = \pi$ , a trajetória no sentido horário com  $E = 2mga$  e a trajetória no sentido anti-horário com  $E = 2mga$ .

**Exemplo 4.8.5** O oscilador harmônico bi-dimensional. Considere o sistema de dois graus de liberdade

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m}{2}(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2).$$

A solução geral pode ser novamente escrita na forma simplética como  $\eta(t) = A(t)\eta_0$  onde agora

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & 0 & \frac{1}{m\omega_1} \sin(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_2 t) & 0 & \frac{1}{m\omega_2} \sin(\omega_2 t) \\ -m\omega_1 \sin(\omega_1 t) & 0 & \cos(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & -m\omega_2 \sin(\omega_2 t) & 0 & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

e  $\eta_0^T = (q_{10}, q_{20}, p_{10}, p_{20})$ .

A matriz de propagação  $A(t)$ , no entanto, não é necessariamente periódica como no caso unidimensional. Na verdade,  $A(t)$  só será periódica se  $\alpha \equiv \omega_1/\omega_2$  for um número racional, da forma  $\alpha = r/s$  com  $r$  e  $s$  inteiros. De fato, se

$$\omega_1 = r\omega_0 \quad e \quad \omega_2 = s\omega_0$$

então é fácil verificar que  $A(t + 2\pi/\omega_0) = A(t)$ . Se  $\alpha$  for irracional não há periodicidade e o movimento é dito *quase periódico*.

O espaço de fases  $\mathcal{F}^4$  tem dimensão 4 e a superfície de energia, dada por

$$1 = \frac{p_1^2}{2mE} + \frac{p_2^2}{2mE} + \frac{q_1^2}{2E/m\omega_1^2} + \frac{q_2^2}{2E/m\omega_2^2}$$

é a superfície tri-dimensional de um elipsóide mergulhado em quatro dimensões.

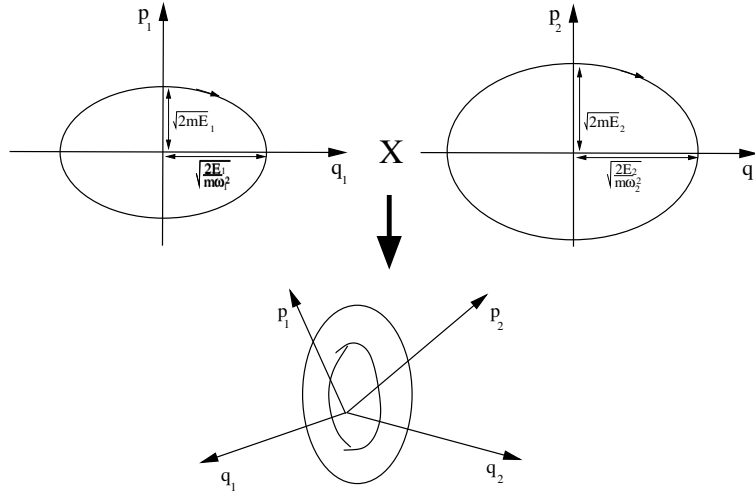


Figura 4.6: Trajetória do oscilador 2D projetada nos planos conjugados  $q_1$ - $p_1$  e  $q_2$ - $p_2$ . O produto direto dos dois toros  $T^1$  forma o toro  $T^2$  no espaço de fases quadri-dimensional.

Reescrevendo  $H$  como a soma de dois osciladores independentes,

$$H(q, p) = \left[ \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2 q_1^2}{2} \right] + \left[ \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_2^2 q_2^2}{2} \right] \equiv H_1 + H_2$$

podemos mostrar, usando diretamente as equações de movimento, que  $dH_1/dt = dH_2/dt = 0$ , de forma que a energia total se distribui em duas partes que são conservadas independentemente. Assim temos duas constantes de movimento independentes

$$E_1 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2 q_1^2}{2}$$

$$E_2 = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_2^2 q_2^2}{2}$$

e o movimento global fica restrito a uma superfície menor que a superfície de energia  $\Sigma_E$ , que tem dimensão 3. Quando projetamos a trajetória em cada um dos planos conjugados  $q_i$ - $p_i$ , temos o análogo ao oscilador unidimensional, como ilustrado na figura 4.6. O movimento no espaço de fases ocorre na superfície 2D formada pelo produto direto dos dois toros  $T^1$ , que é um toro  $T^2$ .

Mantendo a energia total fixa, podemos dividi-la entre  $E_1$  e  $E_2$  de várias maneiras. Cada divisão corresponde a um toro  $T^2$  diferente, pois os semi-

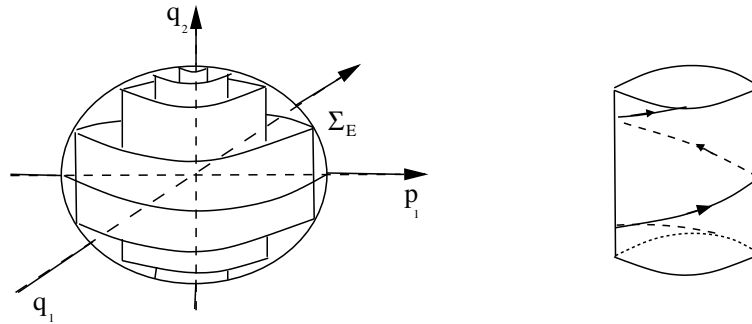


Figura 4.7: Superfície de energia 3D projetada no espaço  $q_1$ - $p_1$ - $q_2$  folheada por toros 2D. À direita uma trajetória circulando em um dos toros, também projetado no mesmo espaço 3D.

eixos das elipses dependem dos valores de  $E_1$  e  $E_2$ . Assim, a superfície de energia  $\Sigma_E$  pode ser decomposta em uma família a um parâmetro de toros, conforme ilustrado na figura 4.7. Nesta figura vemos a projeção de  $\Sigma_E$  no espaço  $q_1$ - $p_1$ - $q_2$ , que aparece como um esferóide maciço. Uma trajetória típica fica circulando no plano  $q_1$ - $p_1$  enquanto a coordenada  $q_2$  também oscila para cima e para baixo. O movimento gera um cilindro, que é mostrado à direita, e que é a projeção do toro  $T^2$  nesse espaço 3D. Mudando um pouco a distribuição de  $E$  entre  $E_1$  e  $E_2$  mudamos o toro. A união de todos esses toros gera  $\Sigma_E$  em uma estrutura parecida com uma cebola. Discutiremos novamente a estrutura dos toros na superfície de energia no capítulo 8.

## 4.7 Exercícios

1. O ponto de suspensão de um pêndulo plano simples de comprimento  $l$  e massa  $m$  é restrito a mover-se sobre a parábola  $z = ax^2$  no plano vertical (Exemplo 2.3.6). Obtenha a hamiltoniana.
2. O ponto de suspensão de um pêndulo plano simples de comprimento  $l$  e massa  $m$  é restrito a mover-se sobre um trilho horizontal (fig. 4.8). Esse ponto é ainda conectado por uma barra sem massa de comprimento  $a$  a um anel de raio  $a$  e massa  $M$  que pode girar livremente sobre seu centro fixado no trilho. Obtenha a hamiltoniana.
- 3.

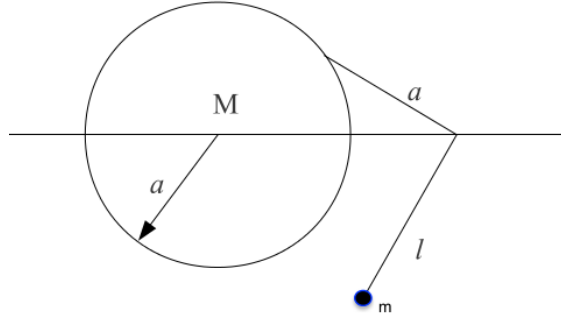


Figura 4.8: Pêndulo com ponto de suspensão se movendo em um trilho.

4. Um cilindro uniforme de densidade  $\rho$  e raio  $a$  é montado de forma a poder rodar livremente sobre seu eixo vertical (fig. 4.9). No lado externo do cilindro um trilho espiral é fixado. Por esse trilho uma bolinha de massa  $m$  desliza sem atrito sob a ação da gravidade. Escolha um sistema de coordenadas apropriado e encontre a lagrangiana e a hamiltoniana do problema. Resolva as equações de movimento.
5. Considere o problema gravitacional de dois corpos com massas  $M$  e  $m$ . Suponha que  $M \gg m$ , de forma que  $M$  possa ser considerado fixo no centro de massa do sistema. Escolha um sistema de coordenadas  $\vec{q} = (q_1, q_2)$  com centro em  $M$  e que gira com frequência angular  $\Omega$  no plano x-y da órbita de  $m$ . Mostre que a lagrangiana nessas coordenadas pode ser escrita como

$$L = \frac{m}{2} \left[ \dot{\vec{q}} + (\vec{\Omega} \times \vec{q}) \right]^2 + \frac{GMm}{q}$$

onde  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$ . Obtenha a hamiltoniana.

6. Partindo da lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$ , use a teoria de transformações de Legendre para construir uma formulação onde as variáveis independentes sejam  $\dot{q}_i$  e  $\dot{p}_i$ . Chamando de  $G(\dot{q}, \dot{p}, t)$  a nova ‘hamiltoniana’, encontre as equações de movimento em termos de  $G$ .
7. Mostre que a ação para o oscilador harmônico é dada por

$$S(q_1, q_2, t) = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega t)} \left[ (q_1^2 + q_2^2) \cos(\omega t) - 2q_1 q_2 \right]$$

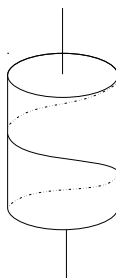


Figura 4.9: Cilindro uniforme de densidade  $\rho$  e raio  $a$  montado de forma a poder rodar livremente sobre seu eixo vertical.

e verifique as relações (3.20).

8. Obtenha a hamiltoniana para o problema 2.1 do capítulo 2.
9. Obtenha a hamiltoniana para o problema 2.2 do capítulo 2.
10. Obtenha a hamiltoniana para o problema 2.3 do capítulo 2.
11. Obtenha a hamiltoniana para o problema 2.4 do capítulo 2.
12. Obtenha a hamiltoniana para o problema 2.5 do capítulo 2.
13. Obtenha a hamiltoniana para o problema 2.6 do capítulo 2.
14. Obtenha a hamiltoniana para o problema 2.7 do capítulo 2.
15. Obtenha a hamiltoniana para o problema 2.8 do capítulo 2.
16. Obtenha a hamiltoniana para o problema 3.2 do capítulo 3.



## Capítulo 5

# Transformações Canônicas

No formalismo Lagrangiano, qualquer escolha de coordenadas generalizadas pode ser utilizada para descrever o movimento de um sistema. As equações de Lagrange mantêm sua forma original

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (5.1)$$

para as coordenadas  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  e para qualquer outro conjunto  $s_k = s_k(q_1, q_2, \dots, q_n)$  se a transformação for inversível:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_i} = 0. \quad (5.2)$$

No formalismo Hamiltoniano isso não é sempre verdade, pois os momentos  $p_k$  estão atrelados à escolha das coordenadas pela definição  $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ . Podemos então nos perguntar quando a transformação do conjunto de coordenadas canônicas  $q_k, p_k$  para um novo conjunto  $Q_k, P_k$ , preserva as equações de Hamilton, isto é, supondo que

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (5.3)$$

quais as propriedades da transformação geral

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_k(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) \\ P_k &= P_k(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

para que a dinâmica seja dada por

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial K}{\partial P_k} \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \quad (5.5)$$

para alguma nova função hamiltoniana  $K(Q, P, t)$ . As transformações com essa propriedade são chamadas de canônicas.

Embora as transformações canônicas não tenham a generalidade das transformações de coordenadas das equações de Lagrange, elas incluem a possibilidade de misturar coordenadas e momentos na definição das novas variáveis, o que traz grandes vantagens. Uma das aplicações importantes da teoria de transformações canônicas consiste em buscar uma transformação que leve a nova hamiltoniana a depender apenas dos novos momentos, mas não das novas coordenadas. Quando isso é possível, as equações de Hamilton podem ser imediatamente integradas, pois os novos momentos serão constantes:

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial K}{\partial Q_k} = 0 \quad \rightarrow P_k = P_{k0} = \text{const.}, \quad (5.6)$$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial K}{\partial P_k} \equiv \Omega_k(P) = \text{const} \quad \rightarrow Q_k(t) = Q_{k0} + \Omega_k(P)t.$$

A solução do problema é dada pela transformação inversa, e não envolve integrações além das triviais acima:

$$q_k = q_k(Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t), P_{10}, P_{20}, \dots, P_{n0}, t) \quad (5.7)$$

$$p_k = p_k(Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t), P_{10}, P_{20}, \dots, P_{n0}, t).$$

## 5.1 Funções Geratrizes

Uma maneira prática e elegante de construir transformações canônicas é explorando uma liberdade oferecida pelo princípio variacional de Hamilton [5]. Lembramos que as equações de Hamilton podem ser obtidas impondo-se que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \right] dt = 0. \quad (5.8)$$

com  $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$ . Lembramos ainda que podemos acrescentar ao integrando qualquer função do tipo  $dF(q, t)/dt$  sem alterar as equações de movimento resultantes. Isso ocorre porque

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q, t)}{dt} dt = \delta [F(q_2, t_2) - F(q_1, t_1)] = 0. \quad (5.9)$$



já que as variações são feitas com  $q_k(t_1)$  e  $q_k(t_2)$  fixos.

Queremos agora definir novas variáveis canônicas  $Q, P$  que devem satisfazer as equações de Hamilton para uma nova função hamiltoniana  $K(Q, P, t)$ . Então basta impor que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K(Q, P, t) \right] dt = 0. \quad (5.10)$$

com  $\delta Q_k(t_1) = \delta Q_k(t_2) = 0$ . Como garantir a validade de (5.10)? A maneira mais simples é impor que o integrando em (5.10) seja igual ao de (5.8):

$$\sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K(Q, P, t) = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(q, p, t). \quad (5.11)$$

Essa solução, no entanto, é trivial, pois implica a transformação identidade, onde  $Q_k = q_k$ ,  $P_k = p_k$  e  $K = H$ . Uma possibilidade um pouco mais geral é impor que os integrandos sejam apenas proporcionais, i.e.,

$$\sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K(Q, P, t) = \lambda \left[ \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \right]. \quad (5.12)$$

com  $\lambda$  constante. A solução dessa equação corresponde a transformações de escala:

$$Q_k = \mu q_k \quad P_k = \nu p_k \quad K(Q, P) = \mu\nu H(Q/\mu, P/\nu) \quad (5.13)$$

com  $\lambda = \mu\nu$ .

Finalmente temos o caso mais geral onde usamos a liberdade dada pela equação (5.9):

$$\sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K(Q, P, t) = \lambda \left[ \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \right] - \frac{dF_1(q, Q, t)}{dt}. \quad (5.14)$$

já que tanto as coordenadas originais quanto as novas devem ser fixas para que as equações de Hamilton sejam obtidas. De fato, integrando dos dois lados de  $t_1$  a  $t_2$  e fazendo a variação da ação temos

$$\begin{aligned} \delta \int (\sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K) dt &= \lambda \delta \int (\sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H) dt - \frac{\partial F_1(q_2, Q_2, t_2)}{\partial Q_2} \delta Q_2 \\ &\quad - \frac{\partial F_1(q_2, Q_2, t_2)}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial F_1(q_1, Q_1, t_1)}{\partial Q_1} \delta Q_1 + \frac{\partial F_1(q_1, Q_1, t_1)}{\partial q_1} \delta q_1. \end{aligned}$$

Impondo que a variação da ação nas coordenadas originais seja nula quando  $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$  obtemos

$$\delta \int \left( \sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K \right) dt = - \frac{\partial F_1(q_2, Q_2, t_2)}{\partial Q_2} \delta Q_2 + \frac{\partial F_1(q_1, Q_1, t_1)}{\partial Q_1} \delta Q_1,$$

o que mostra que a variação da ação nas novas coordenadas também será nula quando  $\delta Q_1 = \delta Q_2 = 0$ .

Como a constante multiplicativa  $\lambda$  apenas muda a escala das coordenadas e momentos, vamos fixar  $\lambda = 1$  e considerar apenas as consequências da função  $F_1(q, Q, t)$  na mudança de variáveis. Escrevendo a derivada total explicitamente obtemos

$$\sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K(Q, P, t) = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Essa equação é satisfeita se

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \\ P_k &= - \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

A transformação  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  é então definida implicitamente pela função geratriz  $F_1(q, Q, t)$ . As primeiras  $n$  equações acima podem ser invertidas para obter  $Q_k = Q_k(q, p, t)$ . Substituindo esse resultado no segundo conjunto de equações obtemos  $P_k = P_k(q, p, t)$ . Note que a nova hamiltoniana  $K$  não é apenas a hamiltoniana original calculada nas novas variáveis: se a transformação depender explicitamente do tempo ganhamos o termo extra  $\partial F_1 / \partial t$ . As equações de movimento seguem do princípio variacional:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial K}{\partial P_k} \quad \dot{P}_k = - \frac{\partial K}{\partial Q_k}. \tag{5.16}$$

e a transformação é dita canônica.

Um exemplo simples e importante de aplicação dessa teoria é dada pela escolha  $F_1 = qQ$ . Aplicando as equações (5.15) obtemos a transformação

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = Q \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -q. \quad (5.17)$$

Esse exemplo mostra que as coordenadas e os momentos são tratados de forma equivalente no formalismo Hamiltoniano, podendo ser convertidos um no outro por uma simples transformação canônica.

A derivação que fizemos acima, e que resulta em  $F_1(q, Q, t)$  como função geratriz, parte da imposição do princípio de Hamilton modificado nos dois conjuntos de variáveis. Isso, por sua vez, requer a extremização da ação frente a caminhos que tenham as coordenadas iniciais e finais fixas. Daí a liberdade de adicionarmos a função  $F_1(q, Q, t)$ . O exemplo acima sugere que devam existir outras formas equivalentes de gerar transformações canônicas onde a função geratriz dependa de outros conjuntos de variáveis, como por exemplo,  $F_2(q, P, t)$ . Essas diferentes formas para as funções geratrizes são úteis em diversas situações, como veremos adiante. Veremos agora como generalizar o procedimento acima para obter essas formas alternativas.

O ponto de partida para nossa demonstração baseia-se do fato de que as equações de Hamilton também podem ser obtidas a partir da imposição

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{k=1}^n -q_k \dot{p}_k - H(q, p, t) \right] dt = 0. \quad (5.18)$$

com  $\delta p_k(t_1) = \delta p_k(t_2) = 0$ . Essa forma alternativa do princípio de Hamilton é análoga à forma original com a troca  $p \rightarrow q$  e  $q \rightarrow -p$  e o leitor pode facilmente verificar que ele leva às mesmas equações de movimento de Hamilton.

Voltando às transformações canônicas, podemos agora combinar essas diferentes formas do princípio variacional. Por exemplo, podemos impor que

$$\sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) = \sum_{k=1}^n -Q_k \dot{P}_k - K(Q, P, t) + \frac{dF_2(q, P, t)}{dt}. \quad (5.19)$$

onde  $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$  para as variáveis originais e  $\delta P_k(t_1) = \delta P_k(t_2) = 0$  para as novas coordenadas. Note que agora a liberdade é de adicionar a derivada total de uma função de  $q$ ,  $P$  e  $t$ . Escrevendo a derivada total

explicitamente e igualando os termos obtemos

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \\ Q_k &= \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Invertendo a escolha acima e fazendo  $\delta p_k(t_1) = \delta p_k(t_2) = 0$  para as variáveis originais e  $\delta Q_k(t_1) = \delta Q_k(t_2) = 0$  para as novas coordenadas obtemos

$$\sum_{k=1}^n -q_k \dot{p}_k - H(q, p, t) = \sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K(Q, P, t) + \frac{dF_3(p, Q, t)}{dt} \quad (5.21)$$

que resulta em

$$\begin{aligned} q_k &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_k} \\ P_k &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}.$$

Finalmente, escolhendo os momentos fixos tanto nas variáveis originais quanto nas novas obtemos

$$\sum_{k=1}^n -q_k \dot{p}_k - H(q, p, t) = \sum_{k=1}^n -Q_k \dot{P}_k - K(Q, P, t) + \frac{dF_4(p, P, t)}{dt} \quad (5.23)$$

que resulta em

$$\begin{aligned} q_k &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_k} \\ Q_k &= \frac{\partial F_4}{\partial P_k} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

As funções geratrizes  $F_1(q, Q, t)$ ,  $F_2(q, P, t)$ ,  $F_3(p, Q, t)$  e  $F_4(p, P, t)$  formam as quatro maneiras fundamentais de se produzir transformações canônicas. A nomenclatura com os índices de 1 a 4 foi introduzida por Goldstein e tornou-se tradicional. Em sistemas com mais de um grau de liberdade essas quatro formas podem ainda ser combinadas. Para  $n=2$ , por exemplo, podemos utilizar a forma 1 para  $q_1$  e  $p_1$  e a forma 2 para  $q_2$  e  $p_2$ :

$$p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - H(q, p, t) = P_1\dot{Q}_1 - Q_2\dot{P}_2 - K(Q, P, t) + \frac{dF(q_1, q_2, Q_1, P_2, t)}{dt}$$

cujas equações ficam

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial F}{\partial q_1} & p_2 &= \frac{\partial F}{\partial q_2} \\ P_1 &= -\frac{\partial F}{\partial Q_1} & Q_2 &= \frac{\partial F}{\partial P_2} \\ K &= H + \frac{\partial F}{\partial t}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

O quadro abaixo mostra um resumo das quatro funções geratrizes básicas:

|                |                                      |                                      |                                     |
|----------------|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| $F_1(q, Q, t)$ | $p_k = \partial F_1 / \partial q_k$  | $P_k = -\partial F_1 / \partial Q_k$ | $K = H + \partial F_1 / \partial t$ |
| $F_2(q, P, t)$ | $p_k = \partial F_2 / \partial q_k$  | $Q_k = \partial F_2 / \partial P_k$  | $K = H + \partial F_2 / \partial t$ |
| $F_3(p, Q, t)$ | $q_k = -\partial F_3 / \partial p_k$ | $P_k = -\partial F_3 / \partial Q_k$ | $K = H + \partial F_3 / \partial t$ |
| $F_4(p, P, t)$ | $q_k = -\partial F_4 / \partial p_k$ | $Q_k = \partial F_4 / \partial P_k$  | $K = H + \partial F_4 / \partial t$ |

## 5.2 Exemplos de Transformações Canônicas

A seguir apresentamos exemplos simples de transformações canônicas que ilustram o papel das funções geratrizes associadas.

**Transformação identidade:**  $F_2(q, P) = qP$

$$p = \partial F_2 / \partial q = P \quad Q = \partial F_2 / \partial P = q$$

**Troca de coordenada por momento:**  $F_1(q, Q) = qQ$

$$p = \partial F_1 / \partial q = Q \quad P = -\partial F_1 / \partial Q = -q$$

**Transformações pontuais:**  $F_2(q, P) = f(q)P$

$$p = \partial F_2 / \partial q = P \partial f / \partial q \quad Q = \partial F_2 / \partial P = f(q)$$

**Evolução temporal infinitesimal:**  $F_2(q, P) = qP + \epsilon H(q, P)$

$$p = P + \epsilon \partial H(q, P) / \partial q$$

$$Q = q + \epsilon \partial H(q, P) / \partial P.$$

Como a transformação é próxima da identidade, podemos substituir  $P$  por  $p$  na hamiltoniana, gerando um erro da ordem de  $\epsilon^2$  na transformação:

$$p = P + \epsilon \partial H(q, p) / \partial q + O(\epsilon^2)$$

$$Q = q + \epsilon \partial H(q, p) / \partial p + O(\epsilon^2).$$

Usando agora as equações de Hamilton e reordenando obtemos

$$P = p + \epsilon \dot{p} + O(\epsilon^2) \approx p(t + \epsilon)$$

$$Q = q + \epsilon \dot{q} + O(\epsilon^2) \approx q(t + \epsilon).$$

**Evolução temporal:**  $F(q, Q, t) = S(q, Q, t)$

Seja  $S(q, Q, t)$  a ação de uma trajetória com  $q(t_1) = Q$  e  $q(t_2) = q$ . Como a ação satisfaz as relações

$$p(t_1) = -\partial S / \partial q(t_1) \quad p(t_2) = \partial S / \partial q(t_2)$$

vemos que a ação é a função geratriz da evolução temporal, do tipo  $F_1$ . As coordenadas originais  $(q, p)$  representam o ponto no espaço de fases no instante  $t_2$  enquanto  $(Q, P)$  representam o ponto inicial no instante  $t_1$ :

$$P = -\partial S / \partial Q \quad p = \partial S / \partial q.$$

O fato de que a evolução temporal ocorre ‘de traz para frente’ será reinterpretado adiante quando estudarmos a equação de Liouville.

### Variáveis de ação e ângulo para o oscilador harmônico

Seguindo a motivação inicial para misturar coordenadas e momentos em uma mudança de variáveis, procuramos aqui uma transformação de  $(q, p)$  para  $(Q, P)$  tal que  $K = K(P)$  para o oscilador harmônico. Como

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

procuramos uma transformação do tipo

$$p = f(P) \cos Q \quad q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q,$$

que leva a nova hamiltoniana a

$$K = \frac{1}{2m} f^2(P).$$

A função  $f(P)$  deve ser escolhida de tal forma que a transformação seja canônica. Dividindo uma equação pela outra obtemos  $p = m\omega q \cot Q$ , o que nos leva a procurar uma função geratriz do tipo  $F_1$ :

$$p = m\omega q \cot Q = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad \rightarrow \quad F_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \frac{1}{\sin^2 Q}.$$

Da segunda equação obtemos  $q = q(Q, P)$ . Substituindo na expressão para  $p = p(q, Q)$  completamos a transformação:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

$$p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q.$$

Isso mostra que a função procurada é  $f(P) = \sqrt{2Pm\omega}$  e que  $K(P) = \omega P$ . Escrevendo as equações de Hamilton para  $K$  obtemos  $P = \text{const.} = E/\omega$  e  $Q = Q_0 + \omega t$ . Substituindo de volta na transformação temos a solução do problema:

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(Q_0 + \omega t)$$

$$p = \sqrt{2Em} \cos(Q_0 + \omega t).$$

Devido às suas unidades dimensionais, as variáveis  $Q$  e  $P$  são chamadas de variáveis de ângulo e ação e são geralmente renomeadas para  $\phi$  e  $I$ .

### Funções geratrizes e transformações de Legendre

Podemos obter  $F_2(q, P, t)$  como uma transformação de Legendre de  $F_1(q, Q, t)$  onde tiramos  $Q$  e colocamos  $-P$  no seu lugar:

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + QP \quad \text{com} \quad -P = \frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

Calculando a diferencial dos dois lados obtemos

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} dP = \frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + P dQ + Q dP.$$

O segundo e o terceiro termos à direita se cancelam. Igualando termos com a mesma diferencial obtemos as regras de transformação para  $F_2$ :

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{\partial F_1}{\partial q} = p \quad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q$$

Da mesma forma podemos mostrar que todas as funções  $F_i$  conectam-se por transformações de Legendre similares.



### 5.3 Formulação Simplética

O uso do princípio variacional de Hamilton nos permite construir transformações canônicas a partir de funções geratrizes arbitrárias envolvendo sempre uma das variáveis originais ( $q$  ou  $p$ ) e uma das novas ( $Q$  ou  $P$ ). No entanto, dada uma transformação, como saber se ela é canônica diretamente? A resposta a essa pergunta nos levará ao conceito de *Colchetes de Poisson* [5, 17, 18].

Seja então

$$Q_i = Q_i(q, p) \quad P_i = P_i(q, p) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.26)$$

uma mudança de variáveis arbitrária. Consideraremos por enquanto apenas transformações independentes do tempo. Derivando  $Q_i$  em relação ao tempo e usando a convenção de soma sobre índices repetidos obtemos:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \dot{p}_k = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (5.27)$$

Escrevendo  $H(q, p) = K(Q(q, p), P(q, p))$  vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_k} &= \frac{\partial K}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} + \frac{\partial K}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} \\ \frac{\partial H}{\partial q_k} &= \frac{\partial K}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} + \frac{\partial K}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

substituindo em (5.27) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \left[ \frac{\partial K}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} + \frac{\partial K}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} \right] - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \left[ \frac{\partial K}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} + \frac{\partial K}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right] \\ &= \frac{\partial K}{\partial Q_l} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \right] + \frac{\partial K}{\partial P_l} \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Analogamente obtemos

$$\dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial Q_l} \left[ \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \right] + \frac{\partial K}{\partial P_l} \left[ \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right]. \quad (5.30)$$

Para que essas equações sejam equivalentes às equações de Hamilton  $\dot{Q}_i = \partial K / \partial P_i$  e  $\dot{P}_i = -\partial K / \partial Q_i$  devemos impor que

$$\{P_i, P_l\}_{q,p} = \{Q_i, Q_l\}_{q,p} = 0 \quad e \quad \{Q_i, P_l\}_{q,p} = \delta_{i,l} \quad (5.31)$$

onde definimos os **Colchetes de Poisson** entre duas funções  $F$  e  $G$  por

$$\{F, G\}_{q,p} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right]. \quad (5.32)$$

Note a semelhança entre os colchetes de Poisson das novas variáveis e os comutadores entre os operadores de posição e momento da mecânica quântica.

Toda essa manipulação algébrica pode ser refeita de forma compacta e elegante usando a formulação simplética, introduzida na seção 4.4. Vamos fazer isso agora de forma geral, permitindo que a transformação dependa também do tempo. Sejam (veja a equação (4.17))

$$\eta = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

vetores de dimensão  $2n$  no espaço de fases. A transformação canônica é dada por  $\xi = \xi(\eta, t)$  e chamaremos de  $M_{ij} = \partial \xi_i / \partial \eta_j$  a matriz jacobiana da transformação. As equações de Hamilton nas variáveis originais são dadas por  $\dot{\eta} = J \partial H / \partial \eta$  onde a matriz  $J$  e o gradiente são dados por (veja (4.18))

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} \partial / \partial q \\ \partial / \partial p \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Para que a transformação seja canônica precisamos mostrar que  $\dot{\xi} = J \partial K / \partial \xi$ . Sabemos que  $K$  não será igual a  $H$  se a transformação depender do tempo explicitamente. Calculando a derivada temporal de  $\xi$  obtemos

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = M_{ij} \dot{\eta}_j + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = M_{ij} J_{jk} \frac{\partial H}{\partial \eta_k} + \frac{\partial \xi_i}{\partial t}. \quad (5.35)$$

Escrevemos agora a nova hamiltoniana  $K$  em termos de  $H$  como

$$K(\xi, t) = H(\eta(\xi, t), t) + A(\xi, t) \quad (5.36)$$

onde  $A$  é uma função arbitrária que devemos determinar. Invertendo temos

$$H(\eta, t) = K(\xi(\eta, t), t) - A(\xi(\eta, t), t). \quad (5.37)$$

Derivando  $H$  em relação a  $\eta_k$  e usando a definição de  $M$  obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \frac{\partial K}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_k} - \frac{\partial A}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_k} = (M^T)_{kj} \left( \frac{\partial K}{\partial \xi_j} - \frac{\partial A}{\partial \xi_j} \right). \quad (5.38)$$

Escrevendo (5.35) e (5.38) em notação matricial vemos que

$$\dot{\xi} = MJ \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = MJM^T \frac{\partial K}{\partial \xi} - MJM^T \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (5.39)$$

A condição para que a transformação seja canônica é então

$$MJM^T = J. \quad (5.40)$$

As matrizes que satisfazem a equação (5.40) são ditas simpléticas e formam um grupo, chamado de grupo simplético ou grupo das transformações canônicas. Além disso, temos uma equação para a correção  $A$  na hamiltoniana caso a transformação dependa explicitamente do tempo:

$$J \frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (5.41)$$

Note que a equação (5.40) é equivalente às relações (5.31), pois o colchetes de Poisson também pode ser escrito na notação simplética como

$$\{F, G\}_\eta = \frac{\partial F^T}{\partial \eta} J \frac{\partial G}{\partial \eta} \quad (5.42)$$

onde o vetor à esquerda é transposto, vetor linha (quando for possível omitiremos o símbolo ‘T’ para simplificar a notação). Para  $F = \xi_k$  e  $G = \xi_l$  teremos, usando a notação de Einstein,

$$\{\xi_k, \xi_l\}_\eta = \frac{\partial \xi_k^T}{\partial \eta_m} J_{mn} \frac{\partial \xi_l}{\partial \eta_n} = M_{mk}^T J_{mn} M_{ln} = M_{km} J_{mn} M_{nl}^T$$

Note ainda que

$$\{\eta, \eta\} = J \quad (5.43)$$

onde a matriz do lado esquerdo é definida como  $\{\eta, \eta\}_{ij} = \{\eta_i, \eta_j\}$ .

Finalmente vamos mostrar a relação que a função  $A$  tem com as funções geratrizes da seção anterior. Para isso escrevemos primeiramente as condições (5.41) explicitamente em termos de  $Q$  e  $P$ :

$$\frac{\partial A}{\partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial t} \quad \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (5.44)$$

e escrevemos  $A$  em termos de uma função auxiliar  $F$  como

$$A(Q, P, t) = \frac{\partial F(q, P, t)}{\partial t} \Big|_{q=q(Q, P, t)} \quad (5.45)$$

ou ainda

$$\frac{\partial F(q, P, t)}{\partial t} = A(Q(q, P, t), P, t). \quad (5.46)$$

Derivando (5.46) em relação a  $q$  e usando a primeira das equações (5.44) obtemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} = \frac{\partial A}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} = 0 \quad (5.47)$$

Da mesma forma, derivando (5.46) em relação a  $P$  e usando (5.44) temos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P \partial t} = \frac{\partial A}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial P} + \frac{\partial A}{\partial P} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial P \partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial Q}{\partial P} \quad (5.48)$$

Essas equações são as versões diferenciais das relações que definem transformações canônicas com a função geratriz do tipo  $F_2$ . De fato, partindo de

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \quad (5.49)$$

e derivando cada uma dessas equações em relação ao tempo com  $Q = Q(q, p, t)$ ,  $P = P(q, p, t)$  e tomando  $q$  e  $p$  como variáveis independentes obtemos

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} = 0 \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial P \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} \frac{\partial P}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial P \partial t}. \quad (5.51)$$

que são as equações (5.47) e (5.48). Vemos então que  $F$  é a função geratriz da transformação e que a nova hamiltoniana deve ser acrescida da derivada parcial de  $F$  em relação ao tempo.

**Exemplo** Considere  $F_2(q, P, t) = qP - P^2 t/2$ . A transformação canônica é dada por  $P = p$  e  $Q = q - pt$ . As equações (5.44) resultam

$$\frac{\partial A}{\partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial t} = -p = -P.$$

Por integração obtemos  $A(Q, P) = -P^2/2$ , que coincide com  $\partial F_2/\partial t$  como deveria.

## 5.4 O Grupo Simplético

O conjunto das transformações canônicas forma um grupo, chamado de grupo simplético. Vamos mostrar, primeiramente, que duas transformações canônicas aplicadas sucessivamente formam também uma transformação canônica. Sejam as transformações de  $\eta \rightarrow \xi$ ,  $\xi(\eta, t)$  e de  $\xi \rightarrow \nu$ ,  $\nu(\xi, t)$ . Como suas matrizes jacobianas são simpléticas teremos:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\partial \xi}{\partial \eta} & M J M^T &= J \\ N &= \frac{\partial \nu}{\partial \xi} & N J N^T &= J \end{aligned} \quad (5.52)$$

Vamos mostrar que a transformação direta,  $\eta \rightarrow \nu$ , dada por  $\nu = \nu(\eta, t)$  também é simplética. Com isso teremos mostrado que o 'produto' de duas transformações canônicas também é canônica. A prova é bastante simples. Seja  $O = \frac{\partial \nu}{\partial \eta}$ . Então, usando a regra da cadeia é fácil ver que  $O = NM$  e, portanto,

$$O J O^T = N M J (N M)^T = N M J M^T N^T = N J N^T = J. \quad (5.53)$$

Vejamos agora a transformação inversa, de  $\xi \rightarrow \eta$  dada por  $\eta = \eta(\xi, t)$  com matriz jacobiana  $U$ . Pela regra da cadeia é fácil ver que  $U M = 1$ , i.e.,  $U = M^{-1}$ . Então temos que

$$U J U^T = M^{-1} J (M^{-1})^T = M^{-1} M J = J \quad (5.54)$$

onde usamos a equação (5.40) multiplicada por  $(M^{-1})^T$  pela direita dos dois lados na última passagem. Vemos então que a transformação inversa também é canônica. Como a identidade é obviamente simplética, temos todas as propriedades básicas de um grupo.

## 5.5 Transformações Infinitesimais e a Identidade de Jacobi

Antes de desenvolvermos a teoria de transformações infinitesimais listamos algumas propriedades importantes do colchetes de Poisson que são fáceis de verificar:

- (1)  $\{F, F\} = 0$
- (2)  $\{F, G\} = -\{G, F\}$
- (3)  $\{aF + bG, H\} = a\{F, H\} + b\{G, H\}$
- (4)  $\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G$ .
- (5)  $\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial \eta} J \frac{\partial G}{\partial \eta}$

A identidade de Jacobi é uma outra propriedade dos colchetes de Poisson que demonstraremos agora com a ajuda das transformações canônicas infinitesimais. Essas transformações são úteis em diversas situações, particularmente no desenvolvimento da teoria de perturbações que veremos adiante. Podemos gerar uma transformação infinitesimal arbitrária com o auxílio da função geratriz do tipo  $F_2$ . Seja então

$$F_2(q, P) = \sum_{i=1}^n q_i P_i + \epsilon G(q, P, t). \quad (5.55)$$

O primeiro termo gera a transformação identidade, e o segundo é assumido pequeno,  $\epsilon \ll 1$ . As regras da transformação para  $F_2$  resultam em

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_i} \quad (5.56)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial P_i}$$

ou

$$P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial q_i} + O(\epsilon^2) \quad (5.57)$$

$$Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p_i} + O(\epsilon^2).$$

Em notação simplética essas equações ficam  $\xi = \eta + \epsilon J \partial G / \partial \eta + O(\epsilon^2)$  ou  $\delta \eta = \xi - \eta = \epsilon J \partial G / \partial \eta + O(\epsilon^2)$ . A matriz da transformação é

$$M = 1 + \epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} \quad (5.58)$$

onde

$$\left( \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} \right)_{ij} \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \quad (5.59)$$

é uma matriz simétrica. De fato, como  $J^T = -J$ , temos que

$$M^T = 1 - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} J \quad (5.60)$$

e  $MJM^T = J + O(\epsilon^2)$ .

Vamos agora usar a idéia de transformações infinitesimais para demonstrar a Identidade de Jacobi. Seja  $f(\eta)$  uma função das variáveis canônicas e  $\xi = \eta + \delta\eta$  uma transformação canônica infinitesimal gerada por  $F_2 = qP + \epsilon C$ . Então

$$\delta f = f(\eta + \delta\eta) - f(\eta) = \frac{\partial f}{\partial \eta} \delta\eta = \epsilon \frac{\partial f}{\partial \eta} J \frac{\partial C}{\partial \eta} = \epsilon \{f, C\}. \quad (5.61)$$

Tomemos agora duas funções arbitrárias  $A(\eta)$  e  $B(\eta)$ . Então, usando (5.61) e a regra da cadeia temos que:

(a) Para  $f = A \rightarrow \delta A = \epsilon \{A, C\}$

(b) Para  $f = B \rightarrow \delta B = \epsilon \{B, C\}$ .

(c) Para  $f = \{A, B\} \rightarrow \delta \{A, B\} = \epsilon \{\{A, B\}, C\} = \{\delta A, B\} + \{A, \delta B\}$

Assim vemos que

$$\epsilon \{\{A, B\}, C\} = \epsilon \{\{A, C\}, B\} + \epsilon \{A, \{B, C\}\} \quad (5.62)$$

ou ainda, usando a propriedade de antisimetria dos colchetes de Poisson,

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0 \quad (5.63)$$

que é a **Identidade de Jacobi**. Essa demonstração é devida a Nivaldo Lemos [14] e foi publicada em [19].

## 5.6 Equações de Movimento e Leis de Conservação

Para qualquer função  $u$  das variáveis canônicas  $q$  e  $p$  e do tempo, temos que

$$\frac{du}{dt} = \sum_k \frac{\partial u}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial u}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.64)$$

Na notação simplética a mesma expressão fica

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} J \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t} = \{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.65)$$

Para os casos particulares  $u = q_k$  ou  $u = p_k$  obtemos

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (5.66)$$

ou, em notação simplética,

$$\dot{\eta} = \{\eta, H\} = \frac{\partial \eta}{\partial \eta} J \frac{\partial H}{\partial \eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta}. \quad (5.67)$$

Para  $u = H$ ,

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5.68)$$

Finalmente, se  $u$  é uma **constante do movimento**, de forma que sua derivada total em relação ao tempo é zero, então

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{H, u\}. \quad (5.69)$$

Constantes de movimento são extremamente úteis na solução das equações de movimento, pois são relações explícitas entre as variáveis do problema que permitem efetivamente reduzir o número de coordenadas independentes. Nesse sentido, o seguinte resultado é importante: se  $u$  e  $v$  são duas constantes do movimento, então, pela identidade de Jacobi,  $\{H, \{u, v\}\} = 0$  e  $\{u, v\}$  é uma nova constante de movimento. Temos então, aparentemente, uma forma de gerar novas constantes do movimento a partir de duas conhecidas. No entanto, na maioria dos casos, as novas constantes geradas são triviais, como por exemplo  $\{u, v\} = 1$ .

**Exemplo 5.6.1** - Seja  $H = p^2/2 - 1/2q^2$  e considere a função  $D(q, p, t) = pq/2 - Ht$ . Vamos mostrar que  $D$  é uma constante do movimento. Primeiramente notamos que  $\partial D/\partial t = -H$ . O colchetes de Poisson entre  $H$  e  $D$  é:

$$\begin{aligned} \{H, D\} &= \{H, pq/2\} = \frac{1}{4}\{p^2, pq\} - \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{q^2}, pq\right\} \\ &= \frac{1}{4}(-2p^2) - \frac{1}{4}(-2/q^2) = -p^2/2 + 1/2q^2 = -H. \end{aligned}$$



Portanto,  $\partial D/\partial t = \{H, D\}$  e  $\dot{D} = 0$ .

**Exemplo 5.6.2** Considere a equação de movimento para uma função  $u(\eta)$  que não dependente explicitamente do tempo,

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\}.$$

Expandindo a solução  $u(t) = u(\eta(t))$  em série de Taylor em torno de  $t = 0$  obtemos

$$u(t) = u(0) + t \frac{du}{dt}_{t=0} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2u}{dt^2}_{t=0} + \dots$$

Usamos agora a relação entre a derivada total e os Colchetes de Poisson para escrever

$$\begin{aligned} u(t) &= u(0) + t\{u, H\}_0 + \frac{t^2}{2}\{\{u, H\}, H\} + \dots \\ &= \left[1 + t\{\cdot, H\}_0 + \frac{t^2}{2}\{\{\cdot, H\}, H\} + \dots\right] u_0 \\ &\equiv e^{\{\cdot, H\}t} u_0 \equiv \mathcal{L}(u_0). \end{aligned} \quad (5.70)$$

O operador

$$\mathcal{L} = e^{\{\cdot, H\}t}$$

é conhecido como Liouvillian. Note a semelhança entre a evolução temporal clássica da função  $u$  e a evolução temporal quântica de uma função de onda, dada por  $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$ .

**Exemplo 5.6.3** Vamos achar a solução de um problema simples usando o operador de Liouville. Seja  $H = p^2/2m + gq$ . Então vemos que

$$\{q, H\} = \{q, p^2/2m\} = p/m$$

$$\{\{q, H\}, H\} = \{p/m, H\} = \{p/m, gq\} = -g/m.$$

Como o segundo colchetes deu constante, os colchetes de ordem superior se anulam e a série é finita. Da mesma forma

$$\{p, H\} = \{p, gq\} = -g$$

e o resto da série também se anula. Então, usando (5.70) para  $u = q$  e  $u = p$  obtemos

$$q(t) = q(0) + p(0)t/m - gt^2/2m$$

$$p(t) = p(0) - gt.$$

## 5.7 Seções de Poincaré

A descrição do oscilador harmônico bi-dimensional que vimos no capítulo 4 mostra que sistemas com dois graus de liberdade podem ser bastante difíceis de tratar dada a alta dimensionalidade do espaço de fases. Por outro lado, como veremos adiante, esses são sistemas extremamente interessantes que podem apresentar movimento caótico, inexistente em sistemas com apenas um grau de liberdade. O método das seções de Poincaré permite estudar e visualizar a dinâmica de sistemas conservativos com dois graus de liberdade como se fossem unidimensionais.

As trajetórias de um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade,  $\eta = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ , movimentam-se no sub-espaço tri-dimensional  $\Sigma_E \subset \mathcal{F}^4$ , pois o vínculo  $H(\eta) = E$  é sempre satisfeito. Mesmo assim, essa superfície pode ser bastante difícil de parametrizar e representar no espaço  $R^3$  usual. A idéia básica das seções de Poincaré é introduzir artificialmente um segundo vínculo,  $f(\eta) = 0$ , de tal forma que a dinâmica se reduza à duas dimensões apenas. Como esse segundo vínculo é artificial, ele terá uma consequência importante sobre as trajetórias, como já veremos.

Vamos ilustrar o método com a construção de uma seção de Poincaré bastante tradicional, onde o segundo vínculo é simplesmente  $q_2 = 0$ . O conjunto de pontos com  $q_2 = 0$  forma uma superfície tri-dimensional  $\Sigma_{q_2}$ . Chamaremos a intersecção de  $\Sigma_E$  com  $\Sigma_{q_2}$  de *superfície de Poincaré*  $\Sigma_P$ , que tem dimensão 2. Assim, estaremos interessados na dinâmica de trajetórias com energia  $E$  fixa e  $q_2 = 0$ . Escolhemos então uma condição inicial  $\eta_0 = (q_{10}, q_{20} = 0, p_{10}, p_{20})$  tal que  $H(\eta_0) = E$ . Ao propagar esse ponto, a coordenada  $q_2(t)$  em geral deixará de ser zero e o vínculo  $q_2 = 0$  deixará de ser satisfeito. No entanto, se esperarmos um tempo suficientemente longo, é provável que em um instante futuro  $t = t_1$ ,  $q_2(t_1) = 0$  novamente. Dessa forma, o conjunto  $\eta_1 = (q_1(t_1), q_2(t_1) = 0, p_1(t_1), p_2(t_1))$  voltou à superfície de Poincaré. Criamos assim uma dinâmica discreta, chamada de *Mapa de Poincaré*, que leva pontos de  $\Sigma_P$  a ela mesma.

Falta apenas um detalhe para concluir a construção do mapa: em primeiro lugar notamos que basta considerar os valores dos pontos  $q_1$  e  $p_1$  sobre a superfície de Poincaré, pois  $q_2 = 0$  e  $p_2$  pode ser obtido a partir de  $H = E$ . No entanto, como em geral  $H$  é quadrática em  $p_2$ , é conveniente considerar apenas os pontos que voltam à  $q_2 = 0$  com momento conjugado  $p_2$  de mesmo sinal que  $p_{20}$ . Assim, se  $p_{20} > 0$ , só consideramos os pontos com  $q_2 = 0$  se  $p_2 > 0$ .

O mapa de Poincaré  $\mathcal{P}$  leva um ponto  $\xi_0 = (q_{10}, p_{10}) \in \Sigma_P$  ao ponto  $\xi_1 = (q_{11}, p_{11}) \in \Sigma_P$ , propagado pela dinâmica hamiltoniana:  $\xi_1 = \mathcal{P}(\xi_0)$ . Conseguimos desta forma uma representação bidimensional da dinâmica. O preço a pagar é não termos mais acesso à trajetória toda, mas apenas à sua posição a instantes discretos, como se uma luz estroboscópica estivesse piscando. Em geral não é possível obter uma expressão analítica para  $\mathcal{P}$ , sendo necessário integrar as equações de movimento numericamente e anotar os valores de  $q_1$  e  $p_1$  toda vez que  $q_2 = 0$  e  $p_2 > 0$ . Obviamente a escolha do vínculo  $q_2 = 0$  foi arbitrária e outras são possíveis, dependendo da conveniência do problema.

Como ilustração, construiremos o mapa de Poincaré explicitamente para o oscilador harmônico bidimensional. Fixando  $q_{20} = 0$  e supondo que  $p_{20} > 0$  temos (veja a seção 4.8)

$$q_2(t) = \frac{p_{20}}{m\omega_2} \sin(\omega_2 t)$$

$$p_2(t) = p_{20} \cos(\omega_2 t).$$

A coordenada  $q_2$  se anula para  $t = n\pi/\omega_2$ , mas apenas para  $n$  par teremos  $p_2 > 0$ . Então sempre que  $t = t_n = 2n\pi/\omega_2$  a trajetória voltará à superfície de Poincaré.

O mapa pode ser visualizado com a ajuda da figura 4.7: na projeção  $q_1$ - $p_1$ - $q_2$  a superfície de Poincaré corresponde ao plano  $q_1$ - $p_1$ . Cada vez que a trajetória (que anda sobre um dos cilindros) cruzar o plano  $q_1$ - $p_1$  de baixo para cima (de forma que  $p_2 > 0$ ), teremos um ponto na seção de Poincaré. No instante do primeiro retorno os valores de  $q_1$  e  $p_1$  ficam

$$\begin{pmatrix} q_{11} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & \frac{1}{m\omega} \sin(2\pi\alpha) \\ -m\omega \sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{10} \\ p_{10} \end{pmatrix} \equiv P_\alpha \begin{pmatrix} q_{10} \\ p_{10} \end{pmatrix}$$

onde  $\alpha = \omega_1/\omega_2$ . Usando  $\xi$  para designar o ponto  $(q_1, p_1)$  obtemos o mapa de Poincaré

$$\xi_1 = P_\alpha \xi_0.$$

Repetindo o procedimento  $k$  vezes temos

$$\xi_k = \underbrace{P_\alpha \dots P_\alpha}_{k \text{ vezes}} \xi_0 = P_\alpha^k \xi_0 = P_{k\alpha} \xi_0.$$

Se  $\alpha$  for um número racional, da forma  $r/s$  com  $r$  e  $s$  inteiros, então a trajetória será periódica e irá atravessar a superfície de Poincaré  $s$  vezes. Isso é claro, pois o argumento dos senos e cossenos em  $P_{k\alpha}$  é  $2\pi kr/s$  que fica igual a  $2\pi r$  para  $k = s$ , de forma que  $P_{s\alpha} = 1$ . Olhando para a figura 4.7 vemos que os pontos ficarão sobre a elipse definida por

$$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2 q_1^2}{2} = \frac{p_{10}^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2 q_{10}^2}{2} \equiv E_1$$

Se  $\alpha$  for irracional os pontos na seção de Poincaré preencherão densamente a elipse.

Finalmente, mudando a condição inicial mas mantendo  $H = E$  e  $q_{20} = 0$ , geramos órbitas que descreverão outras elipses na mesma superfície de Poincaré. Voltaremos a falar das seções de Poincaré nos capítulos 7 a 10. Veja, em particular, as seções 7.3, 8.2.1 e 10.1.

## 5.8 Invariantes Canônicos

Uma das grandes vantagens de se trabalhar no formalismo de Hamilton é que algumas quantidades importantes são invariantes pela escolha do sistema de coordenadas canônico. Como a própria evolução temporal é uma transformação canônica, essas quantidades são invariantes pela dinâmica. Dentre essas, três são particularmente importantes: os colchetes de Poisson, o invariante integral de Poincaré-Cartan e o elemento de volume no espaço de fases. Esse último, em particular, tem como consequência o teorema de Liouville.

### 5.8.1 Os Colchetes de Poisson

Sejam  $u(\eta)$  e  $v(\eta)$  duas funções suaves das variáveis canônicas  $\eta$  e

$$\{u, v\}_\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta} J \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (5.71)$$

os colchetes de Poisson. Consideremos agora uma transformação canônica  $\eta \rightarrow \xi$ . Então

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_i} = \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i} = M_{ji} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} = (M^T)_{ij} \frac{\partial u}{\partial \xi_j},$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = M^T \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad e \quad \frac{\partial u^T}{\partial \eta} = \frac{\partial u^T}{\partial \xi} M$$

com expressões similares para a função  $v$ . Então

$$\{u, v\}_\eta = \frac{\partial u^T}{\partial \xi} M J M^T \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u^T}{\partial \xi} J \frac{\partial v}{\partial \xi} = \{u, v\}_\xi. \quad (5.72)$$

Dessa forma, o colchetes de Poisson entre duas funções  $u$  e  $v$  tem o mesmo valor se calculado em qualquer sistema de coordenadas canônico.

### 5.8.2 O invariante de Poincaré-Cartan

Considere uma transformação canônica gerada por uma função do tipo  $F_1(q, Q, t)$  [8, 3]. Calculando a diferencial de  $F_1$  obtemos, com a convenção de Einstein,

$$\begin{aligned} dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \\ &= p_k dq_k - P_k dQ_k + (K - H) dt. \\ &= (p_k dq_k - H dt) - (P_k dQ_k - K dt). \end{aligned}$$

Como  $dF_1$  é uma diferencial exata, sua integral em qualquer curva fechada é nula. Considere então uma curva fechada  $\gamma_\eta$  no espaço de fase estendido  $\Lambda_{\eta t}$  de dimensão  $2n + 1$  onde os eixos são as  $2n$  coordenadas e momentos  $q$  e  $p$  e o tempo  $t$ . Suponha que a curva seja parametrizada por  $\tau$ :  $\gamma_\eta = (q(\tau), p(\tau), t(\tau))$ . Essa curva é levada em  $\gamma_\xi = (Q(\tau), P(\tau), t(\tau))$  pela transformação canônica, no espaço estendido  $\Lambda_{\xi t}$ . Finalmente, no espaço de fases ‘duplo estendido’  $\Lambda_{\xi t}$  de dimensão  $4n + 1$  com eixos  $q, Q, p, P, t$  temos a curva  $\gamma = (q(\tau), Q(\tau), p(\tau), P(\tau), t(\tau))$  (veja a figura 5.1).

Integrando  $dF_1$  sobre  $\gamma$  obtemos

$$\oint_\gamma dF_1 = \oint_{\gamma_\eta} (p_k dq_k - H dt) - \oint_{\gamma_\xi} (P_k dQ_k - K dt) = 0 \quad (5.73)$$

ou

$$\oint_{\gamma_\eta} (p_k dq_k - H dt) = \oint_{\gamma_\xi} (P_k dQ_k - K dt). \quad (5.74)$$

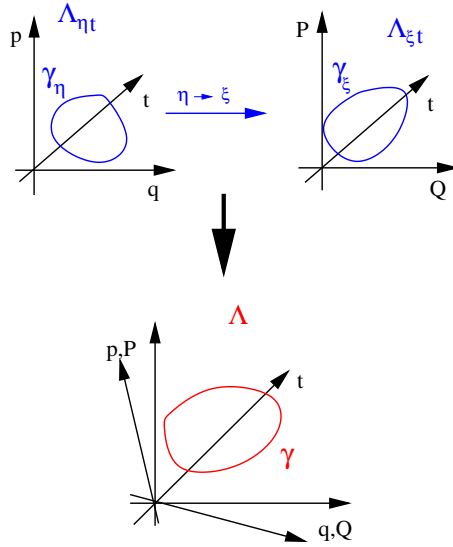


Figura 5.1: A curva  $\gamma_\eta$  é levada em  $\gamma_\xi$  pela transformação canônica. No espaço de fases duplo a curva é  $\gamma$ .

Portanto, a integral

$$\mathcal{S} = \oint_{\gamma} (p \cdot dq - H dt) \quad (5.75)$$

é um invariante canônico para qualquer curva fechada  $\gamma$  no espaço de fases estendido  $(q, p, t)$ . Note que quando parametrizamos a curva  $\gamma$  com o parâmetro  $\tau \in [0, 1]$ , o invariante pode ser escrito como

$$\mathcal{S} = \int_0^1 \left( p(\tau) \cdot \frac{\partial q}{\partial \tau} - H(q(\tau), p(\tau)) \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) d\tau \quad (5.76)$$

Veremos agora algumas aplicações desse invariante.

(1) Se a transformação canônica for independente do tempo,  $\partial F / \partial t = 0$  e a equação (5.74) se reduz a

$$\oint_{\gamma_\eta} p_k dq_k = \oint_{\gamma_\xi} P_k dQ_k. \quad (5.77)$$

Esse resultado inspirou Einstein à criticar a regra de quantização para sistemas com mais de um grau de liberdade introduzida inicialmente por Sommerfeld e Epstein. Uma tradução do artigo de Einstein em Português pode ser

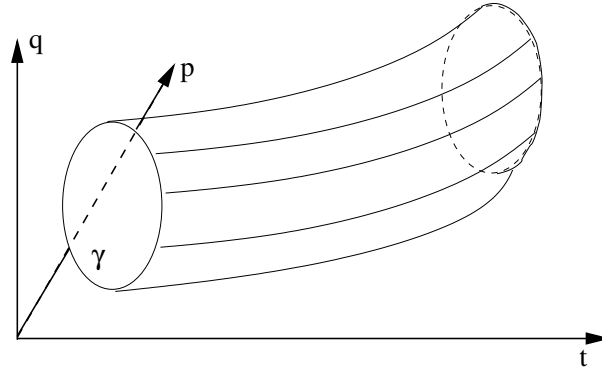


Figura 5.2: Tubo de trajetórias formado pela propagação das condições iniciais sobre a curva fechada  $\gamma$ .

encontrada em [15]. O artigo é hoje considerado como fundamental e tendo dado origem à disciplina do Caos Quântico, que seria de fato desenvolvida nas décadas de 1970 a 1990. Uma introdução ao artigo e à sua relação com caos quântico é dada em [16].

## (2) Invariancia de $\mathcal{S}$ pela evolução temporal

Considere a curva fechada  $\gamma_0 = (q_0(\tau), p_0(\tau), t_0(\tau))$  parametrizada por  $\tau$ . Cada ponto nessa curva pode ser pensado como uma condição inicial, e sua trajetória subsequente pode ser obtida integrando-se as equações de movimento. Note que cada uma dessas trajetórias começa em um instante diferente, pois  $t_0 = t_0(\tau)$ . O caso particular  $t_0 = \text{const}$  corresponde a iniciar todas as trajetórias no mesmo instante. A propagação desse conjunto de trajetórias gera um tubo no espaço de fases estendido, como mostra a figura (5.2). Como a evolução temporal é uma transformação canônica, então, a integral de  $(p \cdot dq - H dt)$  sobre qualquer curva  $\gamma_t$  correspondente à evolução temporal da curva  $\gamma_0$  terá o mesmo valor. Na verdade é possível mostrar que a integral será a mesma para qualquer curva que envolva o tubo de trajetórias e será nula para qualquer curva que possa ser reduzida a um ponto por deformações contínuas sobre a superfície do tubo. Para mostrar esse resultado notamos primeiramente que a integral sobre uma curva que envolve uma área fechada do tubo pode ser quebrada em pequenas integrais de linha sobre quadradinhos nessa superfície, como mostra a figura 5.3a.

As integrais nas partes internas dos quadrados se anulam, pois são sempre percorridas duas vezes, uma vez em cada direção. Esses quadradinhos podem ser construídos da seguinte forma: na curva original  $\gamma_0$  marcamos pontos espaçados de  $d\tau$ . Cada um desses pontos é propagado gerando um conjunto de linhas (suas trajetórias). A cada passo de tempo  $dt$  desenhamos a curva  $\gamma_t$ , gerando um outro conjunto de curvas que envolvem o tubo. As trajetórias e as curvas  $\gamma_t$  geram um reticulado sobre o tubo, como ilustrado na figura 5.3b.

Vamos mostrar que a integral (5.75) em uma curva fechada sobre o tubo que pode ser contraída a um ponto é nula. Para isso basta mostrar que a integral sobre cada pequeno quadradinho fechado é nula (figura 5.3c). Pela sua construção, o vetor representando o lado do quadrado na direção da trajetória é  $(\dot{q}, \dot{p}, 1)dt$ , e na direção perpendicular,  $(q', p', t'_0)d\tau$ , onde usamos a linha para indicar derivadas em relação à  $\tau$ , e o ponto para derivadas em relação à  $t$ . Note que o valor da variável tempo no canto inferior esquerdo é  $t_0(\tau) + t$ , enquanto que no canto superior esquerdo é  $t_0(\tau + d\tau) + t \approx t_0(\tau) + t + t'_0(\tau)d\tau + t''_0(\tau)d\tau^2/2$ . A figura 5.3(c) mostra o valor de  $q(t, \tau)$ ,  $p(t, \tau)$  e do tempo  $t(\tau)$  nos quatro vértices, onde a condição inicial da trajetória é indicada explicitamente pelo parâmetro  $\tau$ . Ao fazer a integral de linha ao longo dos lados vamos avaliar  $p$  e  $H(q, p)$  no ponto médio do lado. O cálculo da integral para cada um dos lados, numerados de 1 a 4 na figura, deve ser feito com cuidado, mantendo termos até ordem 2 em  $dt$  e  $d\tau$ .

Para o lado 2, por exemplo teremos:

$$\begin{aligned} q &\rightarrow (q(t + dt, \tau) + q(t + dt, \tau + d\tau))/2 \approx q + \dot{q}dt + q'd\tau/2 \\ p &\rightarrow (p(t + dt, \tau) + p(t + dt, \tau + d\tau))/2 \approx p + \dot{p}dt + p'd\tau/2 \\ dq &\rightarrow q(t + dt, \tau + d\tau) - q(t + dt, \tau) \approx q'd\tau/2 + q''d\tau^2/4 \\ dt &\rightarrow t(\tau + d\tau) + t + dt - t(\tau) - t - dt \approx t'd\tau + t''d\tau^2/2. \end{aligned}$$

O cálculo de  $\mathcal{S}$  em cada um dos lados do quadrado resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= (p + \dot{p}dt/2)(\dot{q}dt + \ddot{q}dt^2/2) - H(q + \dot{q}dt/2, p + \dot{p}dt/2)dt \\ &= p\dot{q}dt + \dot{p}\dot{q}(dt)^2/2 + p\ddot{q}dt^2/2 - Hdt - (\partial H/\partial q)\dot{q}(dt)^2/2 - (\partial H/\partial p)\dot{p}(dt)^2/2 \\ &= p\dot{q}dt + \dot{p}\dot{q}(dt)^2/2 + p\ddot{q}(dt)^2/2 - Hdt, \end{aligned}$$

onde usamos as equações de Hamilton para cancelar os dois termos,



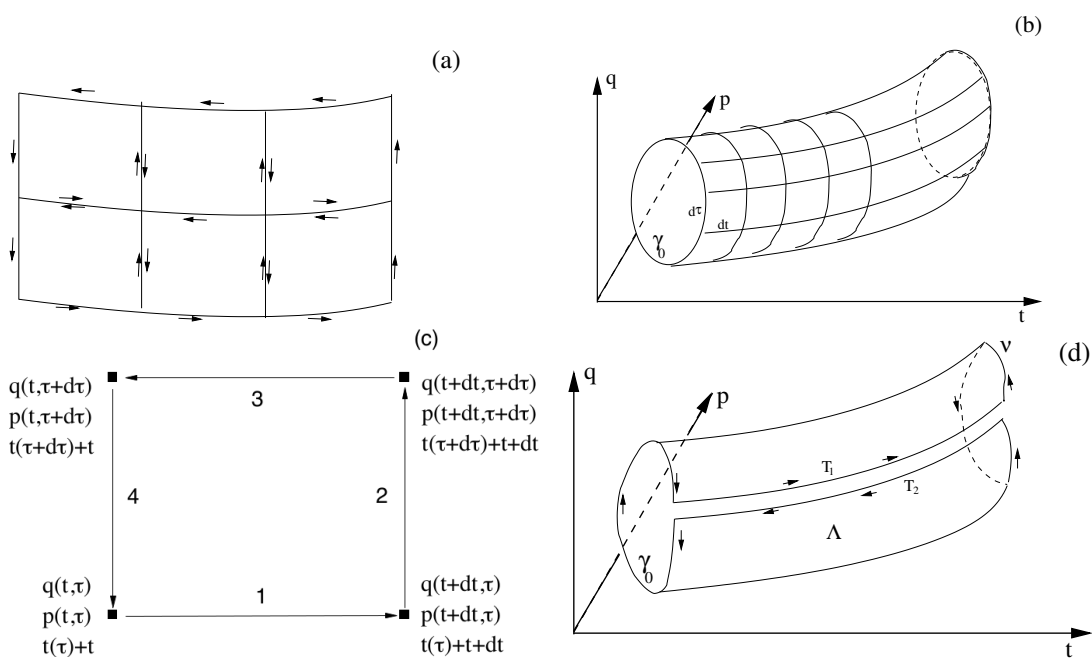


Figura 5.3: Tubo de trajetórias formado pela propagação das condições iniciais sobre a curva fechada  $\gamma$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2 &= (p + \dot{p}dt + p'd\tau/2)(q'd\tau + q''d\tau^2/4) \\
&\quad - H(q + \dot{q}dt + q'd\tau/2, p + \dot{p}dt + p'd\tau/2)(t'_0d\tau + t''_0d\tau^2/2) \\
&= pq'd\tau + q'\dot{p}dtd\tau + pq''d\tau^2/4 - Ht'_0d\tau - Ht''_0d\tau^2/2 + \\
&\quad (q'p' + \dot{p}q't'_0 - \dot{q}p't'_0)(d\tau)^2/2
\end{aligned}$$

onde já cancelamos dois termos da expansão de  $H$  usando novamente as equações de Hamilton. Da mesma forma obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_3 &= (p + \dot{p}dt/2 + p'd\tau)(-\dot{q}dt - \ddot{q}dt^2/2) \\
&\quad - H(q + \dot{q}dt/2 + q'd\tau, p + \dot{p}dt/2 + p'd\tau)(-dt) \\
&= -p\dot{q}dt - p\ddot{q}dt^2/2 + Hdt - \dot{p}\dot{q}(dt)^2/2 - \dot{p}q'dtd\tau
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_4 &= (p + p'd\tau/2)(-q'd\tau - q''d\tau^2/4) \\
&\quad - H(q + q'd\tau/2, p + p'd\tau/2)(-t'_0d\tau - t''_0d\tau^2/2) \\
&= -pq'd\tau - pq''d\tau^2/4 + Ht'_0d\tau + Ht''_0d\tau^2/2 - \\
&\quad (q'p' + \dot{p}q't'_0 - \dot{q}p't'_0)(d\tau)^2/2.
\end{aligned}$$

Finalmente, a integral no circuito completo é obtida somando as quatro contribuições, que se cancelam exatamente até ordem 2. Isso significa que erro na nossa aproximação é  $\mathcal{O}(3)$ , i.e., de terceira ordem em  $dt$  ou  $d\tau$ , da forma  $dt^2d\tau$  ou  $dtd\tau^2$ . Se o número de partições temporais na região de integração é  $N$  e de partições em  $\tau$  é  $M$ , o erro acumulado no cálculo da integral sobre os  $NM$  quadradinhos é  $NM\mathcal{O}(3)$  que vai a zero quando tomamos o limite em que  $dt$  e  $d\tau$  vão à zero. Isso mostra que a integral sobre a curva fechada de fato é nula. Na figura 5.3(a) a ilustração mostra  $N = 3$  e  $M = 2$ . Note que se tivéssemos feito o cálculo em primeira ordem apenas o erro seria  $NM\mathcal{O}(2)$  que fica finito no limite  $dt$  e  $d\tau$  indo à zero, invalidando a prova. Por exemplo,  $NMdt d\tau = (Ndt)(Md\tau) \rightarrow t$ . Daí a importância em fazer o cálculo até ordem 2.

Vamos agora imaginar uma curva qualquer  $\nu$  sobre o tubo. Construimos uma superfície  $\Lambda$  fazendo uma pequena abertura em  $\gamma_0$  e levando as trajetórias nas fronteiras da abertura até  $\nu$ , como mostra a figura 5.3d. A superfície  $\Lambda$  é um tubo aberto limitado pelas curvas  $\gamma_0$ ,  $T_1$ ,  $-\nu$  e  $T_2$ . Como a integral total é nula e as integrais sobre  $T_1$  e  $T_2$  se cancelam, a integral sobre  $\gamma_0$  tem que ser igual à integral sobre  $\nu$ , demonstrando o teorema.

Um caso particular do teorema ocorre para curvas onde  $t(\tau) = t_0 = \text{const.}$  Para curvas  $\gamma_1$  no plano  $t = t_1 > t_0$  teremos  $dt = 0$  ao longo das curvas iniciais e finais e a equação (5.75) se reduz à

$$\oint_{\gamma_0} p_k dq_k = \oint_{\gamma_1} p_k dq_k. \quad (5.78)$$

### (3) Invariância das áreas na Seção de Poincaré

Considere um sistema com dois graus de liberdade. O mapa de Poincaré  $(q_1, p_1)$  é obtido marcando-se neste plano as intersecções das trajetórias com a superfície gerada pela intersecção de  $\Sigma_E = \{(q, p) \text{ t.q. } H(q, p) = E\}$  com  $\Sigma_2 = \{(q, p) \text{ t.q. } q_2 = 0 \text{ e } p_2 > 0\}$ . Em outras palavras, para cada trajetória com energia  $E$ , marcamos os pontos  $(q_1, p_1)$  toda vez que  $q_2 = 0$  com  $p_2 > 0$ . Note que o tempo que uma trajetória demora para voltar à seção de Poincaré é diferente para cada trajetória. No caso do oscilador harmônico bidimensional esse tempo é constante, igual a  $2\pi/\omega_2$ . Consideremos então uma curva fechada  $\gamma_0$  sobre a seção de Poincaré. Nessa curva  $q_2 = 0$  e  $dq_2 = 0$ . Além disso, como  $H = E$ ,  $\oint H dt = E \oint dt = 0$ . Propagando essa curva geramos um tubo de trajetórias que fura a seção novamente em alguma curva fechada  $\gamma_1$ . Nessa curva  $dt \neq 0$ , pois os pontos atingem a seção em tempos distintos. No entanto, como  $H$  é constante, o termo da integral em  $H dt$  não contribui. Então equação (5.75) se reduz à

$$\oint_{\gamma_0} p_1 dq_1 = \oint_{\gamma_1} p_1 dq_1, \quad (5.79)$$

que mostra a **preservação de áreas na seção de Poincaré**: qualquer área envolvida por uma curva fechada será mapeada em outra região fechada envolvendo exatamente a mesma área.

## 5.9 O teorema de Liouville

Seja  $d\eta = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$  o elemento de volume no espaço de fases. Quando fazemos uma mudança de variáveis qualquer, o elemento de volume nas novas variáveis deve conter o Jacobiano da transformação (veja o apêndice A). No caso de uma transformação canônica obtemos

$$d\xi = |\det M| d\eta \quad (5.80)$$

onde  $d\xi = dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n$  e  $M_{ij} = \partial\xi_i / \partial\eta_j$  é a matriz Jacobiana da transformação. Como a matriz  $M$  é simplética,  $M^T J M = J$ . Tomando o determinante dos dois lados obtemos

$$\det(M^T J M) = (\det M)^2 \det J = \det J. \quad (5.81)$$

Portanto,  $\det M = \pm 1$  e  $|\det M| = 1$ .

Integrando sobre um volume finito  $V_\eta$  vemos que

$$\int_{V_\eta} d\eta = \int_{V_\xi} d\xi \quad (5.82)$$

onde  $V_\xi$  corresponde ao volume  $V_\eta$  escrito nas novas variáveis canônicas.

Uma aplicação particularmente importante desse resultado é obtido para as transformações canônicas geradas pela evolução temporal. A preservação de volumes pela evolução temporal é conhecida como *teorema de Liouville*. Lembremos que a ação de uma trajetória que vai de  $q_i$  até  $q_f$  no tempo  $T$ ,  $S(q_i, q_f, t)$ , satisfaz as propriedades

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i} \quad p_f = \frac{\partial S}{\partial q_f}. \quad (5.83)$$

Comparando essas relações com a transformação canônica gerada por  $F_1(q, Q, t)$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \quad (5.84)$$

vemos que  $S(q_i, q_f, t) = F_1(q = q_f, Q = q_i, t)$  é a função geratriz da evolução temporal de  $q_f$  para  $q_i$ . A figura 5.4 mostra a evolução temporal da região  $D_0$ , com volume  $V(0)$ , para a região  $D_t$  com volume  $V(t)$ . Seja  $\eta = f(\eta_0, t)$  a evolução temporal do ponto inicial  $\eta_0$  depois de um tempo  $t$ . Escrevendo

$$V(t) = \int_{D_t} d\eta \quad (5.85)$$

podemos fazer uma transformação canônica  $\eta \rightarrow \nu$  dada por  $\eta = f(\nu, t)$ . Sob essa transformação cada ponto em  $D_t$  é levado ao seu ponto inicial em  $D_0$  e

$$V(t) = \int_{D_0} \left| \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \right| d\nu = V(0). \quad (5.86)$$

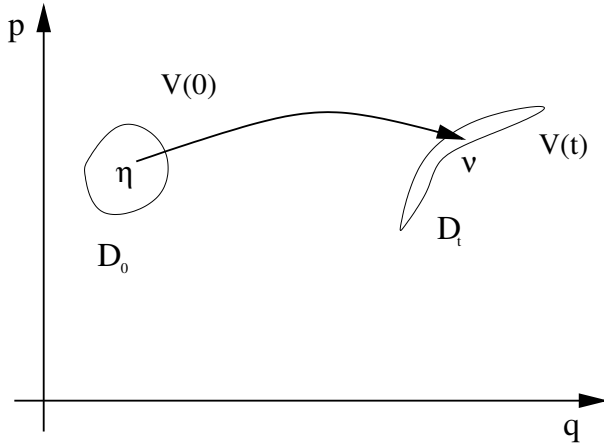


Figura 5.4: Propagação de volumes pela evolução temporal.

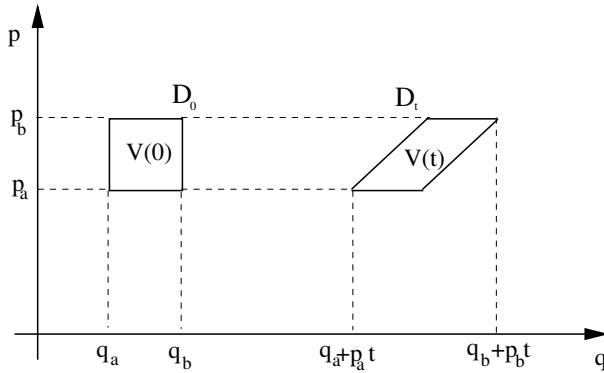


Figura 5.5: Propagação de um volume retangular para a partícula livre.

Como uma ilustração simples dessa álgebra vamos considerar uma partícula livre. Seja  $D_0$  a região retangular delimitada por  $q_a \leq q \leq q_b$  e  $p_a \leq p \leq p_b$ , como ilustrado na figura 5.5. A evolução temporal distorce o retângulo, pois pontos com momento maior andam mais do que aqueles com momento menor. É fácil ver geometricamente que o volume propagado (a área nesse caso) é igual ao inicial. A solução das equações de Hamilton são  $p = p_0$  e  $q = q_0 + p_0 t$  e nos dão as funções  $f$ . A transformação canônica é obtida escrevendo as condições iniciais em termos das finais:  $P = p$  e  $Q = q - pt$ . Sob essa transformação, que tem jacobiano unitário, a área final é levada de volta sobre o retângulo inicial.

As aplicações mais importantes do teorema de Liouville estão no contexto da mecânica estatística. Suponha por exemplo que queremos descrever um sistema cujo estado inicial é incerto. No caso de um gás com grande número de partículas, várias condições iniciais microscópicas podem corresponder a um mesmo estado macroscópico. Uma das maneiras de descrever nossa ignorância sobre o estado preciso do sistema é através da teoria de ensembles: consideramos um grande conjunto de sistemas idênticos em todos os aspectos, mas cada um com uma condição inicial diferente. Distribuimos as condições iniciais no espaço de fases, de forma que sua densidade seja proporcional à probabilidade do sistema real estar naquela condição inicial.

A densidade de elementos do ensemble cuja condição inicial é  $(q, p)$  é definida por

$$D = \frac{dN}{dV} \quad (5.87)$$

onde  $dN$  é o número de elementos do ensemble no volume  $dV$  em torno de  $(q, p)$ . Como vimos,

$$\frac{dD}{dt} = \{D, H\} + \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (5.88)$$

No entanto, conforme o tempo passa o elemento de volume envolvendo as  $dN$  condições iniciais move-se no espaço de fases, mantendo sempre o mesmo volume. Por outro lado, os pontos iniciais dentro de  $dV(0)$  estarão dentro de  $dV(t)$  para qualquer tempo: esses pontos não podem cruzar as fronteiras de  $dV$  pela unicidade das soluções das equações diferenciais de primeira ordem. Então  $dD/dt = 0$  e a equação para  $D$  se reduz à

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \{H, D\}. \quad (5.89)$$

Os casos de distribuições fora do equilíbrio e distribuições estacionárias são importantes e os trataremos a seguir.

### Distribuições Fora do Equilíbrio

Como cada elemento do ensemble segue as equações de movimento de Hamilton e como  $dD/dt = 0$ , a probabilidade do sistema estar em  $(q_0, p_0)$  em  $t = 0$  é carregada para  $(q(t), p(t))$  no instante  $t$ :

$$D(q(q_0, p_0, t), p(q_0, p_0, t), t) = D(q_0, p_0, 0) \quad (5.90)$$

ou ainda

$$D(q, p, t) = D(q_0(q, p, t), p_0(q, p, t), 0). \quad (5.91)$$

Assim, a densidade no ponto  $(q, p)$  no instante  $t$  é mesma densidade do ponto inicial  $(q_0, p_0)$  no instante inicial  $t = 0$ .

**Exemplo 5.8.1** Evolução temporal de uma distribuição Gaussiana para a partícula livre. A distribuição inicial normalizada é

$$D(q, p, 0) = \frac{1}{2\pi ab} \exp \left\{ -\frac{(q - \bar{q})^2}{2a^2} - \frac{(p - \bar{p})^2}{2b^2} \right\} \quad (5.92)$$

e está centrada no ponto  $(\bar{q}, \bar{p})$  com largura  $a$  na direção  $q$  e  $b$  na direção  $p$ . A solução das equações de movimento é  $p = p_0$  e  $q = q_0 + p_0 t/m$  e, escrevendo as condições iniciais em termos das finais,  $p_0 = p$  e  $q_0 = q - pt/m$ . Então

$$\begin{aligned} D(q, p, t) &= D(q - pt, p, 0) \\ &= \frac{1}{2\pi ab} \exp \left\{ -\frac{(q - pt/m - \bar{q})^2}{2a^2} - \frac{(p - \bar{p})^2}{2b^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Fica como exercício mostrar que:

- (a)  $\langle q \rangle_t = \bar{q} + \bar{p}t/m$
- (b)  $\langle p \rangle_t = \bar{p}$
- (c)  $\langle q^2 \rangle_t = a^2 + (\bar{q} + \bar{p}t/m)^2 + b^2 t^2/m^2$
- (d)  $\langle p^2 \rangle_t = b^2 + \bar{p}^2$
- (e)  $\Delta q(t) = a\sqrt{1 + b^2 t^2/m^2 a^2}$
- (f)  $\Delta p(t) = b$
- (g) Calcule  $\partial D/\partial t$  e mostre que o resultado é igual à  $\{H, D\}$ .
- (h) Esboce  $D(q, p, t)$  para  $t = 0$  e para  $t > 0$ .

Finalmente podemos perguntar qual a probabilidade de um elemento de ensemble estar entre  $q$  e  $q + dq$  independente do valor de seu momento:

$$D(q, t) = \int D(q, p, t) dp. \quad (5.94)$$

A integral pode ser calculada facilmente e o resultado é

$$D(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta q(t)} \exp \left\{ -\frac{(q - \bar{q} - \bar{p}t/m)^2}{2\Delta q(t)^2} \right\}. \quad (5.95)$$

Da mesma forma obtemos

$$D(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \exp \left\{ -\frac{(p - \bar{p})^2}{2b^2} \right\}. \quad (5.96)$$

**Exemplo 5.8.2** Evolução temporal de uma distribuição Gaussiana para o oscilador harmônico. Seguindo o mesmo procedimento anterior é fácil mostrar que

$$D(q, p, t) = \frac{1}{2\pi ab} \exp \left\{ -\frac{(q \cos \omega t - p \sin \omega t / m\omega - \bar{q})^2}{2a^2} - \frac{(m\omega q \sin \omega t + p \cos \omega t - \bar{p})^2}{2b^2} \right\}.$$

### Distribuições Estacionárias

Quando o sistema está em equilíbrio estatístico,  $\partial D / \partial t = 0$  e, portanto,  $\{D, H\} = 0$ . Nesse caso a distribuição deve ser independente do tempo. Caso  $H$  seja a única constante de movimento do problema, então  $D$  só pode depender de  $H$ .

### Exemplo 5.8.3 Distribuição microcanônica

$$D(q, p) = \delta(E - H(q, p)). \quad (5.97)$$

### Exemplo 5.8.4 Distribuição microcanônica suave

$$D(q, p) = e^{-(E - H(q, p))^2 / \alpha^2}. \quad (5.98)$$

### Exemplo 5.8.5 Distribuição de Boltzman

$$D(q, p) = e^{-\beta H(q, p)}. \quad (5.99)$$

Note que nenhuma das três distribuições acima está normalizada. Fica como exercício normalizar corretamente cada uma delas.



## 5.10 O teorema de Liouville para sistemas gerais

Por completeza vamos demonstrar agora uma versão do teorema de Liouville válida para equações diferenciais gerais, não necessariamente hamiltonianas [3]. Considere então o conjunto de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem  $\dot{x} = f(x)$  ou, explicitamente,

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.100)$$

Considere o volume  $V(0)$  de uma região  $D(0)$  no espaço de configurações  $x$  e seja  $V(t)$  o volume da região  $D(t)$  obtida pela propagação de  $D(0)$  pelas equações acima. Então

$$V(t) = \int_{D(t)} dx \quad (5.101)$$

onde  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ . Para tempos curtos podemos resolver as equações de movimento e obter

$$x_i(t) = x_{i0} + t f_i(x_0). \quad (5.102)$$

Como no caso Hamiltoniano, fazemos agora uma mudança de variáveis  $x \rightarrow y$  definida por

$$x_i = y_i + t f_i(y). \quad (5.103)$$

Por construção essa transformação leva  $D(t)$  em  $D(0)$  e

$$V(t) = \int_{D(0)} J(y, t) dy \quad (5.104)$$

onde  $J$  é o jacobiano da transformação:

$$J(y, t) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \det \left[ 1 + t \frac{\partial f}{\partial y} \right]. \quad (5.105)$$

Escrevendo o determinante explicitamente e calculando seu valor pelo método de Laplace é fácil ver que

$$J(y, t) = 1 + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i} + O(t^2) \equiv 1 + t \nabla \cdot \mathbf{f} + O(t^2). \quad (5.106)$$

Substituindo na integral do volume obtemos

$$V(t) = \int_{D(0)} (1 + t \nabla \cdot \mathbf{f}) dy = V(0) + t \int_{D(0)} \nabla \cdot \mathbf{f} dy. \quad (5.107)$$

Como  $t$  é pequeno

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V(t) - V(0)}{t} = \int_{D(0)} \nabla \cdot \mathbf{f} dy. \quad (5.108)$$

Assim, a condição para preservação de volumes é que  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ , ou seja, o divergente do campo  $\mathbf{f}$  deve se anular. Se  $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$  teremos contração de volumes, geralmente indicando alguma dissipação. Se  $\nabla \cdot \mathbf{f} > 0$  temos expansão de volumes, indicando um fluxo de energia sobre o sistema. Para o caso Hamiltoniano temos  $x_i = q_i$  e  $x_{i+n} = p_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Além disso  $f_i = \partial H / \partial x_{i+n}$  e  $f_{i+n} = -\partial H / \partial x_i$ . É fácil verificar que a condição  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$  é satisfeita automaticamente.

## 5.11 O teorema de recorrência de Poincaré

O teorema de recorrência trata da reversibilidade de sistemas dinâmicos e tem consequências importantes na mecânica estatística. Em termos gerais ele afirma que as trajetórias de sistemas Hamiltonianos retornam arbitrariamente perto de sua condição inicial, sendo essa afirmativa válida para quase toda condição inicial. Imagine então um gás com  $N_0$  partículas, onde  $N_0$  é o número de Avogadro, colocado dentro de uma caixa de lado  $L$ . Escolhendo uma condição inicial onde todas as partículas estejam confinadas em um pequeno cubo de lado  $L/2$  dentro da caixa, esperamos que elas se dispersem com o passar do tempo, distribuindo-se de forma aproximadamente homogênea dentro da caixa toda. O teorema, no entanto, diz que se esperarmos um tempo suficientemente longo, as partículas retornarão à esse pequeno volume inicial. Esse é um resultado não intuitivo e que parece contrariar a segunda lei da termodinâmica, pois a entropia do gás teria que diminuir. Vamos primeiro demonstrar o teorema e depois retornaremos a essa discussão do gás [3, 20].

Considere um sistema dinâmico contínuo que preserve volumes e que mapeie uma região limitada  $D$  do espaço de fases sobre si mesma. Essas condições são satisfeitas para sistemas Hamiltoniano com movimento limitado se  $D$  for escolhido como a superfície de energia. Se  $x \in D$  e a dinâmica

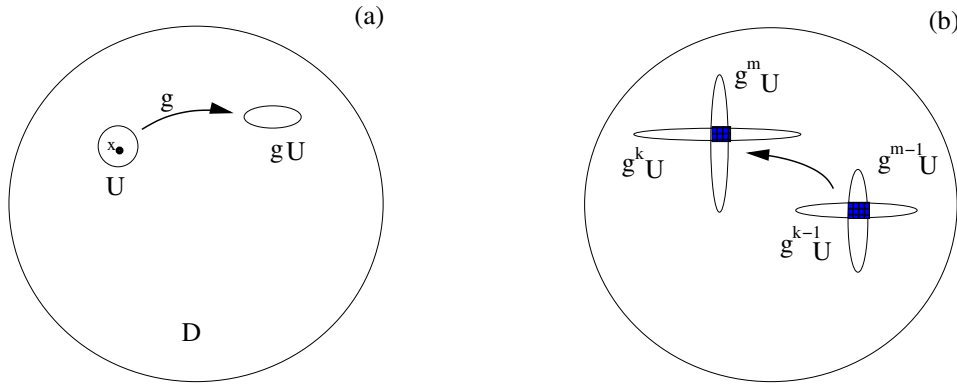


Figura 5.6: Região  $D$  e vizinhança  $U$  do ponto inicial  $x$  sob a ação da dinâmica.

é discreta, escreveremos  $x_{n+1} = g(x_n)$ . Se a dinâmica for contínua, como no caso Hamiltoniano, vamos fixar um intervalo de tempo arbitrário  $\tau$  e usar a mesma notação  $x_{n+1} = g(x_n)$  onde agora  $g$  indica a propagação pelo intervalo  $\tau$ . Considere agora um ponto qualquer  $x \in D$  e uma vizinhança  $U \supset x$  (figura 5.6a). Sob a ação da dinâmica a vizinhança  $U$  é levada em  $gU$  que tem o mesmo volume de  $U$ . Assim, se a região  $D$  tem volume finito, as sucessivas iterações de  $U$  terão que apresentar intersecções em algum momento. De fato, o número máximo de passos da dinâmica que podem acontecer antes que ocorra alguma intersecção é  $V(D)/V(U)$ . Então, para algum  $k$  e  $m$  ( $k > m$ ):

$$g^k U \cap g^m U \neq \emptyset. \quad (5.109)$$

A região de intersecção entre  $g^k U$  e  $g^m U$  pertence simultaneamente às duas vizinhanças. Então, se olharmos as imagens anteriores  $g^{k-1} U$  e  $g^{m-1} U$ , veremos que essa região de intersecção deve também ser levada tanto a  $g^{k-1} U$  como a  $g^{m-1} U$ . Aplicando essa idéia sucessivamente vemos que (5.109) implica que

$$g^{(k-m)} U \cap U \neq \emptyset \quad (5.110)$$

o que mostra que pontos de  $U$  voltaram para  $U$  depois de  $(k - m)$  iterações. Assim, para toda condição inicial  $x$  existem condições iniciais arbitrariamente próximas que retornam à vizinhança de  $x$ .

**Exemplo 1** Seja  $D$  um círculo unitário e  $g$  a rotação por um ângulo fixo  $\alpha$ , de forma que cada ponto  $x$  sobre o círculo é levado em  $g(x) = x + \alpha$ . Vamos

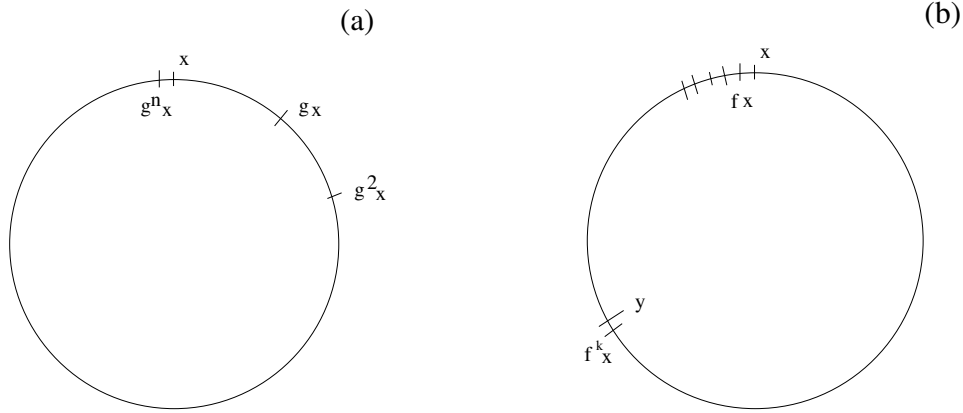


Figura 5.7: Região  $D$  e vizinhança  $U$  do ponto inicial  $x$  sob a ação da dinâmica.

assumir que  $\alpha \neq 2\pi n/m$ , i.e.,  $\alpha$  não é um número racional multiplicado por  $2\pi$ . Como  $D$  é limitado e  $g$  preserva volumes (comprimentos nesse caso), podemos aplicar o teorema de recorrência e afirmar que existe  $n$  tal que

$$|g^n x - x| < \delta \quad (5.111)$$

para todo  $\delta > 0$  (figura 5.7a). Aqui  $\delta$  faz o papel da vizinhança  $U$  do ponto  $x$ . Seja agora  $f = g^n$ . Sob a ação de  $f$  o ponto  $x$  é levado em  $f(x)$  que é tão próximo de  $x$  quanto se queira (figura 5.7b). Então, dado qualquer ponto  $y$  sobre o círculo podemos afirmar que a órbita de  $x$  passa arbitrariamente próxima de  $y$ . Em outras palavras, provamos que *todas as órbitas são densas no círculo*. Usaremos esse resultado no exemplo 2 abaixo.

**Exemplo 2** Dados os números inteiros da forma  $2^n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , considere a sequência formada pelo primeiro dígito de cada um desses números: 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2,  $\dots$

(a) O número 7 aparece?

(b) Qual a frequência com que o dígito 3 aparece?

Seja  $x_n = 2^n$ . Definimos a variável auxiliar  $y_n = \log_{10} x_n - [\log_{10} x_n]$ , onde  $[a]$  indica a parte inteira de  $a$ . Para  $n = 12$ , por exemplo,  $x_{12} = 4096 = 4.096 \times 10^3$  e  $y_{12} = (\log_{10} 4.096 \times 10^3) - [\log_{10} 4.096 \times 10^3] = (\log_{10} 4.096 + 3) - 3 = \log_{10} 4.096$ .

Assim, vemos que para que o primeiro dígito de  $x_n$  seja  $p$ , a condição  $\log_{10} p < y_n < \log_{10} (p+1)$  deve ser satisfeita. Consideremos então a sequência formada diretamente pelos  $y_n$ :  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = \log_{10} 2$ ,  $y_2 = 2\log_{10} 2$ ,  $y_3 = 3\log_{10} 2$ ,  $y_4 = 4\log_{10} 2 - 1$ , etc. Os números dessa sequência saltam de  $\log_{10} 2$ , mas sempre ficam entre 0 e 1: se  $y_n = n\log_{10} 2 > 1$ , subtraímos sua parte inteira. Podemos então escrever uma dinâmica discreta na forma  $y_{n+1} = y_n + \log_{10} 2$  onde os  $y_n$  ficam sobre um círculo de comprimento unitário. O problema agora recai no exemplo anterior. Como a dinâmica dos  $y_n$  é densa no círculo, sabemos que os  $y_n$  passarão arbitrariamente próximo de qualquer ponto do círculo. Então eles passarão pelo intervalo entre  $\log_{10} 7$  e  $\log_{10} 8$  e o número 7 certamente aparecerá na sequência.

A frequência com que cada dígito  $k$  aparece é igual ao comprimento do intervalo correspondente para  $y_n$ :  $P(k) = \log_{10} (k+1) - \log_{10} k = \log_{10} (k+1)/k$ . É fácil verificar que  $\sum_k P(k) = 1$ . Em particular  $P(3) \approx 0.125$  e  $P(7) \approx 0.058$  que é maior que  $P(8) \approx 0.051$ , embora o número 8 apareça logo no início da sequência. O primeiro dígito 7 aparece para  $n = 46$  e  $x_{46} = 70368744177664$ .

**Exemplo 3** Considere uma câmara cúbica de lado  $L$  e um gás com  $N$  partículas que, inicialmente, está confinado à metade da câmara, que está separada da outra metade por uma partição. Em  $t = 0$  abrimos a partição e deixamos o gás expandir. De acordo com o teorema de recorrência, depois de algum tempo todas as partículas deverão retornar à metade inicial. Porque esse efeito nunca é observado? A resposta é que o tempo necessário para que isso ocorra é muito grande. Podemos fazer uma estimativa desse tempo de retorno em termos de volumes no espaço de fases. Seja  $\tau$  uma unidade de tempo típica para que uma vizinhança  $\Omega_0$  do estado inicial se propague para  $\Omega_\tau$  de forma que não haja superposição com  $\Omega_0$ . O número máximo de passos de tamanho  $\tau$  que podem ser dados sem que  $\Omega_{n\tau}$  intercepte com algum  $\Omega_{m\tau}$  anterior é dado pela razão entre os volumes do espaço de fases e da vizinhança:  $V(\Omega)/V(\Omega_0)$ . Como a energia do gás é conservada,

$$\sum_{n=1}^N (p_{xn}^2 + p_{yn}^2 + p_{zn}^2) = 2mE.$$

Essa é a equação de uma esfera de raio  $r = \sqrt{2mE}$  em um espaço de dimensão

$3N$  (espaço dos momentos). Então

$$V(\Omega) = \int dx_1 \dots dz_{3N} dp_{x1} \dots dp_{z_{3N}} = cL^{3N} r^{3N-1}$$

onde  $c = 3N\pi^{3N/2}/\Gamma((3N/2 + 1))$ .

Qual seria uma definição razoável de vizinhança  $\Omega_0$ ? Vamos considerar, para efeitos de estimativa, que  $\Omega_0$  é tal que todas as partículas devem ocupar a primeira metade da caixa, independente de suas posições particulares e de suas velocidades. Assim,

$$V(\Omega_0) = cL^{2N}(L/2)^N r^{3N-1} = V(\Omega)/2^N$$

e  $V(\Omega)/V(\Omega_0) = 2^N = 10^{N \log_{10} 2} \approx 10^{10^{22}}$  para  $N = 10^{23}$ . O número é enorme e, mesmo multiplicando por qualquer unidade de tempo razoável, é muitas vezes maior do que a idade do universo.

## 5.12 Exercícios

- (a) Encontre uma função geratriz do tipo  $F_3$  para a transformação identidade.  
(b) Seja  $Q = Aq$  uma transformação pontual (as novas posições dependem apenas das posições originais) com  $A$  uma matriz  $n \times n$  ortogonal de coeficientes constantes. Mostre que os novos momentos são dados pela mesma matriz aplicada no vetor composto pelos velhos momentos mais um gradiente no espaço de coordenadas.
- Considere um sistema de dois graus de liberdade e coordenadas cartesianas  $x, y, p_x, p_y$ . A transformação para coordenadas polares é dada por

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta.$$

Encontre uma função geratriz do tipo  $F_2$  para a transformação de  $x, y, p_x, p_y$  para  $r, \theta, p_r, p_\theta$ . Encontre  $p_x$  e  $p_y$  em termos de  $r, \theta, p_r, p_\theta$ .

- Mostre que a matriz  $M = \partial\zeta/\partial\eta$  para a transformação

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 & P_1 &= p_1 - 2p_2 \\ Q_2 &= p_2 & P_2 &= -2q_1 - q_2 \end{aligned}$$

é simplética. Encontre uma função geratriz do tipo  $F(p_1, Q_1, p_2, P_2)$ .

4. Mostre que a transformação

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q$$

satisfaz  $\{Q, P\}_{q,p} = 1$  e  $\{q, p\}_{Q,P} = 1$ .

5. Mostre que a transformação  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  gerada por  $F_1(q, Q)$  satisfaz  $\{Q, P\}_{q,p} = 1$ . Faça o cálculo para um grau de liberdade apenas.
6. Mostre que a transformação

$$Q = p + iaq, \quad P = \frac{p - iaq}{2ia}$$

é canônica e encontre uma função geratriz. Use essa transformação para resolver o oscilador harmônico.

7. A hamiltoniana de um sistema tem a forma

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q^2} + p^2 q^4 \right).$$

Encontre uma transformação canônica que reduza  $H$  à forma de um oscilador harmônico. Escreva a solução  $q = q(t)$ .

8. Um sistema com dois graus de liberdade é descrito pela hamiltoniana

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2.$$

Mostre que

$$F_1 = \frac{p_1 - a q_1}{q_2} \quad \text{e} \quad F_2 = q_1 q_2$$

são constantes do movimento. É possível encontrar outras constantes de movimento independentes usando a identidade de Jacobi entre  $F_1$ ,  $F_2$  e  $H$ ?

9. Mostre, usando a condição de constante de movimento via parênteses de Poisson, que o vetor de Laplace-Runge-Lenz

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r}$$

é uma constante do movimento para o problema de Kepler  $H = p^2/2m - k/r$ .

10. Mostre as propriedades (a)-(h) do exemplo 5.8.1.
11. Calcule a evolução temporal de um ensemble Gaussiano sob a ação de um potencial harmônico (veja o exemplo 5.8.2). Calcule o desvio quadrático médio  $\Delta q(t)$  e mostre que ele é periódico com metade do período do oscilador. Mostre que para uma escolha apropriada das larguras da distribuição inicial  $\Delta q$  fica independente do tempo.
12. Mostre que a distribuição dada pela equação (5.93) satisfaz  $dD/dt = 0$ , i.e.,  $\partial D/\partial t = \{H, D\}$ .



# Capítulo 6

## Integrabilidade

A teoria de transformações canônicas sugere que podemos reduzir a solução das equações de Hamilton ao problema de encontrar uma mudança de variáveis que torne a dinâmica trivial. Uma possibilidade, como já mencionamos, consiste em procurar uma transformação independente do tempo que leve as variáveis originais  $(q, p)$  a  $(Q, P)$  de forma que a nova hamiltoniana dependa apenas dos novos momentos  $P$ , i.e.,  $H(q(Q, P), p(Q, P)) = K(P)$ . Uma vez encontradas tais variáveis obtemos

$$\begin{aligned}\dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \equiv \Omega_i(P)\end{aligned}\tag{6.1}$$

cuja solução é  $P_i = P_{i0} = \text{const}$ ,  $Q_i(t) = Q_{i0} + \Omega_i t$ . Nas variáveis originais

$$\begin{aligned}q(t) &= q(Q(t), P_0) \\ p(t) &= p(Q(t), P_0)\end{aligned}\tag{6.2}$$

são obtidas diretamente das equações da transformação canônica. Como veremos, existe uma certa liberdade na definição das variáveis  $Q$  e  $P$ . Uma escolha particular leva às variáveis de ação e ângulo, como veremos adiante.

Uma outra maneira de tornarmos as equações de movimento triviais é buscando uma transformação canônica dependente do tempo, gerada, por exemplo, por uma função do tipo  $F_2(q, P, t)$ , que torne a nova hamiltoniana identicamente nula:

$$K(Q, P) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t)) + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0.\tag{6.3}$$

Nesse caso teremos

$$\begin{aligned}\dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0\end{aligned}\tag{6.4}$$

ou  $P_i = P_{i0}$ ,  $Q_i(t) = Q_{i0}$ . A função geratriz  $F$ , usualmente denotada por  $S$ , é chamada de *função principal de Hamilton*. O estudo das propriedades dessa transformação canônica é conhecido como Teoria de Hamilton-Jacobi.

Vamos, inicialmente, expor as idéias principais da teoria de Hamilton-Jacobi e ver sua conexão com a transformação independente do tempo que leva a  $K(P)$ . O leitor pode ter a impressão que qualquer problema Hamiltoniano pode ser resolvido por uma dessas maneiras. No entanto, infelizmente, isso não é verdade. A pergunta que devemos responder é: em que condições as transformações canônicas acima podem ser encontradas? O teorema de Arnold-Liouville [3] dá as condições para que elas existam, e elas são muito restritivas. Do lado oposto a esses sistemas solúveis, ou integráveis, estão os sistemas caóticos, que estudaremos adiante.

## 6.1 A equação de Hamilton-Jacobi

Procuramos um função geratriz  $S(q, P, t)$  tal que [5]

$$\begin{aligned}H + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Usando a segunda dessas equações podemos re-escrever a primeira como

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.\tag{6.6}$$

Veja que  $S = S(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n, t)$ , mas os  $P_i$  são constantes, pois  $K = 0$ . A equação acima, conhecida como equação de Hamilton-Jacobi, é portanto uma equação diferencial parcial de  $n+1$  variáveis: as  $n$  coordenadas

$q_i$  e o tempo  $t$ . Uma solução completa dessa equação requer, portanto,  $n + 1$  constantes de integração. No entanto, uma delas é aditiva, pois a equação só envolve as derivadas de  $S$ . As  $n$  constantes de integração não triviais,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  devem estar ligadas com os  $n$  valores das constantes  $P_i$ . Quando especificamos as relações  $P_i = P_i(\alpha)$  definimos uma transformação canônica particular. Cada escolha dessas relações corresponde a uma transformação diferente, mas todas elas são, de certa forma, equivalentes (veja o exemplo da partícula livre abaixo). Uma possibilidade simples é escolher diretamente  $\alpha_i = P_i$  e escrever

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_i} \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde os  $Q_i$  também são constantes. Do segundo conjunto de equações tiramos  $q_i = q_i(Q, P, t)$  que podemos substituir no primeiro conjunto para obter  $p_i = p_i(Q, P, t)$ . Os valores das constantes  $P$  e  $Q$  estão ligados com os valores iniciais  $q_{i0}$  e  $p_{i0}$ :

$$\begin{cases} q_{i0} = q_i(Q, P, 0) \\ p_{i0} = p_i(Q, P, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_i = P_i(q_0, p_0) \\ Q_i = Q_i(q_0, p_0) \end{cases} . \quad (6.8)$$

Veja que não é necessário identificarmos as constantes  $\alpha_i$  diretamente com os novos momentos  $P_i$ . Poderíamos tê-las escolhido como funções independentes dos  $P_i$ ,  $\alpha_i = \alpha_i(P)$ . Isso modificaria a transformação canônica, mas não alteraria significativamente os resultados.

### Exemplo 6.1.1 - A partícula livre

A equação de Hamilton-Jacobi nesse caso é

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (6.9)$$

Escrevendo  $S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t$  onde  $\alpha$  é a constante de separação, obtemos

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 = \alpha \quad (6.10)$$

que pode ser integrada imediatamente. O resultado é

$$S(q, \alpha, t) = \sqrt{2m\alpha} q - \alpha t \quad (6.11)$$

onde a constante aditiva foi descartada por ser irrelevante. Até aqui a relação entre  $\alpha$  e  $P$  não foi especificada. Escolhendo  $\alpha = P$  e usando  $S$  nas equações que definem a transformação canônica obtemos

$$S(q, P, t) = \sqrt{2mP} \, q - Pt, \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mP}, \\ Q &= \frac{\partial S}{\partial P} = \sqrt{\frac{m}{2P}} q - t. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Calculando em  $t = 0$  temos  $P = p_0^2/2m = \text{energia}$  e  $Q = \sqrt{m/2P}q_0 = mq_0/p_0$ . Substituindo esses valores nas equações acima e resolvendo para  $q$  e  $p$  obtemos os resultados esperados

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2P}{m}}(Q + t) = q_0 + \frac{p_0}{m}t \\ p(t) &= p_0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Para ilustrar a liberdade de escolha da relação entre  $\alpha$  e  $P$  fazemos a opção alternativa  $P = \sqrt{2m\alpha}$ . Com isso obtemos

$$S(q, P, t) = Pq - \frac{P^2}{2m}t \quad (6.15)$$

o que leva à transformação canônica natural

$$q = Q + \frac{P}{m}t \quad (6.16)$$

$$p = P. \quad (6.17)$$

Quando as condições iniciais são impostas voltamos ao resultado anterior.

### Exemplo 6.1.2 - O oscilador harmônico

A equação de Hamilton-Jacobi para o oscilador harmônico é um pouco mais complicada, mas ainda pode ser resolvida analiticamente. Como este é um problema particularmente importante, faremos toda a álgebra em detalhe. Começamos por

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (6.18)$$

Fazendo novamente a separação de variáveis  $S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t$  e escolhendo  $\alpha = P$  obtemos

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = P \quad (6.19)$$

ou

$$W = \sqrt{2mP} \int \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2P}} dq. \quad (6.20)$$

A integral pode ser feita com a mudança de variáveis

$$\sin u = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q \quad (6.21)$$

e o resultado é

$$W = \frac{P}{\omega} (u + \sin u \cos u). \quad (6.22)$$

Para escrever explicitamente as equações da transformação canônica precisaremos calcular  $\partial u / \partial P$  e  $\partial u / \partial q$ . Os resultados podem ser obtidos derivando os dois lados da equação (6.21) em relação a  $P$  e a  $q$  respectivamente. Obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial P} = -\frac{1}{2P} \tan u \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial q} = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} \frac{1}{\cos u}. \quad (6.23)$$

Então temos:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial P} - t \\ &= \frac{1}{\omega} (u + \sin u \cos u) + \frac{P}{\omega} (1 + \cos^2 u - \sin^2 u) \left( -\frac{\tan u}{2P} \right) - t. \quad (6.24) \\ &= \frac{1}{\omega} [u + \sin u \cos u] - \frac{1}{\omega} \cos^2 u \tan u - t = \frac{u}{\omega} - t \end{aligned}$$

Então,  $u = \omega(Q + t)$  e, pela eq.(6.21)

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sin(\omega Q + \omega t). \quad (6.25)$$

A equação para  $p$  resulta em

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \frac{P}{\omega}(1 + \cos^2 u - \sin^2 u) \frac{du}{dq} \\ &= \frac{2P}{\omega} \cos^2 u \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} \frac{1}{\cos u} = \sqrt{2mP} \cos u \end{aligned} \quad (6.26)$$

Usando o resultado que encontramos para  $u$  obtemos

$$p(t) = \sqrt{2mP} \cos(\omega Q + \omega t). \quad (6.27)$$

Para finalizar escrevemos a função principal de Hamilton explicitamente e a relação entre as constantes  $P = \alpha$  e  $Q$  e as condições iniciais  $q_0$  e  $p_0$ :

$$S(q, P, t) = \frac{P}{\omega} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q \right) + \sqrt{\frac{mP}{2}} q \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2P}} - Pt \quad (6.28)$$

$$P = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} \quad (6.29)$$

$$\tan \omega Q = m\omega \frac{q_0}{p_0}. \quad (6.30)$$

## 6.2 Solução formal da equação de Hamilton-Jacobi

Um *insight* importante sobre a interpretação física da função principal de Hamilton é obtido calculando-se a derivada total de  $S(q, \alpha, t)$ . Usando as equações (6.5) encontramos

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = L. \quad (6.31)$$

A função principal de Hamilton nada mais é do que a ação. Essa relação nos permite escrever uma solução formal para  $S(q, P, t)$ . Em primeiro lugar lembramos que  $P_i = P_i(q_0, p_0)$  e  $Q_i = Q_i(q_0, p_0)$ . Assim, podemos especificar uma trajetória fornecendo as  $2n$  condições iniciais  $(q_0, p_0)$  ou então  $(q_0, P)$  (pois dados  $q_0$  e  $P$  podemos obter  $p_0$ ).

Para  $P$  fixo consideramos então uma trajetória especificando o valor de  $q_0$ . Então, de acordo com a equação acima

$$S(q, P, t) = S(q_0, P, 0) + \int_0^t L \, dt \quad (6.32)$$

onde a integral é feita sobre a trajetória escolhida. Essa solução é formal porque para fazermos a integral da lagrangiana precisamos ter a trajetória, isto é, precisamos ter a solução de antemão. No entanto, veremos adiante que essa expressão tem uma importante aplicação no cálculo semiclássico da evolução temporal de estados quânticos. Como exercício vamos verificar essa expressão para a partícula livre. Nesse caso temos

$$S(q_0, P, 0) = \sqrt{2mP} \, q_0 \quad (6.33)$$

e

$$\int_0^t L \, dt = \frac{p_0^2}{2m} t = Pt. \quad (6.34)$$

Substituindo na eq.(6.32) e usando que  $q = q_0 + p_0 t/m$  obtemos

$$\begin{aligned} S(q, P, t) &= \sqrt{2mP} \, q_0 + Pt = \sqrt{2mP} \left( q - \frac{p_0}{m} t \right) + Pt \\ &= \sqrt{2mP} \, q - 2Pt + Pt = \sqrt{2mP} \, q - Pt. \end{aligned}$$

Fica como exercício para o leitor verificar a equação (6.32) para o oscilador harmônico.

## 6.3 Hamilton-Jacobi independente do tempo

Se a hamiltoniana  $H(q, p)$  não depende explicitamente do tempo, é sempre possível escrever

$$S(q, P, t) = W(q, \alpha) - \gamma \, t \quad (6.35)$$

e reduzir a equação de Hamilton-Jacobi à sua forma independente do tempo:

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \gamma. \quad (6.36)$$

Como só existem  $n$  constantes de integração independentes, se  $n > 1$  a constante de separação deve ser uma função das constantes  $\alpha_i$ , i.e.,

$$\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (6.37)$$

Se  $n = 1$  podemos escolher diretamente  $\gamma = \alpha$ .

É interessante estudar  $W(q, P)$  como gerando sua própria transformação canônica independente do tempo. Como nesse caso a nova hamiltoniana é igual à original escrita nas novas coordenadas, e como  $\gamma = \gamma(\alpha) = \gamma(\alpha(P))$  vemos que  $K = \gamma(\alpha) = K(P)$ , uma função independente das novas coordenadas  $Q$ . Dessa forma os novos momentos ainda são constantes. Escolhendo  $P_i = \alpha_i$   $W$  deve satisfazer

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \end{aligned} \tag{6.38}$$

$$K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = K(P) = \gamma(\alpha) = \gamma(P)$$

onde usamos (6.36) e (6.37).

As equações de movimento nas novas variáveis então se reduzem a

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad P_i = \alpha_i \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i} \equiv \Omega_i(\alpha) \quad \rightarrow \quad Q_i = Q_{i0} + \Omega_i(\alpha)t. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Finalmente mostramos que a função  $W$  é a ação reduzida de Maupertuis:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n p_i \frac{dq_i}{dt} \tag{6.40}$$

ou

$$W = \int p \cdot dq. \tag{6.41}$$

É importante enfatizar que a equação de Hamilton-Jacobi é uma equação diferencial parcial e admite várias soluções. Quando  $H$  é independente do tempo a separação de variáveis (6.35) é possível, mas mesmo nesse caso podemos tratar a equação de Hamilton-Jacobi como um problema de condições iniciais: dada uma função  $S(q_0, \alpha, 0)$  a solução  $S(q, \alpha, t)$  é dada pela equação (6.32) com  $q_0$  sendo o valor da coordenada que propaga para  $q$  no tempo  $t$  para  $\alpha$  fixo.



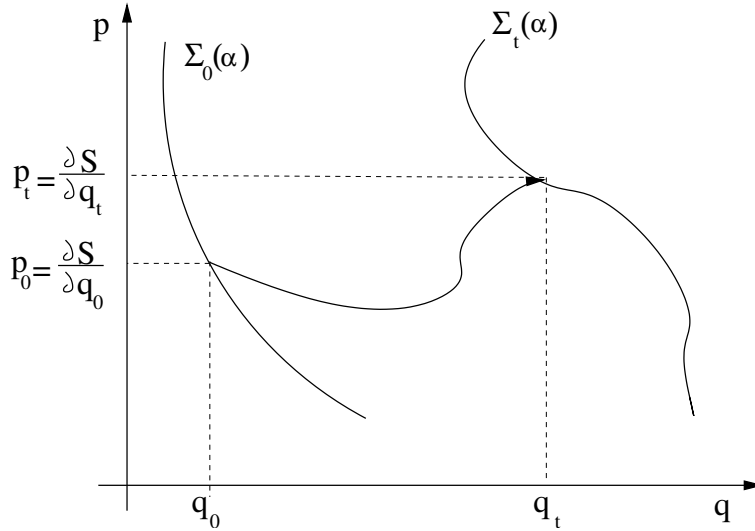


Figura 6.1: Ilustração das superfícies  $\Sigma_\alpha$  geradas pela equação de Hamilton-Jacobi dependente do tempo.

## 6.4 Interpretação geométrica e condições de existência

A transformação canônica gerada por  $S(q, \alpha, t)$  pode ser interpretada da seguinte forma [21]: para cada conjunto fixo de constantes  $\alpha_i$ , as relações

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} = p_i(q, \alpha, t) \quad (6.42)$$

conectam cada ponto  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  com um ponto  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  no instante  $t$ . As  $n$  equações  $p = p(q, \alpha, t)$  definem uma superfície  $\Sigma_t(\alpha)$  de dimensão  $n$ . Em  $t = 0$   $p = p(q, \alpha, 0)$ , ou  $p_0 = p(q_0, \alpha)$ , gera uma superfície inicial  $\Sigma_0(\alpha)$ . Como  $\alpha$  está fixo, escolher um ponto  $(q_0, p_0)$  em  $\Sigma_0(\alpha)$  corresponde a escolher as constantes  $Q$ . Conforme o tempo passa, cada condição inicial  $(q_0, p_0 = \partial S(q_0, \alpha, 0)/\partial q_0)$  de  $\Sigma_0(\alpha)$  é propagada para  $(q_t, p_t = \partial S(q_t, \alpha, t)/\partial q_t)$ . Assim, o ponto  $(q, p)$  em  $\Sigma_t(\alpha)$  é o ponto que propagou de  $(q_0, p_0)$  em  $\Sigma_0(\alpha)$ . Em outras palavras, a superfície definida por  $p = p(q, \alpha, t)$  pode ser obtida propagando por um tempo  $t$  cada ponto da superfície inicial definida por  $p = p(q, \alpha, 0)$ .

Se  $H$  não depende do tempo podemos tentar a separação de variáveis

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \gamma(\alpha)t. \quad (6.43)$$

Nesse caso, como

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q}(q, \alpha) \quad (6.44)$$

vemos que a superfície  $\Sigma(\alpha)$  não muda com o tempo. Assim,  $\Sigma(\alpha)$  deve ser uma superfície invariante pelo fluxo de  $H$ , de forma que pontos  $(q_0, p_0)$  sobre ela sejam propagados para pontos  $(q_t, p_t)$  ainda sobre a mesma superfície. Para sistemas com um único grau de liberdade a única superfície invariante com dimensão um é a própria superfície de energia. Nesse caso, de fato temos que

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V(q) = \gamma \quad (6.45)$$

e

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m(\gamma - V(q))} \quad (6.46)$$

que corresponde à superfície de energia com  $E = \gamma$ . A figura 6.2 ilustra a superfície  $\Sigma(\alpha) = \Sigma_E$  para potenciais onde o movimento é confinado.

Em sistemas com  $n > 1$  graus de liberdade a superfície de energia  $\Sigma_E$  ainda é invariante pelo fluxo. No entanto, a dimensão dessa superfície é  $\dim(\Sigma_E) = 2n - 1$ , que é maior do que  $n$  se  $n > 1$ . Para conseguirmos superfícies invariantes de dimensão menor são necessários outros vínculos, i.e., outras constantes do movimento que diminuam a dimensão da superfície invariante. Precisamos exatamente de  $n - 1$  outras constantes. Caso essas constantes não existam, a separação de variáveis dada pela eq.(6.43) não produz uma solução geral para a função  $W$ . Esse é basicamente o conteúdo do teorema de Arnold-Liouville que discutiremos adiante.

Para finalizar essa seção voltamos ao exemplo do oscilador harmônico. Vimos na seção 6.1 que

$$W(q, \alpha) = \frac{\alpha}{\omega} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}} q \right) + \sqrt{\frac{m\alpha}{2}} q \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}. \quad (6.47)$$

A transformação canônica  $(q, p) \rightarrow (Q, P = \alpha)$  pode ser escrita imediatamente se olharmos as equações (6.24) e (6.26) do exemplo 6.1.2:

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mP} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2P}} \quad (6.48)$$

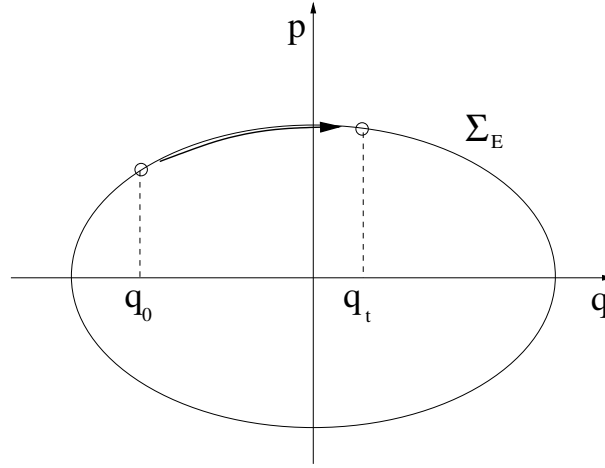


Figura 6.2: Superfície invariante  $\Sigma_E$  no caso de um grau de liberdade.

e

$$Q = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q \right) \quad (6.49)$$

Resolvendo para  $q$  e  $p$  obtemos

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sin(\omega Q) \quad (6.50)$$

$$p = \sqrt{2mP} \cos(\omega Q).$$

A partir dessas equações obtemos ainda

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = P = K. \quad (6.51)$$

cuja dinâmica resulta em  $P = P_0$  e  $Q = Q_0 + t$ .

## 6.5 O limite semiclássico da equação de Schrödinger

Para sistemas com um grau de liberdade a equação de Schrödinger pode ser escrita como

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + V(q)\psi. \quad (6.52)$$

Se  $V = 0$  existem soluções do tipo  $\psi_p(q, t) = Ae^{i(pq-Et)/\hbar}$  onde  $E = p^2/2m$ . Se o comprimento de onda de De Broglie  $\hbar/p$  é pequeno em relação às dimensões onde  $V(q)$  varia apreciavelmente, então esperamos que, localmente,  $\psi$  se comporte como se a partícula fosse livre. Escrevemos então

$$\psi(q, t) = A(q, t)e^{\frac{i}{\hbar}\sigma(q, t)} \quad (6.53)$$

onde  $A$  e  $\sigma$  são reais e  $A(q, 0) \equiv A_0(q)$  e  $\sigma(q, 0) \equiv \sigma_0(q)$  são supostas conhecidas. Em outras palavras, dada a função de onda inicial queremos obter sua evolução temporal. Substituindo na equação de Schrödinger obtemos

$$i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} - A \frac{\partial \sigma}{\partial t} = e^{-\frac{i}{\hbar}\sigma(q, t)} H(q, \hat{p}) e^{\frac{i}{\hbar}\sigma(q, t)} A. \quad (6.54)$$

Para calcular o lado direito vemos que

$$\begin{aligned} (a) \quad [\hat{p}, f(q)] &= -i\hbar \frac{\partial f}{\partial q} \\ (b) \quad [\hat{p}, e^{i\sigma(q, t)/\hbar}] &= \frac{\partial \sigma}{\partial q} e^{i\sigma(q, t)/\hbar} \\ (c) \quad e^{-i\sigma(q, t)/\hbar} \hat{p} e^{i\sigma(q, t)/\hbar} &= \hat{p} + \frac{\partial \sigma}{\partial q} \\ (d) \quad e^{-i\sigma(q, t)/\hbar} \hat{p}^n e^{i\sigma(q, t)/\hbar} &= \left( \hat{p} + \frac{\partial \sigma}{\partial q} \right)^n \end{aligned} \quad (6.55)$$

e portanto obtemos:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} - A \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= H(q, \hat{p} + \frac{\partial \sigma}{\partial q}) A \\ &= \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial \sigma}{\partial q} \right)^2 A + V(q) A \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial q^2} A - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \sigma}{\partial q} \frac{\partial A}{\partial q} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial q} \right)^2 A + V(q) A \end{aligned} \quad (6.56)$$

Separamos agora as partes real e imaginária. Para a parte real obtemos

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial q} \right)^2 A + V(q) A - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} + A \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \quad (6.57)$$

Desprezando o terceiro termo, que é de ordem  $\hbar^2$  em relação aos outros, podemos cancelar a amplitude  $A$  e ficamos com

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial q} \right)^2 + V(q) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (6.58)$$

ou

$$H \left( q, \frac{\partial \sigma}{\partial q} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (6.59)$$

que é a equação de Hamilton-Jacobi. Note que o termo que foi desprezado pode ainda ser adicionado ao potencial fazendo-se  $V(q) \rightarrow V(q) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial q^2}$ , que é o ‘potencial quântico’ da teoria de Bohm, que depende da amplitude da função de onda.

A parte imaginária da equação resulta exatamente em:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial q^2} A - \frac{1}{m} \frac{\partial \sigma}{\partial q} \frac{\partial A}{\partial q}. \quad (6.60)$$

Multiplicando tudo por  $2A$  e definindo  $\rho = |\psi|^2 = A^2$  obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial q^2} \rho - \frac{1}{m} \frac{\partial \sigma}{\partial q} \frac{\partial \rho}{\partial q}. \quad (6.61)$$

Finalmente, notando que  $p = \partial \sigma / \partial q$  e definindo  $v = p/m$ ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial q} \rho - v \frac{\partial \rho}{\partial q} \quad (6.62)$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} (\rho v) = 0 \quad (6.63)$$

que é a equação da continuidade. O cálculo em 3-D resulta analogamente em  $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ .

Podemos agora resolver as equações (6.59) e (6.63). Para a primeira sabemos que (veja a seção 6.2)

$$\sigma(q, t) = \sigma_0(q_0, 0) + \int_{q_0, 0}^{q, t} L \, dt. \quad (6.64)$$

onde o ponto  $q_0$  é tal que a trajetória que parte de  $(q_0, p_0 = \partial \sigma_0 / \partial q_0)$  atinge o ponto  $q$  no ponto  $t$ . Na prática, dado o ponto  $q$  e seu momento associado

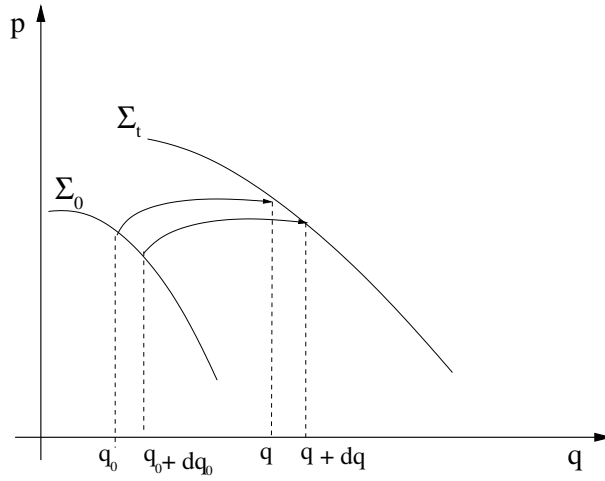


Figura 6.3: Superfície invariante  $\Sigma_E$  no caso de um grau de liberdade.

$p = \partial\sigma/\partial q$ , temos que propagar esse ponto para trás no tempo para encontrar  $q_0$ , como ilustrado na figura (6.3).

A equação da continuidade, por outro lado, nos dá a conservação de  $\rho dq$  [21], assim como em fluidos temos a conservação da massa  $dm = \rho dV$ . Assim, se o intervalo  $[q_0, q_0 + dq_0]$  é propagado para  $[q, q + dt]$  então

$$\rho(q_0, 0)dq_0 = \rho(q, t)dq \quad (6.65)$$

ou

$$|A(q, t)| = |A(q_0, 0)| \left| \frac{dq_0}{dq} \right|^{1/2}. \quad (6.66)$$

Para sistemas com um grau de liberdade podemos obter uma expressão ainda mais simples. Como a energia se conserva escrevemos

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(q))} = p(q)/m \quad e \quad \frac{dq_0}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(q_0))} = p(q_0)/m \quad (6.67)$$

ou, dividindo uma pela outra

$$\frac{dq_0}{dq} = \frac{p(q_0)}{p(q)} \quad (6.68)$$

Colocando tudo junto obtemos o resultado procurado:

$$\psi(q, t) = A_0(q_0) \left| \frac{p(q_0)}{p(q)} \right|^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} [\sigma_0(q_0) + S(q_0, 0; q, t)]}. \quad (6.69)$$

Se houver mais de uma trajetória que atinja o ponto  $q$  no tempo  $t$  fixado, temos que somar as contribuições de todas elas.

Esse procedimento resolve a equação de Schrödinger como um problema de condições iniciais: dada  $\psi(q, 0)$  temos  $\psi(q, t)$ . Podemos ainda nos perguntar sobre os estados estacionários, onde  $\psi(q, t) = \phi(q)e^{-iEt/\hbar}$ . Para que tenhamos esse tipo de dependência temporal, basta que procuremos soluções da eq.(6.59) da forma

$$\sigma(q, t) = \mathcal{S}(q) - Et. \quad (6.70)$$

Substituindo na equação de Hamilton-Jacobi vemos que  $\mathcal{S}(q)$  deve satisfazer  $H(q, \partial\mathcal{S}/\partial q) = E$ , que é sua versão independente do tempo. Explicitamente temos que

$$p(q) = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial q} = \pm \sqrt{2m(E - V(q))} \quad (6.71)$$

define a superfície invariante  $\Sigma_E = (q, p(q))$ , que é a superfície de energia, e

$$\mathcal{S}(q) = \pm \int p(q) dq. \quad (6.72)$$

Como temos duas soluções, os estados estacionários ficam dados por

$$\psi_E(q, t) = \frac{e^{-iEt/\hbar}}{\sqrt{p(q)}} \left[ C_1 e^{+\frac{i}{\hbar} \int p(q) dq} + C_2 e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(q) dq} \right] \quad (6.73)$$

que é o resultado WKB. Para completar a solução é ainda preciso obter a forma de  $\psi(q, t)$  nas regiões classicamente proibidas e conectá-las com a expressão acima. Esse procedimento mostra que apenas as energias onde

$$\oint p(q) dq = (n + 1/2)h \quad (6.74)$$

produzem conexões compatíveis. Essa equação é conhecida com regra de quantização de Bohr-Sommerfeld. Veja mais detalhes, por exemplo, no livro do Landau [22]. Como exercício, calcule a evolução temporal de uma partícula livre cuja função de onda inicial é um auto-estado de momento,  $\psi(p, 0) = \delta(p - p')$ . Mostre que nesse caso  $\sigma_0(q) = qp'$ .

## 6.6 O teorema de integrabilidade de Arnold-Liouville

Como comentamos no início desse capítulo, a teoria de Hamilton-Jacobi pode dar a impressão de que a solução de qualquer problema Hamiltoniano pode ser

reduzida a uma transformação canônica. Veremos agora quais as condições que garantem que essa transformação canônica pode ser encontrada. Os sistemas para os quais tal função geratriz pode ser obtida *apenas com operações de inversão e integração de funções conhecidas* são chamados de integráveis [3]. Veremos já o significado prático dessa frase em itálico.

Antes de enunciar o teorema de Arnold-Liouville precisamos de algumas definições auxiliares:

– Chamaremos de  $\mathcal{F}^{2n}$  o espaço de fases de um sistema com  $n$  graus de liberdade. Veja que  $\dim(\mathcal{F}^{2n}) = 2n$ .

– Duas funções  $F_1(\eta)$  e  $F_2(\eta)$ , onde  $\eta \in \mathcal{F}^{2n}$ , estão em **involução** se o parêntese de Poisson entre elas é nulo:

$$\{F_1, F_2\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{\partial F_2}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = 0.$$

– Duas funções  $F_1(\eta)$  e  $F_2(\eta)$  são **independentes** se os vetores

$$G_{F_i} \equiv J \frac{\partial F_i}{\partial \eta}$$

forem L.I. (linearmente independentes). Veja que o vetor  $G$  será a velocidade  $\dot{\eta}$  quando a função  $F$  for a hamiltoniana.

– O fluxo da hamiltoniana  $H$  será denotado por  $g_H^t$ . Uma condição inicial  $\eta \in \mathcal{F}^{2n}$ , quando propagada por  $H$  por um tempo  $t$  estará no ponto  $\eta_t = g_H^t \eta$ .

**TEOREMA (Arnold-Liouville)**

Se existirem  $n$  funções  $F_i(\eta)$ ,  $\eta \in \mathcal{F}^{2n}$ , independentes e em involução então:

1 – A superfície  $n$ -dimensional  $M_f$ , definida por

$$M_f = \{\eta \text{ t.q. } F_i(\eta) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

onde  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  é um vetor de valores numéricos, é invariante pelo fluxo de  $H = F_1$ .

2 – Se  $M_f$  for limitada e conexa (i.e., se for finita e não tiver partes disjuntas) então ela é difeomorfa a um toro  $n$ -dimensional  $T^n$ , definido como o produto



direto de  $n$  círculos.

3 – Nesse caso existem coordenadas  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  sobre  $M_f$  tal que

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i(f),$$

i.e., o movimento gerado por  $H$  é condicionalmente periódico.

4 – As equação de movimento podem ser integradas por quadraturas, i.e., por operações que envolvem apenas inversão ou integração de funções conhecidas. Em outras palavras, uma transformação canônica  $(q, p) \rightarrow (\phi, I)$  pode ser construída de tal forma que, nas novas variáveis,  $H = H(I)$ .

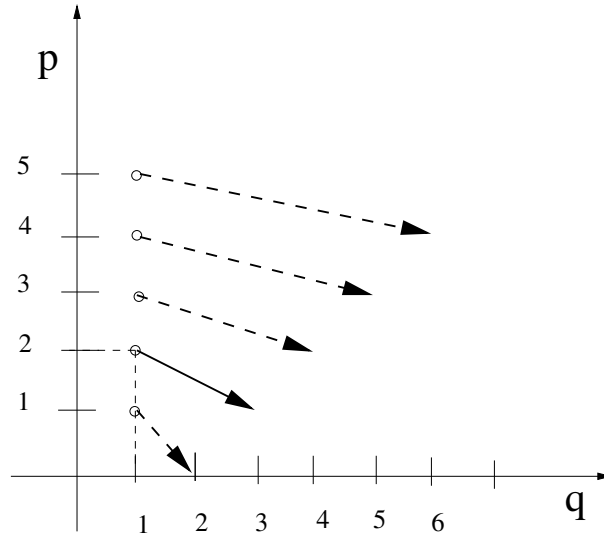
Provaremos primeiramente o item 1 acima. Como escolhemos  $F_1$  como hamiltoniana, então se  $\eta_0 \in M_f$ , i.e.  $F_i(\eta_0) = f_i$ , temos que

$$\frac{d}{dt}F_i(\eta(t)) = \{F_i, F_1\} = 0$$

e todas as  $F_i$  são constantes na trajetória  $\eta(t)$ , i.e.,  $F_i(\eta_0) = F_i(\eta(t)) = f_i$ . Assim, a trajetória não sai de  $M_f$  que é, portanto, invariante pelo fluxo de  $H$ .

A segunda parte do teorema é a mais complicada, pois trata-se de uma propriedade global da superfície  $M_f$ . Como a escolha de  $H$  como sendo  $F_1$  é totalmente arbitrária, podemos considerar cada uma das  $F_i$  como gerando um fluxo  $g_{F_i}^t$ , que abreviaremos, quando não houver problemas, por  $g_i^t$ . Cada um desses fluxos é dado explicitamente pelas equações de movimento  $\dot{\eta} = J\partial F_i/\partial\eta$ . Os vetores  $G_i = J\partial F_i/\partial\eta$  geram um campo vetorial sobre  $M_f$ : em cada ponto  $\eta \in M_f$  temos  $n$  vetores L.I.  $G_1(\eta), G_2(\eta), \dots, G_n(\eta)$  onde

$$G_i(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial p_1}(\eta) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial p_n}(\eta) \\ -\frac{\partial F_i}{\partial q_1}(\eta) \\ \vdots \\ -\frac{\partial F_i}{\partial q_n}(\eta) \end{pmatrix}$$

Figura 6.4: Exemplo de campo para  $n=1$ .

Por exemplo, em um grau de liberdade e para  $F = p^2/2 + q^4/4$ , teremos

$$G(q, p) = \begin{pmatrix} p \\ -q^3 \end{pmatrix}.$$

No ponto  $\eta_0 = (1, 2)$  teremos  $G(\eta_0) = (2, -1)$ , como ilustrado na figura (6.4).

Precisamos agora de dois resultados sobre a comutatividade dos fluxos gerados por cada uma das funções  $F_i$ . Esses resultados estão demonstrados nos apêndices B e C.

Lema 1 – O comutador de  $G_{F_i}$  com  $G_{F_j}$  é dado por

$$\begin{aligned} [G_{F_i}, G_{F_j}] &\equiv G_{F_i}(G_{F_j}(\eta)) - G_{F_j}(G_{F_i}(\eta)) \\ &= G_{\{F_i, F_j\}}(\eta) = J \frac{\partial}{\partial \eta} \{F_i, F_j\}. \end{aligned} \tag{6.75}$$

Lema 1a – Se  $\{F_i, F_j\} = 0$  então  $[G_{F_i}, G_{F_j}] = 0$ . A demonstração está no apêndice B.

Lema 2 – Se  $[G_{F_i}, G_{F_j}] = 0$  então os fluxos  $g_i^t$  e  $g_j^s$  comutam:

$$g_i^t g_j^s \eta = g_j^s g_i^t \eta \tag{6.76}$$

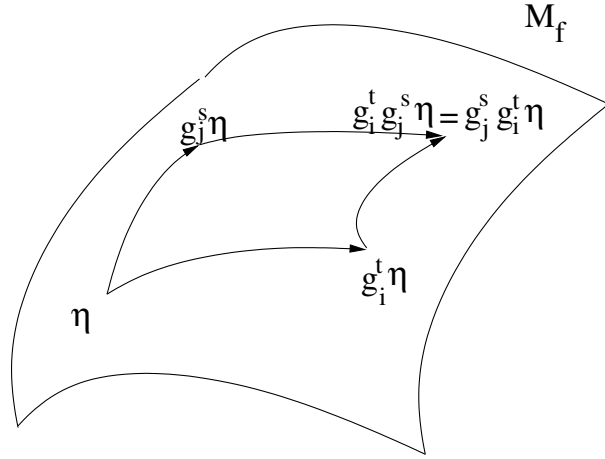


Figura 6.5: Comutatividade dos fluxos sobre  $M_f$ .

para todo  $\eta$ . A demonstração está no apêndice C e a figura 6.5 ilustra o resultado.

Como os fluxos comutam, podemos definir um ‘superfluxo’ sobre  $M_f$  que combina a ação de todas as possíveis dinâmicas geradas pelas funções  $F_i$ :

$$g^{\mathbf{t}} = g_1^{t_1} g_2^{t_2} \dots g_n^{t_n} \quad (6.77)$$

onde  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ . Fixando um ponto  $x_0 \in M_f$ ,  $g^{\mathbf{t}}x_0$  passeia sobre  $M_f$  conforme  $\mathbf{t}$  anda sobre  $\mathbb{R}^n$ , gerando um mapa de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $M_f$ : para cada  $\mathbf{t}$  temos  $x = g^{\mathbf{t}}x_0$ . Como as trajetórias  $x_i(t_i) = g^{t_i}x_0$  estão unicamente definidas e os fluxos comutam, o mapa de  $\mathbb{R}^n \rightarrow M_f$  é localmente um-a-um. De fato, para  $t_i \ll 1$  temos  $x = x_0 + \sum_i G_i(x_0)t_i$ . Então, dado o vetor  $\mathbf{t}$  o ponto  $x$  está unicamente definido. Por outro lado, como os vetores  $G_i$  são LI, essas relações podem ser invertidas para obtermos  $\mathbf{t} = G^{-1}(x - x_0)$  onde  $G_{ij}$  é a matriz formada pelo componente  $i$  do  $j$ -ésimo campo vetorial.

No entanto, esse mapa não pode ser um-a-um globalmente, pois  $\mathbb{R}^n$  não é limitado e estamos supondo que  $M_f$  é. Então devem existir valores de  $\mathbf{t}$  para os quais  $g^{\mathbf{t}}x_0 = x_0$ . O conjunto desses  $\mathbf{t}$  forma o *Grupo Estacionário*  $\Gamma$  de  $M_f$ , cujas propriedades são:

- (a)  $\mathbf{t} = 0 \in \Gamma$ .
- (b) Existe uma vizinhança  $U$  de  $\mathbf{t} = 0$  onde  $g^{\mathbf{t}}x_0 \neq x_0$  pois, supondo que  $x_0$

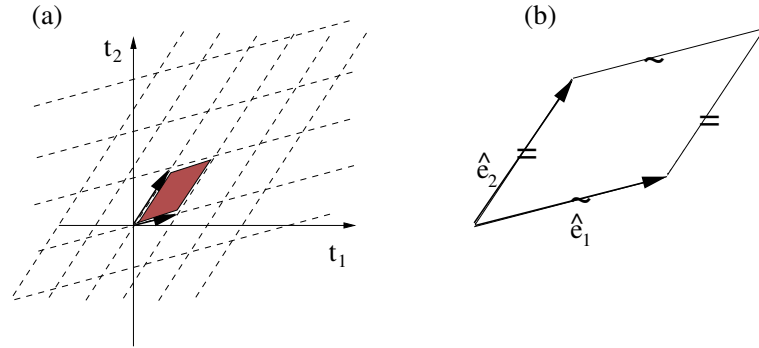


Figura 6.6: (a) Grupo estacionário e (b) célula unitária.

não é um ponto de equilíbrio, o fluxo desloca  $x_0$  ao longo de sua órbita. Isso mostra que  $\Gamma$  é um grupo discreto.

(c)  $\Gamma$  é independente de  $x_0$ . Fica como exercício ao leitor provar essa propriedade (Dica: escreva  $y = g^r x_0$ ).

(d)  $\Gamma$  de fato forma um grupo: se  $\mathbf{t}_1 \in \Gamma$  e  $\mathbf{t}_2 \in \Gamma$  então  $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \in \Gamma$ ;  $\mathbf{t}_1^{-1} = -\mathbf{t}_1$ ;  $\mathbf{t} = 0 \in \Gamma$ .

Usamos agora o resultado conhecido (veja uma demonstração simples no livro do Arnold) que qualquer sub-grupo discreto do  $\mathbb{R}^n$  pode ser escrito em termos de uma base de vetores  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_k$  como

$$m_1 \hat{e}_1 + m_2 \hat{e}_2 + \dots + m_k \hat{e}_k$$

onde os  $m_i$  são inteiros (veja a figura 6.6). Essa construção é muito usada em Estado Sólido (veja, por exemplo, o livro do Kittel).

A célula primitiva formada pelo paralelogramo  $k$ -dimensional  $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \dots \wedge \hat{e}_k$  é mapeado em um toro  $k$ -dimensional  $T^k$  em  $M_f$ , pois cada lado oposto é identificado, i.e., é levado nos mesmos pontos em  $M_f$ , como ilustrado na figura 6.7. No caso de  $M_f$ ,  $k = n$ , senão haveria uma direção onde poderíamos propagar indefinidamente e  $M_f$  não seria compacta. As curvas ao longo das direções  $\hat{e}_k$  são chamadas de *circuitos irredutíveis* do toro,  $\gamma_k$ .

Note que a superfície  $M_f$  não pode ser uma esfera, que também é compacta e conexa. O motivo é que campos de vetores como os  $G_{F_i}$  do teorema não são bem comportados sobre a esfera, apresentando singularidades. O

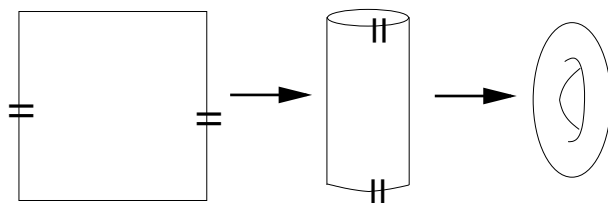


Figura 6.7: Célula unitária equivalente a um toro quando os lados opostos são identificados.

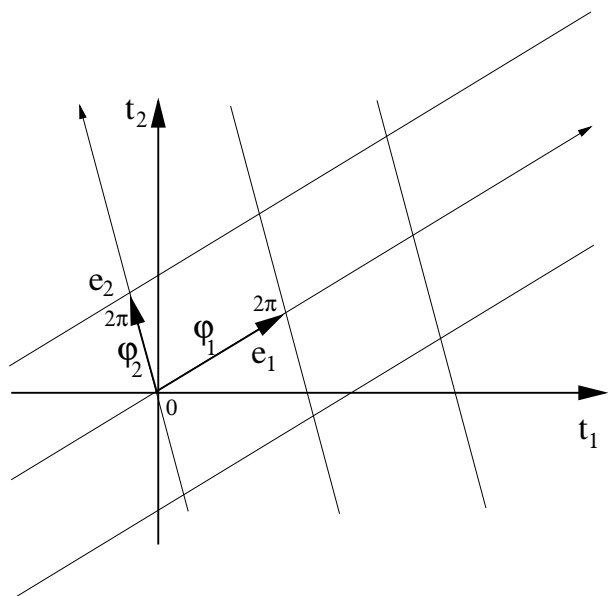


Figura 6.8: Transformação para variáveis de ângulo.

resultado é conhecido como *não se pode pentear uma esfera*.

Finalmente fazemos uma mudança linear das variáveis  $\mathbf{t}$  para ângulos  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  onde cada  $\phi_i$  varia de 0 a  $2\pi$  ao longo da direção  $\hat{e}_i$ , como ilustra a figura 6.8.

Indicando a transformação por  $\phi = A\mathbf{t}$ , onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , e

lembrando que o fluxo de  $H = F_1$  é dado por  $g_1^t$ , ou seja por

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

então, sob o fluxo da hamiltoniana, a transformação se reduz a

$$\phi_i = A_{i1}t \equiv \omega_i t.$$

Com isso demonstramos os itens 2 e 3 do teorema. A demonstração do item 4 vai mostrar explicitamente como encontrar a transformação canônica para as variáveis de ângulo  $\phi$  e seus momentos conjugados  $I$  que resolvem o problema. Antes disso vamos ver dois exemplos simples de fluxos para fixarmos as idéias da demonstração.

**Exemplo 6.6.1** Para sistemas com um grau de liberdade  $M_f$  é a superfície de energia ( $F_1 = H$ ,  $f = E$ ,  $M_f = \Sigma_E$  – veja a figura 6.2). Nessa caso a direção  $t$  do fluxo de  $H$  coincide com a direção do toro  $\phi$ , pois tudo é unidimensional. De fato, como sabemos que o movimento é periódico e que o período  $\tau$  depende em geral da energia, o grupo estacionário é  $\Gamma = \{0, \tau, 2\tau, \dots\}$ . A superfície de energia tem a topologia do toro  $T^1$  e a variável  $\phi$  é  $\phi = 2\pi t/\tau$ .

**Exemplo 6.6.2** Movimento em um potencial central atrativo. Nesse caso o movimento é plano e a hamiltoniana é

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + V(r) \equiv \frac{p_r^2}{2} + V_{ef}(r).$$

As constantes de movimento são  $F_1 = H$  e  $F_2 = p_\theta$ . Fixando  $f = \{E, m\}$ , a variedade  $M_f$  é

$$M_F = \{\eta \text{ t.q. } H(\eta) = E \text{ e } p_\theta = m\}.$$

A dinâmica do sistema sob a ação de  $F_1 = H$  é ilustrada na figura 6.9. Para valores de energia negativos o movimento radial está confinado entre  $r_1$  e  $r_2$  e sua projeção no plano  $r - p_r$  é periódica com período  $\tau_r$ . O momento angular  $p_\theta$  é constante e no plano  $\theta - p_\theta$  o movimento também é periódico, mas o tempo necessário para uma volta angular completa,  $\tau_\theta$ , não é necessariamente

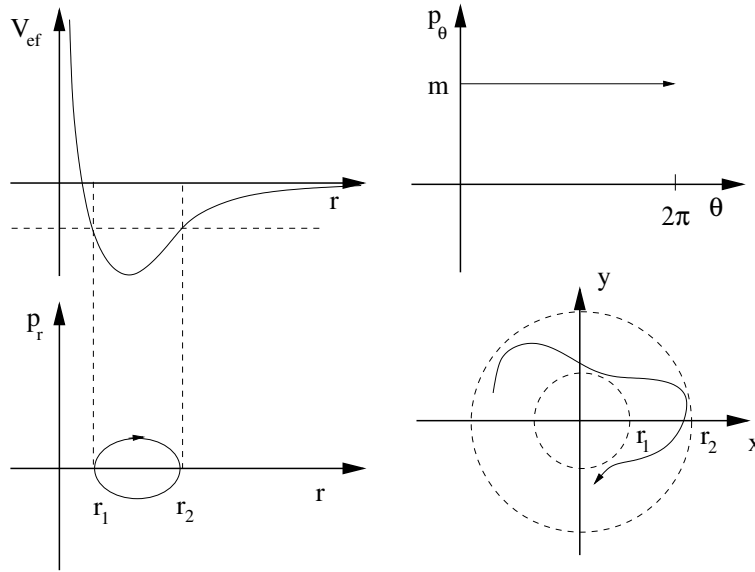


Figura 6.9: Movimento sob a ação de um potencial central.

igual ou mesmo comensurável com  $\tau_r$ . Dizemos que o movimento global é quase-periódico.

A dinâmica sob a ação de  $F_2 = p_\theta$  é trivial. As equações de Hamilton mostram que  $\dot{\theta} = 1$  enquanto que as derivadas temporais de todas as outras variáveis são nulas. Assim, a dinâmica de  $F_2$  mantém  $r$ ,  $p_r$  e  $p_\theta$  constantes enquanto  $\theta = t$ . O movimento é globalmente periódico com período  $\tau_2 = 2\pi$ . A figura 6.10(a) mostra o grupo estacionário no plano  $t_1$ - $t_2$  com pontos vermelhos. A dinâmica na direção de  $t_2$  é naturalmente periódica ( $\hat{t}_2 = \hat{e}_2$ ). No entanto, quando andamos na direção de  $t_1$  não passamos por pontos do grupo, pois o movimento com  $H$  não é periódico. A direção de  $\hat{e}_1$ , ao longo da qual o movimento ocorre apenas na direção radial, não coincide com a direção  $t_1$ .

No caso especial do problema de Kepler, com  $V(r) = -K/r$ , sabemos que as órbitas são elipses fechadas, e portanto periódicas. A dinâmica de  $H$  causa simultaneamente uma rotação angular e uma radial. Nesse caso o grupo estacionário é ilustrado na figura 6.10(b) e o eixo  $t_1$  corta o grupo estacionário.

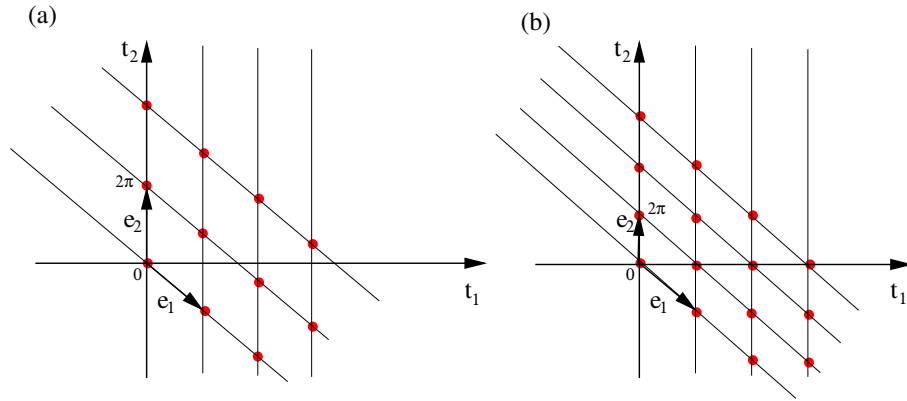


Figura 6.10: (a) Grupo estacionário para um potencial central genérico; (b) Caso particular do potencial de Kepler.

## 6.7 Variáveis de Ação e Ângulo

Nesta seção vamos construir explicitamente a transformação canônica que leva as variáveis originais  $(q, p)$  para novas variáveis  $(\phi, I)$  onde cada  $\phi_k$  varia entre 0 e  $2\pi$  ao longo de um dos circuitos irredutíveis do toro. Embora a transformação não seja tão simples, a idéia por trás da transformação é quase trivial:

Temos um conjunto de  $n$  constantes  $F_k(q, p)$  independentes e em involução. Podemos então definir novas variáveis  $(Q, P)$  de tal forma que  $P_k = F_k(q, p)$ . Como os  $P_k$  são constantes do movimento, a hamiltoniana escrita em termos de  $Q$  e  $P$  deve ser tal que  $\dot{P}_k = -\partial H / \partial Q_k = 0$ . Então  $H$  não pode depender dos  $Q$ 's:  $H = H(P)$ . Assim vemos que  $\dot{Q}_k = \partial H / \partial P_k \equiv \Omega_k(P) = \text{const.}$ . A integração das equações de movimento é então trivial:  $P_k = P_{k0}$  e  $Q_k = Q_{k0} + \Omega_k t$ . Fica claro então que existe uma transformação canônica que torna a dinâmica trivial.

Acontece que a escolha direta dos novos  $P_k$  como as funções  $F_k$  não é a melhor possível. Como vimos as funções  $F_k$  geram fluxos que não estão necessariamente ao longo dos circuitos irredutíveis  $\gamma_k$ . A idéia então é definir um novo conjunto de momentos  $I_k$  que são funções dos  $F_k$ :  $I_k = I_k(F)$ . Como os  $F$  são constantes, os  $I$  também serão. O que define os  $I$ 's é a imposição que suas variáveis conjugadas são os ângulos  $\phi_k$  que variam de zero a  $2\pi$  ao longo dos circuitos  $\gamma_k$ . As variáveis  $(I, \phi)$  são chamadas de *variáveis de ação e ângulo*. Vamos ver como definir a variável  $I$  em sistemas com apenas um



grau de liberdade e depois estenderemos o cálculo para um número arbitrário de graus [5, 3].

### 6.7.1 Um grau de liberdade

Nesse caso  $F = H$ ,  $f = E$  e a superfície  $M_f = M_E$  é a superfície de energia (veja a figura 6.2). Escolhemos um função geratriz do tipo 2,  $S(q, I)$ , tal que

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad \phi = \frac{\partial S}{\partial I} \quad (6.78)$$

com as condições

$$(1) \quad I = I(E) \quad \text{e}$$

$$(2) \quad \oint_{M_E} d\phi = 2\pi.$$

Integrando a primeira das equações acima podemos escrever  $S$  como

$$S(q, I) = \int p(q, I) dq \quad (6.79)$$

onde a integral é feita sobre a superfície  $I=\text{const.}$ , ou seja, sobre  $M_E$ . De  $H(q, p) = E$  podemos obter  $p = p(q, E)$ . Quando conhecermos a relação  $E = E(I)$  poderemos escrever  $p = p(q, I)$  e calcular explicitamente a função geratriz fazendo a integral acima.

Para obter a relação  $E = E(I)$  fazemos o seguinte truque: definimos primeiramente a variação de  $S$  sobre um ciclo em torno de  $M_E$ , i.e., sobre o único circuito irredutível deste toro:

$$A(I) = \oint p(q, I) dq \quad (6.80)$$

que nada mais é do que a área no plano  $p$ - $q$  envolvida pela superfície de energia. Derivando em relação a  $I$  obtemos

$$\frac{\partial A(I)}{\partial I} = \oint \frac{\partial p}{\partial I} dq = \oint \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial S}{\partial I} dq = \oint \frac{\partial \phi}{\partial q} dq = \oint d\phi \equiv 2\pi. \quad (6.81)$$

Integrando resulta em  $A(I) = 2\pi I$  ou

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq. \quad (6.82)$$

Escrevendo explicitamente  $p = p(q, E)$  temos a relação procurada:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq = I(E) \quad (6.83)$$

e finalmente a função geratriz:

$$S(q, I) = \int p(q, E(I)) dq. \quad (6.84)$$

A receita para o cálculo da função geratriz da transformação canônica é a seguinte: (1) use  $H(q, p) = E$  para escrever  $p = p(q, E)$ ; (2) obtenha  $I = I(E)$  a partir da equação (6.83); (3) inverta para obter  $E = E(I)$  e faça a integral indefinida (6.84).

### 6.7.2 Vários graus de liberdade

A expressão da função geratriz para mais graus de liberdade é obtida com generalização direta do procedimento uni-dimensional. A função geratriz  $S(\mathbf{q}, \mathbf{I})$  depende das  $n$  coordenadas  $q_k$  e das  $n$  constantes  $I_k$  e pode ser escrita como

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{I}) = \int \sum_{k=1}^n p_k(\mathbf{q}, \mathbf{I}) dq_k \equiv \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \quad (6.85)$$

onde a integral é feita sobre um caminho qualquer na superfície  $M_f$ , onde os valores  $I_k$  são constantes. Veja que, pelo teorema de Poincaré-Cartan, a integral sobre  $M_f$  não muda quando o caminho for deformado continuamente. Utilizando as  $n$  expressões  $F_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = f_k$  podemos obter  $p_k = p_k(\mathbf{q}, \mathbf{f})$ . Quando conseguirmos expressar os novos momentos  $I_k$  em função das constantes  $\mathbf{f}$ , teremos a função geratriz procurada. Novamente precisamos encontrar essas relações  $I_k = I_k(\mathbf{f})$  impondo que os ângulos conjugados variem de 0 a  $2\pi$  conforme os circuitos irredutíveis do toro são percorridos.

Definimos  $A_k(\mathbf{I})$  como sendo a integral de  $S$  sobre o circuito periódico  $\gamma_k$ :

$$A_k(\mathbf{I}) = \oint_{\gamma_k} \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{q}. \quad (6.86)$$

Derivando em relação a  $I_j$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial I_j} &= \sum_i \oint_{\gamma_k} \frac{\partial p_i}{\partial I_j} dq_i = \sum_i \oint_{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial I_j} dq_i \\ &= \sum_i \oint_{\gamma_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} dq_i = \oint_{\gamma_k} d\phi_j \equiv 2\pi \delta_{j,k} \end{aligned} \quad (6.87)$$

pois o ângulo  $\phi_j$  só muda ao longo do circuito  $\gamma_j$ . Integrando vemos que  $A_k = 2\pi I_k$ , ou ainda

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k} \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{q} = I_k(\mathbf{f}). \quad (6.88)$$

Invertendo essas  $n$  relações teremos  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{I})$  e finalmente a função geratriz

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{I}) = \int \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{I})) \cdot d\mathbf{q}. \quad (6.89)$$

Note que se a hamiltoniana é a função  $F_1$ , então  $f_1 = f_1(\mathbf{I})$  é o mesmo que  $H = H(\mathbf{I})$ , que é a hamiltoniana escrita nas novas variáveis de ação.

A receita geral para o cálculo da função geratriz da transformação canônica é a seguinte: (1) use  $F_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = f_k$  para escrever  $p_k = p_k(\mathbf{q}, \mathbf{f})$ ; (2) obtenha  $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{f})$  a partir das equações (6.88); (3) inverta para obter  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{I})$  e faça a integral indefinida (6.89).

### 6.7.3 Exemplos

#### O oscilador harmônico 1-D

A hamiltoniana é  $H = p^2/2 + \omega^2 q^2/2$ . Fixando uma superfície de energia  $E$  resolvemos para  $p$  em função da posição e do momento:  $p(q, E) = \sqrt{2E - \omega^2 q^2}$  e

$$S(q, I) = \int \sqrt{2E - \omega^2 q^2} dq \quad \text{com} \quad E = E(I).$$

Definindo a variável auxiliar  $\theta$  por  $q = \sqrt{2E/\omega^2} \sin \theta$  obtemos

$$S(q, I) = \frac{2E}{\omega} \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{E}{\omega} [\theta + \sin 2\theta/2].$$

A relação  $E = E(I)$  vem de

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq = \frac{E}{\pi\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{E}{\omega}$$

ou,  $E = \omega I$ . O resultado final é

$$S(q, I) = I [\theta + \sin 2\theta/2]$$

onde  $\theta(q, I)$  é obtido de  $q = \sqrt{2I/\omega} \sin \theta$ . A hamiltoniana nas novas variáveis é

$$H(I) = \omega I$$

e a solução das equações de movimento é  $I = I_0$  e  $\phi = \phi_0 + \omega t$ . Finalmente escrevemos as equações da transformação canônica e as resolvemos para completar a solução:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = I(1 + \cos 2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial q} = 2I \cos^2 \theta \left( \sqrt{\frac{\omega}{2I}} \frac{1}{\cos \theta} \right) = \sqrt{2I\omega} \cos \theta;$$

$$\phi = \frac{\partial S}{\partial I} = \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + I(1 + \cos 2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial I} = \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} - 2I \cos^2 \theta \left( \frac{\sin \theta}{2I \cos \theta} \right) = \theta.$$

O resultado da transformação canônica é

$$q = \sqrt{2I/\omega} \sin \phi \quad p = \sqrt{2I\omega} \cos \phi$$

e a evolução temporal é

$$q(t) = \sqrt{2I_0/\omega} \sin(\phi_0 + \omega t) \quad p = \sqrt{2I_0\omega} \cos(\phi_0 + \omega t)$$

onde  $I_0 = E/\omega$ .

### O oscilador harmônico 2-D

Nesse caso a hamiltoniana é soma de duas partes não interagentes,  $H = H_1 + H_2 = p_1^2/2 + \omega_1^2 q_1^2/2 + p_2^2/2 + \omega_2^2 q_2^2/2$ . Como  $H_1$  e  $H_2$  são funções independentes e em involução, o sistema é integrável. A energia total  $E$  se reparte em  $E_1$  e  $E_2$  e cada parcela é conservada. Nesse caso é conveniente escolher  $H_1$  e  $H_2$  como funções  $F_i$ , e não a hamiltoniana total. Os valores de

$E_1$  e  $E_2$  definem a superfície  $M_f$  e, nessa superfície, os valores assumidos por cada variável ficam limitados aos intervalos

$$q_i \in \left[ -\sqrt{\frac{2E_i}{\omega_i}}, +\sqrt{\frac{2E_i}{\omega_i}} \right]$$

e

$$p_i \in \left[ -\sqrt{2E_i}, +\sqrt{2E_i} \right]$$

como ilustra a figura 6.11(a). A projeção da trajetória nos planos conjugados  $q_1$   $p_1$  e  $q_2$   $p_2$  são elipses, como no caso unidimensional, como mostram os painéis (b) e (c). A variedade  $M_f$  pode ser visualizada no espaço  $q_1 - p_1 - q_2$  (fig.6.11(d)): a projeção  $q_1 - p_1$  deve ser uma elipse, enquanto o valor de  $q_2$  oscila entre  $\pm\sqrt{2E_2}$ . A superfície gerada é um cilindro, que na verdade é um ‘toro achatado’. Cada ponto sobre o cilindro define os valores de  $q_1$ ,  $p_1$  e  $q_2$ . Como  $E_2$  está fixa, o valor de  $p_2$  está definido a menos de um sinal. Portanto o cilindro tem duas folhas, uma onde  $p_2$  é positivo (o lado de fora do cilindro, por exemplo) e outra onde  $p_2$  é negativo (o lado de dentro). As folhas se encontram nos pontos onde  $|q_2|$  é máximo, ou seja, quando  $p_2 = 0$ . Os circuitos irredutíveis  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  também são mostrados na figura.

Para obter a função geratriz da transformação canônica temos que fazer a integral de  $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$  sobre  $M_f$ . Como a integral é independente do caminho, escolhemos aquele que anda um trecho sobre  $\gamma_1$  e depois outro trecho sobre  $\gamma_2$ . O resultado é a soma de duas funções geratrizes independentes, uma em cada sub-espaco:

$$S(q_1, q_2, I_1, I_2) = I_1 [\theta_1 + \sin 2\theta_1/2] + I_2 [\theta_2 + \sin 2\theta_2/2]$$

onde  $\theta_i(q_i, I_i)$  é obtido de  $q_i = \sqrt{2I_i/\omega} \sin \theta_i$ . A hamiltoniana nas novas variáveis é

$$H(I_1, I_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2.$$

Para finalizar este exemplo mostramos o grupo estacionário no plano  $t_1 - t_2$ , assim como o fluxo de  $H$  nesse plano e sobre o toro  $M_f$ . Note que os circuitos, que correspondem ao fluxo de  $H_1$  e  $H_2$ , não coincidem com trajetórias do sistema.

## O problema de Kepler

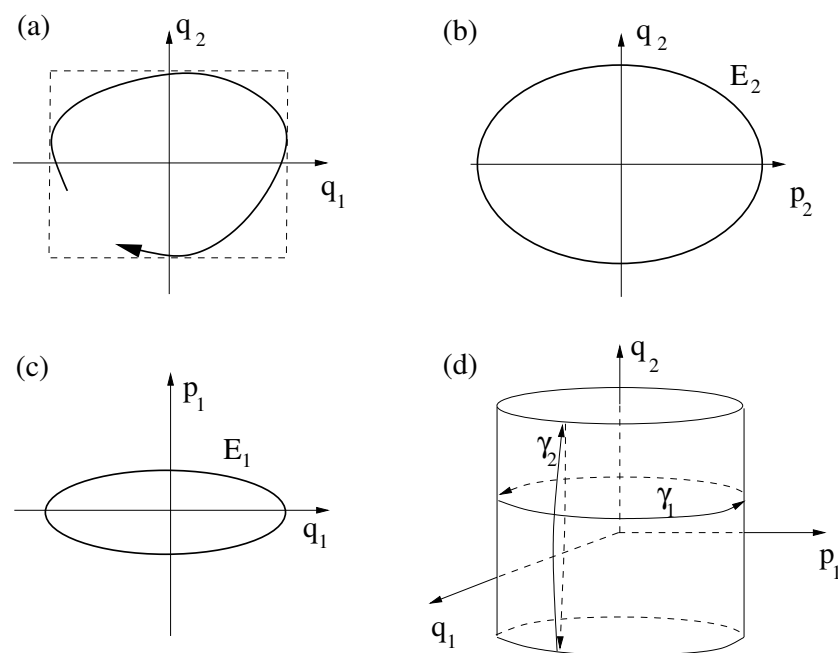


Figura 6.11: Projeção da trajetória nos planos (a)  $q_1$   $q_2$ ; (b)  $q_2$   $p_2$ ; (c)  $q_1$   $p_1$ . O painel (d) mostra a superfície  $M_f$  projetada no espaço  $q_1$   $p_1$   $q_2$  e os dois circuitos irredutíveis  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

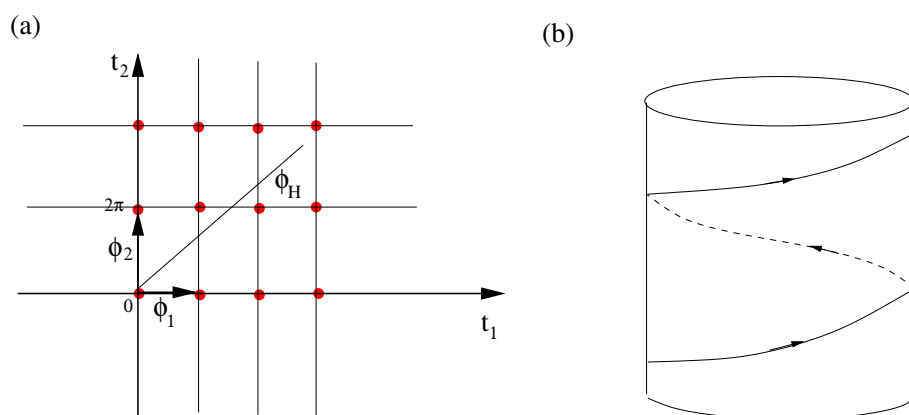


Figura 6.12: Grupo estacionário no plano  $t_1 - t_2$  e trajetória de  $H$  no toro  $M_f$ .

A hamiltoniana do problema de dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  pode ser separada em uma parte livre do centro de massa e uma parte correspondente a uma partícula de massa reduzida  $\mu$  no potencial gravitacional central da massa total  $M = m_1 + m_2$ :

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}$$

Os circuitos irredutíveis correspondem a variar  $\theta$  de 0 a  $2\pi$  com  $r$  fixo ( $\gamma_1$ ) e variar  $r$  de  $r_{max}$  a  $r_{min}$  e de volta a  $r_{max}$  ( $\gamma_2$ ). As variáveis de ação são:

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = p_\theta$$

e

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2\mu(E + GM\mu/r) - I_\theta^2/r^2} = -I_\theta + \frac{GM\mu^2}{\sqrt{-2\mu E}}$$

onde  $E < 0$ . Resolvendo para  $E$  obtemos a hamiltoniana nas variáveis de ação:

$$H(I_r, I_\theta) = -\frac{M^2\mu^3G^2}{2(I_r + I_\theta)^2}.$$

É fácil verificar que as frequências dos movimentos radiais e angulares são iguais, o que mostra que as órbitas são periódicas:

$$\omega_r = \omega_\theta = \frac{M^2\mu^3G^2}{(I_r + I_\theta)^3}.$$

## 6.8 Super-integrabilidade

Vimos que um sistema com  $n$  graus de liberdade é integrável se tiver  $n$  constantes do movimento independentes e em involução. Podemos nos perguntar o que acontece se um sistema Hamiltoniano tiver mais do que as  $n$  constantes necessárias. Dois exemplos importantes de sistemas desse tipo com  $n = 2$  são o oscilador harmônico isotrópico e o problema de Kepler. A terceira constante de movimento é o momento angular no primeiro caso e o vetor de Laplace-Runge-Lenz no segundo. A consequência desta constante extra é que a variedade  $M_f$  fica unidimensional e o movimento é sempre periódico. Sistemas nessa categoria são chamados de *super-integráveis*.

Antes de discutirmos exemplos específicos de super-integrabilidade vamos mostrar que sempre que existam mais do que  $n$  constantes de movimento independentes elas não podem estar todas em involução. Para simplificar a explicação vamos considerar o caso  $n = 2$  e três constantes,  $H$ ,  $F$  e  $G$ . A superfície unidimensional

$$M_{E,f,g} = \{\eta \text{ t.q. } H(\eta) = E, F(\eta) = f, G(\eta) = g\}$$

é invariante pelo fluxo de  $H$  e coincide com a trajetória dos pontos  $\eta \in M_{E,f,g}$ , pois  $\{H, F\} = \{H, G\} = 0$  por hipótese. Se  $M_{E,f,g}$  também fosse invariante pelo fluxo de  $F$  isso implicaria que  $\{F, H\} = \{F, G\} = 0$ . No entanto,  $M_{E,f,g}$  claramente não é invariante pelo fluxo de  $F$ , pois o campo de velocidades  $J\partial F/\partial\eta$  é linearmente independente do campo  $J\partial H/\partial\eta$ , o que mostra que  $\{F, G\} \neq 0$ .

### 6.8.1 O vetor de Laplace-Runge-Lenz

Vamos mostrar que o problema gravitacional plano de dois corpos tem três constantes de movimento [5]. Duas delas são a energia total e o momento angular. Vamos supor um caso geral de força central onde  $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}/r$ . Então

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

e

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] = \mu \frac{f(r)}{r} [(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - r^2 \dot{\mathbf{r}}].$$

Usando  $2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})/dt = d(r^2)/dt = 2r\dot{r}$  e o fato de  $\mathbf{L}$  ser constante podemos escrever

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\mu f(r)r^2 \left[ \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} \right] = -\mu f(r)r^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

Para forças gravitacionais  $f(r) = -K/r^2$  e

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu K \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu K \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0.$$

O vetor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu K \frac{\mathbf{r}}{r}$$



é portanto uma constante de movimento e é conhecido como *vetor de Laplace-Runge-Lenz*. Como o movimento é plano e perpendicular a  $\mathbf{L}$ , vemos que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$ , o que mostra que  $\mathbf{A}$  está no plano da órbita. Podemos então escolher a direção fixa de  $\mathbf{A}$  para medir o ângulo orbital  $\theta$ . Nesse caso

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \theta = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu K r.$$

Como  $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = L^2$ , vemos que  $Ar \cos \theta = L^2 - \mu K r$ , que ainda pode ser re-escrito como

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu K}{L^2} \left( 1 + \frac{A}{\mu K} \cos \theta \right)$$

que é a equação da órbita (veja o capítulo 1). Podemos então identificar  $A = \mu K \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é a excentricidade da elipse. Como  $\mathbf{A}$  está na direção de  $\theta = 0$ , onde  $1/r$  é máximo e  $r$  é mínimo, concluímos que **o vetor de Laplace-Runge-Lenz aponta para o ponto mais baixo da órbita (periélio no caso do Sol) e tem módulo  $A = \mu K \epsilon$ .**

A existência desta terceira constante de movimento torna o problema de Kepler super-integrável e faz com que todas as suas órbitas de energia negativa sejam periódicas. Do ponto de vista do teorema de Arnold-Liouville o sistema tem três constantes de movimento,  $F_1 = H$ ,  $F_2 = p_\theta = L$  e  $F_3 = A$  mas é fácil verificar que  $\{A, L\} = A \tan \theta$ . Isso mostra que apesar de  $A$  ser uma constante independente, as três constantes não estão em involução. A independência segue do fato de  $A$  não ser uma função apenas de  $H$  e  $L$ , o que implica que os vetores  $G_{F_i}$  são linearmente independentes. Para entender o significado desse fato vamos considerar a superfície uni-dimensional  $M_f$  onde  $f = (E, m, a)$  especifica os valores das três constantes  $H$ ,  $L$  e  $A$ . Claramente  $M_f$  é invariante pelo fluxo de  $H$ , pois se  $\eta_0 \in M_f$  e  $\eta(t)$  é sua órbita por  $H$ , então

$$\frac{d}{dt} F_i(\eta(t)) = \{F_i, H\} = 0$$

pois todas as  $F_i$  são constantes do movimento. A trajetória não deixa  $M_f$ , que coincide com a própria trajetória. No entanto,  $M_f$  não é invariante por  $F_2 = L$  pois

$$\frac{d}{dt} A(\eta(t)) = \{A, L\} \neq 0$$

ou por  $F_3 = A$ , pois

$$\frac{d}{dt} L(\eta(t)) = \{L, A\} \neq 0.$$

Cada trajetória, portanto, é caracterizada por um único valor da trinca  $f = (E, m, a)$ .

### 6.8.2 O oscilador harmônico bidimensional ressonante

Consideremos novamente o oscilador harmônico bidimensional

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2 q_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_2^2 q_2^2}{2} \equiv H_1 + H_2.$$

Se  $\omega_1/\omega_2 = r/s$  onde  $r$  e  $s$  são inteiros, então todas as trajetórias são periódicas e não preenchem o toro bidimensional onde ficam restritas. Isso indica que deve haver uma terceira constante do movimento distinta de  $H_1$  e  $H_2$ , como no caso problema de Kepler. No caso mais simples  $r = s = 1$ , ou seja,  $\omega_1 = \omega_2$ , o potencial é central, pois só depende de  $q_1^2 + q_2^2 = r^2$ . A terceira constante de movimento é então o momento angular  $L = q_1 p_2 - q_2 p_1$ . Vamos mostrar como se constrói a terceira constante no caso geral onde  $r$  e  $s$  são inteiros quaisquer.

Vamos primeiro definir variáveis de ângulo e ação  $(\phi_k, I_k)$  por

$$\begin{aligned} q_k &= \sqrt{\frac{2I_k}{m\omega_k}} \sin \phi_k \\ p_k &= \sqrt{2I_k m\omega_k} \cos \phi_k \end{aligned}$$

( $k = 1, 2$ ) de forma que

$$H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2.$$

Em seguida definimos variáveis complexas auxiliares por

$$a_k = \sqrt{\frac{m\omega_k}{2}} \left( \frac{p_k}{m\omega_k} + iq_k \right).$$

Um cálculo simples mostra que

$$a_k a_k^* = \frac{1}{\omega_k} \left( \frac{p_k^2}{2m} + \frac{m\omega_k^2 q_k^2}{2} \right) = I_k$$

e que  $Im(a_k)/Re(a_k) = m\omega_k q_k/p_k = \tan \phi_k$  (a variável de ângulo). Dessa forma podemos escrever

$$a_k = \sqrt{I_k} e^{i\phi_k}.$$

Vamos então considerar o caso ressonante onde a razão entre as frequências seja um número racional, isto é,

$$\begin{aligned}\omega_1 &= r \omega_0 \\ \omega_2 &= s \omega_0\end{aligned}$$

com  $r$  e  $s$  inteiros. Nesse caso o número complexo

$$z \equiv a_1^s a_2^{*r} = I_1^{s/2} I_2^{r/2} e^{i(s\phi_1 - r\phi_2)}$$

é uma constante do movimento. O módulo de  $z$  é claramente constante, pois  $I_1$  e  $I_2$  são constantes. A fase  $\psi = s\phi_1 - r\phi_2$  também é constante, pois

$$\dot{\psi} = s\dot{\phi}_1 - r\dot{\phi}_2 = s\omega_1 - r\omega_2 = sr\omega_0 - rs\omega_0 = 0.$$

Para  $r = s = 1$  o cálculo de  $z$  em termos de  $q_k$  e  $p_k$  fornece

$$z = \frac{m\omega_0}{2} \left[ \left( \frac{p_1 p_2}{m^2 \omega_0^2} + q_1 q_2 \right) + \frac{i}{m\omega_0} (q_1 p_2 - q_2 p_1) \right].$$

A parte imaginária pode ser identificada com o momento angular  $L$ . A parte real é também uma constante do movimento, mas não é independente de  $H_1$ ,  $H_2$  e  $L$  (veja o exercício 7 no final deste capítulo).

Para  $r = 1$  e  $s = 2$  obtemos uma expressão bem mais complicada:

$$Re(z) = \frac{(m\omega_0)^{3/2}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{p_1^2 p_2}{2m^3 \omega_0^3} - \frac{q_1}{2m\omega_0} (p_2 q_1 - q_2 p_1) \right]$$

e

$$Im(z) = \frac{(m\omega_0)^{3/2}}{\sqrt{2}} \left[ q_2 q_1^2 + \frac{p_1}{m^2 \omega_0^2} (p_2 q_1 - q_2 p_1) \right]$$

são constante do movimento.

## 6.9 O teorema de Bertrand

O fato de termos encontrado uma terceira constante de movimento para o problema de Kepler e para o oscilador isotrópico não implica que haja uma terceira constante de movimento para outras forças centrais. Caso ela exista, sabemos que as órbitas serão periódicas para todos os valores de  $E$  e  $L$  onde o movimento é limitado. O teorema de Bertrand mostra que, para potenciais

centrais da forma  $U(r) = K_n r^n$ , isso só ocorre para  $n = 2$  e  $n = -1$ , correspondendo ao oscilador isotrópico e ao problema de Kepler. Faremos aqui uma demonstração parcial do teorema [5, 14]. O leitor encontrará demonstrações mais rigorosas nos livros do Arnold [3] e de J.L. McCauley [23]. A idéia da demonstração é mostrar primeiramente que as órbitas próximas da órbita circular (que é obviamente periódica), só serão também periódicas para alguns valores de  $n$ . Em seguida mostraremos que para valores de  $n$  diferentes de 2 e -1 existem energias para as quais as órbitas não são periódicas, o que leva à conclusão que apenas para  $n = 2$  e  $n = -1$  as órbitas são periódicas para todas energias.

Começamos por escrever as equações de conservação básicas para uma partícula de massa  $\mu$  sujeita ao potencial  $U(r)$ :

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + V(r);$$

onde

$$V(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = K_n r^n + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

e

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}.$$

Temos que separar a prova em dois casos: (A)  $n = 1, 2, \dots$  e  $K_n > 0$  (para que o movimento seja limitado); (B)  $n = -1, -2, \dots$  e  $K_n < 0$ . O caso  $n = 0$  corresponde à partícula livre e é trivial.

O potencial efetivo  $V(r)$  tem um único mínimo dado por  $r_0^{n+2} = L^2/(n\mu K_n)$  que corresponde à órbita circular de período  $\tau_\theta = 2\pi\mu r_0^2/L$  e energia  $E_0 = V(r_0)$ . Para órbitas com energia próxima de  $E_0$  podemos expandir  $V(r)$  em torno de  $r_0$ . Seja então  $E = E_0 + \epsilon$  e  $r$  próximo de  $r_0$ . A equação de conservação de energia fica

$$E_0 + \epsilon = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + E_0 + \frac{V''(r_0)}{2}(r - r_0)^2$$

ou

$$\epsilon = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{V''(r_0)}{2}(r - r_0)^2$$

que representa um oscilador radial com período  $\tau_r = 2\pi\sqrt{\mu/V''(r_0)}$ . O período angular é ainda aproximadamente  $\tau_\theta$  de forma que a razão entre

os períodos, chamada de número de rotação, é

$$W \equiv \frac{\tau_\theta}{\tau_r} = \frac{\sqrt{\mu V''(r_0) r_0^4}}{L}.$$

Se  $W$  for racional,  $W = p/q$ , a órbita fecha depois de  $q$  voltas em torno da origem, tendo completado  $p$  oscilações radiais. Calculando  $W$  explicitamente obtemos

$$V''(r_0) = \frac{3L^2}{\mu r_0^4} + n(n-1)K_n r_0^{n-2}$$

e

$$\frac{\mu V''(r_0) r_0^4}{L^2} = 3 + n(n-1)K_n \mu r_0^{n+2}/L^2 = n+2$$

de forma que

$$W = \sqrt{n+2}$$

que é independente de  $K_n$  e de  $L$ . Esse número certamente é racional para  $n = 2$  ( $W=2$ ) e  $n = -1$  ( $W=1$ ). No entanto, essa análise mostra que as órbitas vizinhas à circular ainda serão fechadas se  $n = 7, 14, 23$  etc. Vamos então mostrar que, nesses casos, as órbitas com energia alta não são periódicas.

Das equações de movimento para  $r$  e  $\theta$  podemos derivar uma equação para a órbita,  $r = r(\theta)$ . Por simplicidade vamos considerar apenas o caso  $K_n > 0$  e, portanto,  $n > 0$ . Partimos de

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = 1/\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$$

e portanto

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{L/r^2}{\sqrt{2\mu(E - V)}}$$

ou, integrando sobre um período radial,

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2\mu(E - V)}}.$$

A quantidade  $\Delta\theta$  mede o quanto o movimento angular rodou depois de um período radial. Então,

$$\frac{1}{W} = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V)}}.$$

Como procuramos situações onde todas as órbitas sejam fechadas, independente da energia, vamos tomar  $E \rightarrow \infty$ . Os pontos de retorno são soluções de

$$E = \frac{L}{2\mu r^2} + K_n r^n$$

e são dados aproximadamente por  $r_{max} \approx \infty$  e  $r_{min} \approx (L^2/2\mu E)^{1/2}$ . Fazendo a mudança de variáveis  $x = L/(\sqrt{2\mu E}r)$  obtemos

$$W^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - Ax^{-n}/E^{1+n/2}}}$$

onde  $A = K_n L^n / (2\mu)^n$ . Para grandes valores de  $E$  e  $n > 0$  podemos desprezar o último termo na raiz quadrada e obtemos

$$W^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}.$$

No entanto, se todas as órbitas do potencial  $U = K_n r^n$  são periódicas,  $W$  deve ser o mesmo para todas as energias. Então o valor  $W = 2$  para altas energias deve ser o mesmo que  $W = \sqrt{n+2}$  para baixas energias, o que ocorre apenas para  $n = 2$ . Uma análise similar para o caso  $K_n < 0$  fornece apenas o valor  $n = -1$ .

## 6.10 Exercícios

1. Uma partícula move-se em uma dimensão no potencial  $V(x) = k/x^2$ ,  $k > 0$ . Determine  $x(t)$  pelo método de Hamilton-Jacobi se  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ .
2. Uma partícula com energia total positiva move-se em uma dimesão sob a ação do potencial  $V(x) = F|x|$  onde  $F$  é uma constante positiva. Use variáveis de ângulo e ação para determinar o período em função da energia. Qual o espectro de energias que resulta da aplicação da regra de quantização de Bohr-Sommerfeld?

3. O movimento de uma partícula é governado pela hamiltoniana dependente do tempo

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} - Atx$$

onde  $A$  é constante. Resolva as equações de movimento pelo método Hamilton-Jacobi.

4. Uma partícula de carga  $e$  e massa  $m$  move-se no plano x-y sob a ação de um campo magnético constante  $B$  na direção z. A hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_x + \frac{eB}{2} y \right)^2 + \frac{1}{2m} \left( p_y - \frac{eB}{2} x \right)^2 .$$

Esse sistema é integrável? Quais as constantes de movimento? (Dica: escreva a hamiltoniana em coordenadas polares). Escreva e resolva as equações de movimento. Construa variáveis de ângulo e ação para esse sistema.

5. Considere o sistema integrável

$$H_0(I_1, I_2) = \alpha \frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2} .$$

Para uma energia fixa  $E$ , encontre  $\rho \equiv \omega_1/\omega_2$  como função de  $E$  e  $I_1$ . Mostre que  $I_1$  varia entre zero e o valor máximo  $\sqrt{2E/\alpha}$ . Encontre o valor de  $I_1$  e  $I_2$  (i.e., encontre o toro) onde  $\rho = r/s$ . Escolha uma seção de Poincaré conveniente e esboce o mapa de Poincaré nessa seção.

6. Mostre que  $M_f$  não pode ser uma esfera, que também é compacta e conexa. (Dica: mostre que o grupo estacionário da esfera não é discreto).
7. O oscilador harmônico isotrópico é um caso particular do oscilador harmônico 2-D e ocorre quando  $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ . Nesse caso temos um problema de força central e o momento angular deve ser conservado. De fato, definindo

$$L_z = (q_1 p_2 - q_2 p_1)$$

é fácil mostrar que

$$\{L_z, H_1\} = p_1 p_2 / m + m \omega_1^2 q_1 q_2$$

$$\{L_z, H_2\} = -p_1 p_2 / m - m \omega_2^2 q_1 q_2$$

$$\{L_z, H\} = m q_1 q_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2).$$

e  $\{L_z, H\} = 0$  no caso isotrópico. Em vez de usar as três constantes de movimento  $H_1$ ,  $H_2$  e  $L_z$  é interessante usar as seguintes constantes alternativas:

$$K_1 = (H_1 - H_2) / 2\omega$$

$$K_2 = (p_1 p_2 / m + m \omega^2 q_1 q_2) / 2\omega$$

$$K_3 = L_z / 2$$

Com isso obtemos

$$H^2 = 4\omega^2 (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)$$

onde  $\{K_i, H\} = 0$  e  $G_i = J \nabla K_i$  são independentes. Note que, embora existam três constantes de movimento independentes, elas não estão em involução.

- (a) Calcule os vetores  $G_i$ .
- (b) Mostre que  $\nabla H$  é ortogonal a todos os  $G_i$ , de forma que  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  e  $\nabla H$  formam uma base em  $\mathcal{F}^4$ .
- (c) Mostre que  $\{K_i, K_j\} = \epsilon_{ijk} K_k$ , que é uma álgebra de momento angular. Isso mostra que o grupo de simetria não é  $\text{SO}(2)$ , mas  $\text{SU}(2)$  ou  $\text{SO}(3)$ .



## Capítulo 7

# Estabilidade de Pontos de Equilíbrio e Órbitas Periódicas

Nos próximos capítulos estudaremos o efeito de pequenas perturbações em sistemas Hamiltonianos integráveis. Veremos que perturbações típicas provocam o aparecimento de órbitas periódicas isoladas na superfície de energia, sendo algumas delas estáveis e outras instáveis. As órbitas instáveis são responsáveis pelo aparecimento de movimento caótico em suas vizinhanças. Neste capítulo vamos apresentar o conceito de estabilidade linear de pontos de equilíbrio e de órbitas periódicas. Essas últimas serão tratadas como pontos fixos nos mapas de Poincaré.

### 7.1 Pontos de Equilíbrio em 1 grau de liberdade

Um ponto de equilíbrio  $\eta_0 = (q_0, p_0)$  é tal que o campo Hamiltoniano  $G = J\nabla H$  se anula sobre ele:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p}(q_0, p_0) &\equiv \frac{\partial H}{\partial p_0} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial q}(q_0, p_0) &\equiv \frac{\partial H}{\partial q_0} = 0.\end{aligned}\tag{7.1}$$

A estabilidade de  $\eta_0$  é ditada pelo comportamento dinâmico em sua vizinhança: se pontos vizinhos se afastarem de  $\eta_0$ , este será considerado instável.

Caso eles se aproximem, dizemos que o ponto de equilíbrio é estável. No entanto, como sistemas Hamiltonianos são conservativos, não é possível que órbitas vizinhas tendam assintoticamente a  $\eta_0$ . Veremos então que a definição de estabilidade deve se aplicar a situações onde órbitas vizinhas permanecem vizinhas, i.e., não se afastam de  $\eta_0$ . Consideremos então uma trajetória vizinha dada por

$$q = q_0 + \delta q \quad p = p_0 + \delta p. \quad (7.2)$$

Substituindo nas equações de Hamilton e expandindo até primeira ordem nos desvios  $\delta q$  e  $\delta p$  obtemos

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \delta \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_0} + \frac{\partial H^2}{\partial q_0 \partial p_0} \delta q + \frac{\partial H^2}{\partial p_0^2} \delta p \\ \dot{p} &= \delta \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_0} - \frac{\partial H^2}{\partial q_0^2} \delta q - \frac{\partial H^2}{\partial q_0 \partial p_0} \delta p \end{aligned} \quad (7.3)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{q} \\ \delta \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{qp} & H_{pp} \\ -H_{qq} & -H_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

onde  $H_{qp} = \partial^2 H(q_0, p_0) / \partial q \partial p$ , etc, são coeficientes constantes. Em notação simplética essa equação se traduz em

$$\delta \dot{\eta} = A \delta \eta = J H'' \delta \eta \quad (7.5)$$

onde  $H''_{ij} \equiv \partial^2 H / \partial \eta_i \partial \eta_j$  é a matriz jacobiana das derivadas segundas de  $H$ .

Os autovalores de  $A$  podem ser facilmente calculados e o resultado é

$$\lambda = \pm \sqrt{-\det H''}. \quad (7.6)$$

Como a matriz  $A$  é real, se  $\lambda$  for um autovalor complexo e  $v$  seu autovetor,  $Av = \lambda v$ , então tomando o complexo conjugado dessa equação obtemos  $Av^* = \lambda^* v^*$ . Isso mostra que  $\lambda^*$  também é autovalor de  $A$  com autovetor  $v^*$ . Essa análise mostra que existem apenas duas possibilidades:

$\lambda$  é real e  $-\lambda$  é o segundo autovalor. Nesse caso  $\det H'' < 0$ .

$\lambda$  é imaginário puro e  $\lambda^* = -\lambda$  é o segundo autovalor. Nesse caso  $\det H'' > 0$ .

Vamos analisar cada um desses casos em detalhe:

**Caso real.** Chamando de  $v_1$  e  $v_2$  os dois autovetores de  $A$  podemos tomar  $\delta\eta$  na direção de  $v_1$  ou  $v_2$ . Com isso obtemos

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= Av_1 = \lambda v_1 \quad \rightarrow \quad v_1(t) = v_{10}e^{\lambda t} \\ \dot{v}_2 &= Av_2 = -\lambda v_2 \quad \rightarrow \quad v_2(t) = v_{20}e^{-\lambda t}.\end{aligned}\tag{7.7}$$

Um deslocamento genérico pode ser escrito como combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$  na forma

$$\delta\eta(t) = \alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t) = \alpha_1 v_{10}e^{\lambda t} + \alpha_2 v_{20}e^{-\lambda t}.\tag{7.8}$$

Escrevendo essas relações explicitamente em termos de  $q$  e  $p$  vemos que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \delta q(t) \\ \delta p(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 v_{10q}e^{\lambda t} + \alpha_2 v_{20q}e^{-\lambda t} \\ \alpha_1 v_{10p}e^{\lambda t} + \alpha_2 v_{20p}e^{-\lambda t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_{10q} & v_{20q} \\ v_{10p} & v_{20p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &\equiv V_0 S(t) \alpha\end{aligned}\tag{7.9}$$

Dessa expressão vemos que em  $t = 0$

$$\delta\eta(0) = V_0 \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = V_0^{-1} \delta\eta(0).\tag{7.10}$$

O resultado final para a evolução temporal de trajetórias vizinhas ao ponto  $\eta_0$  é que

$$\delta\eta(t) = V_0 S(t) V_0^{-1} \delta\eta(0).\tag{7.11}$$

Essa equação mostra que, a menos de uma transformação nos eixos, o movimento é uma mistura de afastamento e aproximação exponencial. O ponto de equilíbrio é dito instável, pois deslocamentos genéricos cairão sobre trajetórias que se afastam de  $\eta_0$ . A equação pode ainda ser interpretada da

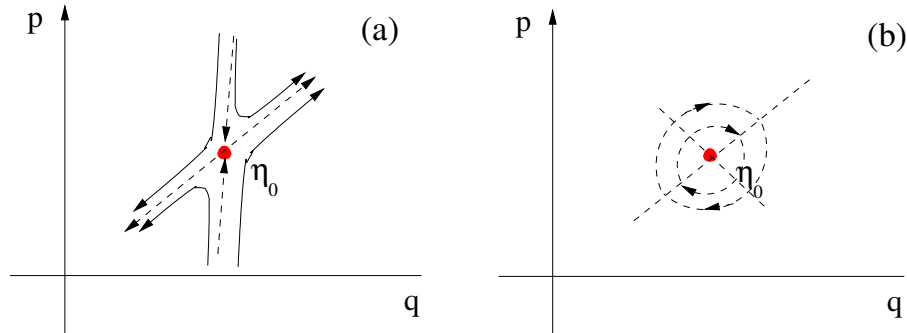


Figura 7.1: Fluxo na vizinhança de um ponto de equilíbrio (a) instável e (b) estável.

seguinte forma: definindo  $\xi = V_0^{-1}\delta\eta$  temos  $\xi(t) = S(t)\xi(0)$ . Em termos de componentes,  $\xi_1(t) = \xi_1(0)e^{\lambda t}$  e  $\xi_2(t) = \xi_2(0)e^{-\lambda t}$  correspondem a um afastamento exponencial e uma aproximação exponencial ao ponto de equilíbrio respectivamente. As direções de  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são obviamente as direções dos autovetores de  $A$ , conforme a equação (7.7). A figura 7.1 (a) o comportamento dinâmico na vizinhança de  $\eta_0$ .

O fato de termos uma direção sobre a qual as trajetórias se aproximam de  $\eta_0$  e outra sobre a qual elas se afastam na mesma taxa é uma consequência do teorema de Liouville, pois volumes não podem contrair (duas direções se aproximando) nem expandir (duas direções se afastando). O ponto de equilíbrio é dito **instável** ou **hiperbólico**.

**Caso imaginário puro.** Nesse caso temos apenas um autovetor  $v$  e seu complexo conjugado  $v^*$ . Os autovalores são  $\lambda \equiv i\omega$ . Escolhendo  $\delta\eta$  na direção de  $v$  temos

$$\dot{v} = Av = i\omega v \quad \rightarrow \quad v(t) = v_0 e^{i\omega t}. \quad (7.12)$$

Como  $v$  é complexo, a dinâmica real nas vizinhanças de  $\eta_0$  deve ser escrita como

$$\delta\eta(t) = \beta v(t) + \beta^* v^*(t) \equiv \alpha_1 u_+(t) + \alpha_2 u_-(t) \quad (7.13)$$

onde  $\alpha_1 \equiv 2\text{Re}(\beta)$ ,  $\alpha_2 \equiv -2\text{Im}(\beta)$  e

$$\begin{aligned}
 u_+(t) &= \frac{v(t) + v^*(t)}{2} = \frac{v_0 e^{i\omega t} + v_0^* e^{-i\omega t}}{2} = \text{Re}(v_0) \cos \omega t - \text{Im}(v_0) \sin \omega t \\
 &= u_+(0) \cos \omega t - u_-(0) \sin \omega t \\
 u_-(t) &= \frac{v(t) - v^*(t)}{2i} = \frac{v_0 e^{i\omega t} - v_0^* e^{-i\omega t}}{2i} = \text{Re}(v_0) \sin \omega t + \text{Im}(v_0) \cos \omega t \\
 &= u_+(0) \sin \omega t + u_-(0) \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Escrevendo explicitamente em termos de  $q$  e  $p$  temos

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \delta q(t) \\ \delta p(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 [u_{+q}(0) \cos \omega t - u_{-q}(0) \sin \omega t] + \alpha_2 [u_{+q}(0) \sin \omega t + u_{-q}(0) \cos \omega t] \\ \alpha_1 [u_{+p}(0) \cos \omega t - u_{-p}(0) \sin \omega t] + \alpha_2 [u_{+p}(0) \sin \omega t + u_{-p}(0) \cos \omega t] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_{+q}(0) & u_{-q}(0) \\ u_{+p}(0) & u_{-p}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\
 &\equiv U_0 R(t) \alpha
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Desta equação segue que  $\delta\eta(0) = U_0 \alpha$  e portanto

$$\delta\eta(t) = U_0 R(t) U_0^{-1} \delta\eta(0). \tag{7.16}$$

O movimento nas vizinhanças do ponto de equilíbrio é uma rotação no sistema de coordenadas  $\delta\xi = U_0^{-1} \delta\eta$ . O ponto de equilíbrio é dito estável ou elíptico, pois deslocamentos genéricos ficarão circulando em torno de  $\eta_0$ . As direções de  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são os eixos principais da elipse. A figura 7.1(b) ilustra esse caso.

### 7.1.1 Exemplo

Considere um oscilador anarmônico dado por

$$H = \frac{p^2}{2} + k \frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{4}.$$

Os pontos de equilíbrio são dados por

$$\dot{q} = p \equiv 0 \quad \dot{p} = -kq - q^3 \equiv 0$$

e resultam em:

(a)  $q = p = 0$

(b)  $p = 0 \quad q = \pm\sqrt{-k} \quad \text{se } k < 0.$

Vamos primeiro considerar  $k > 0$ . Nesse caso existe apenas um ponto de equilíbrio na origem. Linearizando as equações de Hamilton em torno de  $(q, p) = (0, 0)$  obtemos  $\delta\dot{\eta} = A\delta\eta$  com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $A$  são  $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{k}$  e os autovetores correspondentes são

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{k} \end{pmatrix}.$$

e  $v_- = v_+^*$ . Veja que não é necessário normalizar os autovetores, pois as inversas cancelam qualquer fator constante em (7.16) e (7.11). Os vetores reais  $u_+$  e  $u_-$  são

$$u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{k} \end{pmatrix}$$

Podemos então construir as matrizes  $U_0$  e  $U_0^{-1}$ :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \quad U_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, usando a equação (7.16) obtemos

$$\begin{pmatrix} \delta q(t) \\ \delta p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}t) & \sin(\sqrt{k}t)/\sqrt{k} \\ -\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}t) & \cos(\sqrt{k}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q(0) \\ \delta p(0) \end{pmatrix}.$$

O leitor pode verificar que  $\delta q(t)^2 + k^{-1}\delta p(t)^2 = \text{constante}$ , o que mostra que as órbitas vizinhas ficam sobre elipses com semi-eixos ao longo dos eixos  $q$  e  $p$ .

Quando  $k < 0$  a origem passa a ser instável e os dois novos pontos de equilíbrio  $p = 0$   $q = \pm\sqrt{-k}$  *bifurcam* da origem. O leitor pode confirmar que esses pontos são estáveis. Na origem os autovalores ficam  $\lambda = \pm\sqrt{-k} = \pm\sqrt{|k|}$  e os autovetores, agora reais, são

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{|k|} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{|k|} \end{pmatrix}.$$

As matrizes  $V_0$  e  $V_0^{-1}$  ficam

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{|k|} & -\sqrt{|k|} \end{pmatrix} \quad V_0^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{|k|}} \begin{pmatrix} \sqrt{|k|} & 1 \\ \sqrt{|k|} & -1 \end{pmatrix}$$

e o movimento nas vizinhanças da origem fica dado por

$$\begin{pmatrix} \delta q(t) \\ \delta p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{|k|}t) & \sinh(\sqrt{|k|}t)/\sqrt{|k|} \\ \sqrt{|k|} \sinh(\sqrt{|k|}t) & \cosh(\sqrt{|k|}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q(0) \\ \delta p(0) \end{pmatrix}.$$

Note que  $v_1 \cdot v_2 = (1 - |k|)/(1 + |k|)$  e os autovetores não são ortogonais. Para  $|k|$  pequeno eles são quase paralelos, ficando ortogonais para  $k = -1$  e (anti)paralelos de novo no limite  $|k| \rightarrow \infty$ . Para uma discussão mais detalhada veja as referências [24, 25].

## 7.2 Pontos de Equilíbrio em n graus de liberdade

O estudo da estabilidade de pontos de equilíbrio em sistemas Hamiltonianos com número arbitrário de graus de liberdade segue o mesmo esquema da análise anterior. Adotaremos, no entanto, uma análise ligeiramente diferente, introduzindo o conceito de *matriz tangente*. Os pontos de equilíbrio  $\eta_0$  são determinados pela condição

$$\frac{\partial H}{\partial \eta}(\eta_0) = 0.$$

Expandindo as equações de Hamilton até primeira ordem em  $\delta\eta$  torno de  $\eta_0$  obtemos

$$\delta\dot{\eta} = JH''(\eta_0)\delta\eta \equiv JH_0''\delta\eta$$

onde  $(H_0'')_{ij} = \partial^2 H / \partial \eta_i \partial \eta_j$ . A solução formal dessa equação de primeira ordem pode ser escrita como

$$\delta\eta(t) = e^{JH_0'' t} \delta\eta(0) \equiv M(t)\delta\eta_0. \quad (7.17)$$

Note que essa solução é análoga às soluções (7.7) e (7.12). Diagonalizando  $A = JH_0''$  diagonalizamos também  $M$ . Se  $\lambda$  é autovalor de  $A$ , então  $e^{\lambda t}$  será autovalor de  $M$  e o comportamento de  $\delta\eta$  dependerá dos autovalores de  $A$  serem reais ou complexos.

A matriz  $M(t)$  é chamada de matriz tangente e é uma matriz simplética, i.e.,  $M^T J M = J$ . Para mostrarmos essa propriedade notamos primeiramente que ela é satisfeita em  $t = 0$ , pois  $M(0) = \mathbf{1}$ . Vamos então mostrar que  $d(M^T J M)/dt = 0$ . Com isso  $M^T J M$  deve ser independente do tempo e igual ao seu valor em  $t = 0$ , i.e.,  $J$ . Para calcular a derivada de  $M$  em relação ao tempo fazemos

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} e^{JH_0'' t} = JH_0'' M. \quad (7.18)$$

Como  $H_0''$  é simétrica e  $J^T = -J$ ,

$$\dot{M}^T = M^T H_0'' J^T = -M^T H_0'' J. \quad (7.19)$$

Assim temos:

$$\frac{d}{dt} (M^T J M) = \dot{M}^T J M + M^T J \dot{M} = -M^T H_0'' J J M + M^T J J H_0'' M = 0.$$

Finalmente temos as seguintes propriedades sobre os autovalores de  $M$ :

(1) Se  $\lambda$  é autovalor de  $M$ , então  $\lambda^*$  também é. Isso segue do fato que  $M$  é real. De fato, tomando o complexo conjugado da equação de autovalores  $Mv = \lambda v$  obtemos  $Mv^* = \lambda^* v^*$ .

(2) Se  $\lambda$  é autovalor de  $M$ , então  $\lambda^{-1}$  também é. Isso segue do fato de  $M$  ser simplética. Escrevendo a equação de autovalores na forma  $\lambda^{-1}v = M^{-1}v$  e notando que  $M^{-1} = J^{-1}M^T J$  temos  $\lambda^{-1}v = J^{-1}M^T Jv$  ou  $M^T(Jv) =$



$\lambda^{-1}(Jv)$ . Isso mostra que  $Jv$  é autovetor de  $M^T$  com autovalor  $\lambda^{-1}$ . Como  $M$  e  $M^T$  tem os mesmos autovalores,  $\lambda^{-1}$  também é autovalor de  $M$ .

Temos então um conjunto maior de possibilidades para os autovalores do que no caso de um grau de liberdade. Para o caso de dois graus de liberdade, por exemplo, temos seguintes possibilidades para o conjunto dos 4 autovalores de  $M$  ( $\lambda, \mu, \omega$  e  $\xi$  reais):

- (a)  $e^{\lambda t}, e^{-\lambda t}, e^{\mu t}, e^{-\mu t}$  – ponto fixo hiperbólico nas duas direções (instável)
- (b)  $e^{\lambda t}, e^{-\lambda t}, e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$  – ponto fixo hiperbólico em uma direções e elíptico na outra (instável)
- (c)  $e^{i\xi t}, e^{-i\xi t}, e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$  – ponto fixo elíptico nas duas direções (estável)
- (d)  $e^{(i\omega+\lambda)t}, e^{(-i\omega+\lambda)t}, e^{(i\omega-\lambda)t}, e^{(-i\omega-\lambda)t}$  – ponto fixo *loxodrômico* (instável).

## 7.3 Pontos fixos nas Seções de Poincaré

Seções de Poincaré são extremamente úteis para analisar sistemas dinâmicos com dois graus de liberdade. Apesar deste ser um caso bastante particular, ele é importante por ser o menor número possível de graus de liberdade onde pode ocorrer movimento caótico. De fato essa ferramenta será empregada no estudo de caos nos próximos dois capítulos.

Como vimos no capítulo 5, uma das conseqüências do invariante canônico de Poincaré-Cartan é a preservação de áreas pelo mapa de Poincaré. Vamos mostrar agora que a preservação de áreas é equivalente ao mapa possuir jacobiano igual a 1.

Seja  $\eta_1 = F(\eta_0)$  um mapa de Poincaré. Em termos de coordenadas

$$\begin{aligned} q_1 &= F^q(q_0, p_0) \\ p_1 &= F^p(q_0, p_0). \end{aligned} \tag{7.20}$$

Tomando um ponto  $A$  arbitrário no plano  $q, p$ , escrevemos  $A' = F(A)$ , como ilustra a figura 7.2. Construimos também os vetores infinitesimais ortogonais

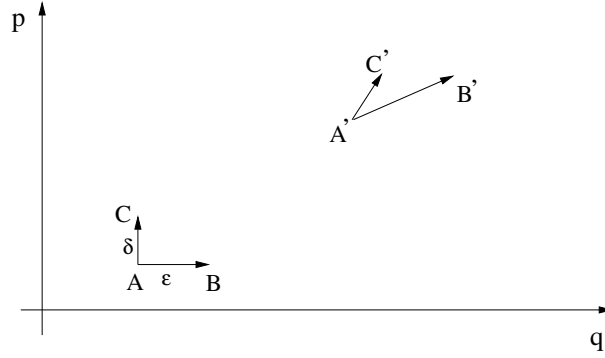


Figura 7.2: Preservação de áreas pelo mapa de Poincaré.

$\xi = B - A = \epsilon \hat{q}$  e  $\nu = C - A = \delta \hat{p}$ . O elemento de área formado por esse pequeno retângulo é  $\mathcal{A} = \epsilon \delta$ .

Vamos agora propagar todos os pontos do retângulo e calcular a nova área  $\mathcal{A}'$ . Para isso basta encontrar os vetores propagados  $\xi' = B' - A'$  e  $\nu' = C' - A'$ . O novo elemento de área será dado por  $\mathcal{A}' = |\xi' \times \nu'|$ . Temos que

$$B' = \begin{pmatrix} F^q(q_0 + \epsilon, p_0) \\ F^p(q_0 + \epsilon, p_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^q(q_0, p_0) \\ F^p(q_0, p_0) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} F_q^q(q_0, p_0) \\ F_q^p(q_0, p_0) \end{pmatrix} \equiv A' + \epsilon \begin{pmatrix} F_q^q \\ F_q^p \end{pmatrix}$$

e, da mesma forma,

$$C' = \begin{pmatrix} F^q(q_0, p_0 + \delta) \\ F^p(q_0, p_0 + \delta) \end{pmatrix} = A' + \delta \begin{pmatrix} F_p^q \\ F_p^p \end{pmatrix}.$$

Assim os vetores infinitesimais propagados são

$$\xi' = B' - A' = \epsilon \begin{pmatrix} F_q^q \\ F_q^p \end{pmatrix} \quad \nu' = C' - A' = \delta \begin{pmatrix} F_p^q \\ F_p^p \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\mathcal{A}' = |\xi' \times \nu'| = \epsilon \delta \begin{vmatrix} F_q^q & F_p^q \\ F_q^p & F_p^p \end{vmatrix} \equiv \mathcal{A} \det [F'(\eta_0)]. \quad (7.21)$$

Então  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$  implica  $\det [F'(\eta)] = 1$  para todo  $\eta$  e vice-versa.

Com esse resultado estamos agora preparados para estudar a estabilidade de pontos fixos em uma seção de Poincaré. É importante observar que um ponto fixo corresponde a uma órbita periódica do sistema Hamiltoniano correspondente. Com essa análise estaremos dando um passo importante no estudo da estabilidade, pois passamos de simples pontos de equilíbrio a órbitas fechadas de período arbitrário. Seja então  $\eta_0$  um ponto fixo do mapa de Poincaré, i.e.,  $F(\eta_0) = \eta_0$ . A dinâmica nas vizinhanças de  $\eta_0$  é obtida como sempre fazendo  $\eta = \eta_0 + \delta\eta$  e expandindo as equações até primeira ordem em  $\delta\eta$ . O resultado é  $\delta\eta' = F'(\eta_0)\delta\eta$  ou, explicitamente,

$$\begin{pmatrix} \delta q' \\ \delta p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_q^q & F_p^q \\ F_q^p & F_p^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix}.$$

A estabilidade de  $\eta_0$  é determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana calculada no ponto fixo. A equação de autovalores resulta

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}[F'(\eta_0)] + 1 = 0. \quad (7.22)$$

onde  $\text{Tr}[F'(\eta_0)] = F_{qq} + F_{pp}$  é o traço da Jacobiana e usamos que  $\det [F'(\eta_0)] = 1$ . Multiplicando toda a equação por  $\lambda^{-2}$  obtemos também

$$\lambda^{-2} - \lambda^{-1} \text{Tr}[F'(\eta_0)] + 1 = 0 \quad (7.23)$$

que é análoga à equação anterior. Assim, se  $\lambda$  é autovalor,  $\lambda^{-1}$  também é. Além disso, como a matriz Jacobiana é real, se  $\lambda$  for complexo,  $\lambda^*$  também será autovalor. Vemos que novamente os autovalores aparecem aos pares, como no caso dos pontos de equilíbrio de sistemas com um grau de liberdade e temos agora três possibilidades. Escrevendo a solução de (7.22) explicitamente como

$$\lambda = \frac{\text{Tr}[F'(\eta_0)]}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\text{Tr}[F'(\eta_0)]^2 - 4} \quad (7.24)$$

vemos que:

- (i) se  $\text{Tr}[F'(\eta_0)] > 2$ ,  $\lambda = e^\mu$ ,  $\lambda^{-1} = e^{-\mu}$  – ponto fixo instável direto
- (ii) se  $\text{Tr}[F'(\eta_0)] < -2$ ,  $\lambda = -e^\mu$ ,  $\lambda^{-1} = -e^{-\mu}$  – ponto fixo instável inverso

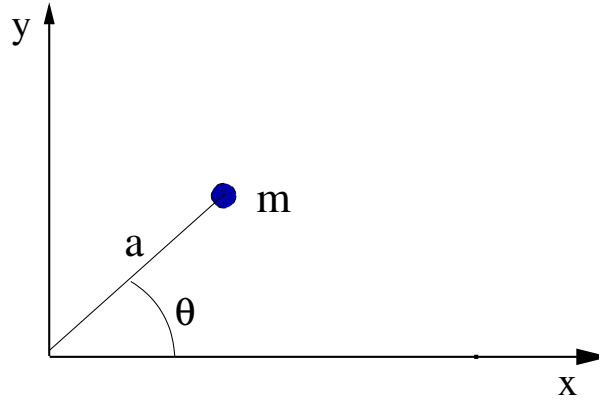


Figura 7.3: Rotor chutado.

(iii) se  $-2 < \text{Tr}[F'(\eta_0)] < 2$ ,  $\lambda = e^{i\phi}$ ,  $\lambda^* = e^{-i\phi}$  – ponto fixo estável .

No caso instável direto, sucessivas iterações de um ponto vizinho ao ponto fixo sobre o autovetor estável  $v_2$ , aproximam-se do ponto fixo uniformemente, sempre na direção de  $v_2$ . No caso instável inverso, pontos vizinhos aproximam-se do ponto fixo passando alternadamente pela direção  $+v_2$  e  $-v_2$ .

## 7.4 O rotor chutado e o mapa padrão

Um dos modelos mais utilizados no estudo de caos em sistemas Hamiltonianos é o chamado *rotor chutado* (kicked rotor, em inglês). Através dele podemos construir explicitamente o chamado *mapa padrão* (standard map) que usaremos como exemplo no capítulo 8.

O sistema consiste em um corpo pontual de massa  $m$  preso a uma barra inextensível, sem massa e de comprimento  $a$  que pode girar livremente sem atrito em torno da origem (figura 7.3)

Se o rotor fosse livre ele giraria em torno da origem com velocidade angular constante. O sistema, no entanto, está sujeito a perturbações impulsivas periódicas (os ‘chutes’) de tal forma que a intensidade da perturbação depende da posição angular do rotor. A hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{p^2}{2ma^2} + \bar{K} \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \quad (7.25)$$



Figura 7.4: Definição das variáveis a tempo discreto para o rotor.

e as equações de movimento são

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= p/ma^2 \\ \dot{p} &= \bar{K} \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau).\end{aligned}\tag{7.26}$$

Como o movimento entre as perturbações é trivial, podemos descrever o estado do sistema apenas a intervalos de tempo  $\tau$ . Sejam então

$$\theta_n = \theta(n\tau - \epsilon)$$

$$p_n = p(n\tau - \epsilon)$$

o valor de  $\theta$  e  $p$  imediatamente antes do  $n$ -ésimo impulso. Sejam ainda

$$\theta_n^+ = \theta(n\tau + \epsilon)$$

$$p_n^+ = p(n\tau + \epsilon)$$

os valores correspondentes imediatamente após o  $n$ -ésimo impulso, como ilustrado na figura 7.4.

Dados  $\theta_n$  e  $p_n$  podemos integrar as equações de movimento no intervalo  $n\tau - \epsilon$  a  $n\tau + \epsilon$ :

$$\int_{n\tau-\epsilon}^{n\tau+\epsilon} \dot{\theta} dt = \theta_n^+ - \theta_n = \int_{n\tau-\epsilon}^{n\tau+\epsilon} p/ma^2 dt = 2\epsilon \bar{p}/ma^2 = 0$$

onde  $\bar{p}$  é algum valor de  $p$  entre  $p_n$  e  $p_n^+$ . Como esses valores são finitos a integral sobre  $p/ma^2$  vai a zero quando  $\epsilon$  vai a zero, mostrando que  $\theta_n^+ = \theta_n$ .

A equação para  $p$  fica:

$$\int_{n\tau-\epsilon}^{n\tau+\epsilon} \dot{p} dt = \int_{n\tau-\epsilon}^{n\tau+\epsilon} \bar{K} \sin \theta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\tau) dt.$$

Agora a integral sobre as deltas dá uma contribuição quando  $m = n$  e temos

$$p_n^+ - p_n = \bar{K} \sin \theta_n.$$

Finalmente integramos as equações mais uma vez, agora de  $n\tau + \epsilon$  a  $(n + 1)\tau - \epsilon$ , onde o movimento é livre. Nesse intervalo o momento  $p$  se conserva e  $\theta$  roda com velocidade constante. O resultado é

$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_n^+ \tau / ma^2$$

$$p_{n+1} = p_n^+$$

ou ainda

$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1} \tau / ma^2$$

$$p_{n+1} = p_n + \bar{K} \sin \theta_n.$$

Finalmente definimos a variável  $I_n = \tau p_n / ma^2$  e a nova constante de acoplamento  $K = \bar{K} \tau / ma^2$  para obter a forma mais usual do mapa

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1} \\ I_{n+1} &= I_n + K \sin \theta_n. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Esse mapa, obtido identificando o estado do sistema a intervalos de tempo constantes, é dito *estroboscópico* e é conhecido como *mapa padrão*.

Listamos a seguir alguns outros exemplos de mapas que preservam área, também chamados de mapas conservativos.

### Mapa Quadrático de Hénon

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \cos \psi - (y_n - x_n^2) \sin \psi \\ y_{n+1} &= x_n \sin \psi + (y_n - x_n^2) \cos \psi. \end{aligned} \tag{7.28}$$

### Mapa do Gato de Arnold

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n; & x_n \bmod 1 \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n; & y_n \bmod 1. \end{aligned} \tag{7.29}$$

### Mapa de Meyer

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - p_n \\p_{n+1} &= p_n + \epsilon + (x_n - p_n)^2.\end{aligned}\tag{7.30}$$

### Mapa do Padeiro

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 2x_n - [2x_n] \\y_{n+1} &= (y_n + [2x_n]) / 2\end{aligned}\tag{7.31}$$

onde  $[x]$  significa a parte inteira de  $x$ . Voltaremos a falar sobre esses sistemas nos próximos capítulos.

## 7.5 Variedades Estáveis e Instáveis

A análise que fizemos na seção 7.1 do comportamento dinâmico nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio instável mostra a existência de duas direções especiais, dadas pelos autovetores  $v_1$  e  $v_2$  da matriz linearizada  $A$ , equação (7.4). De acordo com a equação (7.7), a dinâmica ao longo dessas direções é muito simples: pontos afastam-se exponencialmente rápido do ponto de equilíbrio sobre  $v_1$  e aproximam-se exponencialmente rápido dele sobre  $v_2$ .

No exemplo do oscilador anarmônico da seção 7.1.1 calculamos explicitamente esses vetores. A figura 7.5 mostra a dinâmica no espaço de fases desse problema para  $k = -1$ . Note que, como o sistema tem apenas um grau de liberdade, as trajetórias coincidem com as curvas de nível do Hamiltoniano. Próximo do ponto de equilíbrio instável na origem podemos ver claramente as direções dos autovetores  $v_1$  e  $v_2$  sobre a curva de nível  $H = 0$ . Essa curva é também uma separatriz, como no problema do pêndulo (veja a figura 4.5), que separa o movimento oscilatório ao redor de cada um dos pontos de equilíbrio estáveis do movimento circular sobre ambos os pontos de equilíbrio.

Pontos sobre a separatriz movem-se de maneira à tender assintoticamente ao ponto instável. As direções correspondentes à  $v_1$  e  $v_2$  são tangentes à separatriz no ponto de equilíbrio. A definição de variedades estáveis e instáveis é uma generalização do conceito de separatriz e, em sistemas com apenas um grau de liberdade, coincide com ele [21]:

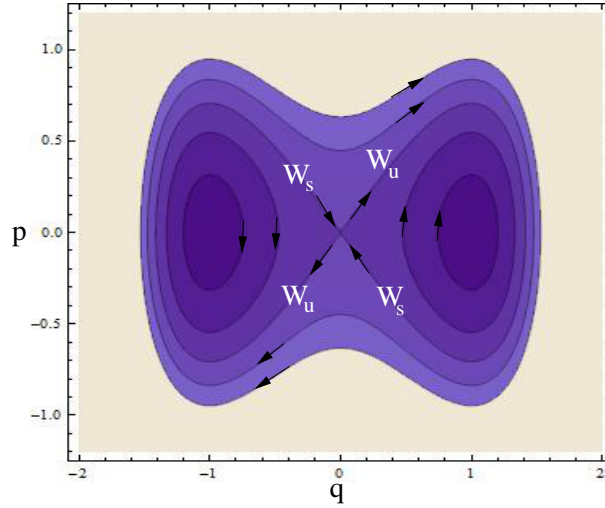


Figura 7.5: Trajetórias para o oscilador anarmônico com  $k < 0$ . Próximo ao ponto fixo instável na origem podemos ver as variedades estável e instável cujas tangentes correspondem às direções dos autovetores  $v_1$  e  $v_2$ .

A **Variedade Estável**  $W_s$  de um ponto de equilíbrio instável é o conjunto invariante de pontos  $\eta$  do espaço de fases tal que a trajetória de  $\eta$  tende assintoticamente a esse ponto.

A **Variedade Instável**  $W_u$  de um ponto de equilíbrio instável é o conjunto invariante de pontos  $\eta$  do espaço de fases tal que a trajetória de  $\eta$ , quando propagada para trás no tempo, tende assintoticamente a esse ponto. Em outras palavras, são os pontos que, no passado, estavam arbitrariamente próximos do ponto de equilíbrio.

Um conjunto é *invariante* pela dinâmica quando a trajetória de cada um de seus pontos permanece sempre sobre o conjunto. Um ponto de equilíbrio instável tem tipicamente duas variedades estáveis e duas instáveis, conforme ilustra a figura 7.5. No caso particular do oscilador quártico existem apenas duas curvas invariantes:  $W_u = W_s$  à direita e  $W_u = W_s$  à esquerda. No caso do pêndulo, figura 4.5, temos apenas uma curva invariante, pois o ponto instável em  $\theta = +\pi$  é o mesmo que em  $\theta = -\pi$ .

No caso de pontos fixos instáveis em mapas de Poincaré a situação é similar mas, em geral, aparecem quatro curvas invariantes distintas, duas



variedades estáveis e duas instáveis. Diferentemente do caso unidimensional, essas variedades não correspondem a uma única trajetória do sistema, pois trata-se de um mapa: deslocando a origem do espaço de fases para o ponto fixo, um ponto  $\eta_0$  em sua vizinhança e sobre  $W_s$  tem sua trajetória na seção de Poincaré dada por  $\eta_k = e^{-k\mu}\eta_0$ , que não forma uma curva contínua. A variedade  $W_s$  (assim com  $W_u$ ) é composta por um conjunto contínuo de trajetórias, cada uma intersectando a curva em um conjunto contável de pontos.

O conceito de variedades estáveis e instáveis tem um papel importante no estudo de caos em sistemas não integráveis, e voltaremos a falar delas no capítulo 10.

## 7.6 Exercícios

1. Considere a hamiltoniana de um grau de liberdade

$$H = \frac{p^2}{2} + q \left( 1 - \frac{q^2}{3a^2} \right).$$

Encontre os pontos de equilíbrio e estude sua estabilidade. Use seus resultados para desenhar de forma esquemática o fluxo no espaço de fases do sistema. Esboce um diagrama de bifurcações mostrando a posição de equilíbrio  $q_{eq}$  em função de  $a$ .

2. Mostre que para hamiltonianas com um grau de liberdade da forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

a estabilidade dos pontos de equilíbrio  $\bar{q}$  depende apenas de  $V''(\bar{q})$ . Mostre que os autovalores da matriz Jacobiana são dados por  $\lambda = \pm \sqrt{-V''(\bar{q})/m}$ .

3. Considere a hamiltoniana de dois graus de liberdade

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega^2 q_1^2}{2} + \frac{\lambda q_2^2}{2} + \frac{a q_2^4}{4}.$$

(a) Encontre os pontos de equilíbrio e estude sua estabilidade como função de  $\lambda$  para  $a > 0$  fixo.

(b) Escreva explicitamente o Mapa de Poincaré para o caso em que  $a = 0$ . Encontre os pontos fixos e estude sua estabilidade como função de  $\lambda$ . O que mudaria qualitativamente se  $a > 0$ ? Discuta a existência de pontos periódicos nos casos  $a = 0$  e  $a > 0$ .

4. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = x - 2y$$

$$\dot{y} = 3x - 4y .$$

(a) Esse sistema é Hamiltoniano?

(b) Estude a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(x, y) = (0, 0)$  e esboce o fluxo no espaço de fases.

5. Populações de predadores  $x$  e presas  $y$  podem ser descritas aproximadamente pelo sistema

$$\dot{x} = -\alpha x + \beta xy$$

$$\dot{y} = \gamma y - \delta xy .$$

(a) Encontre os pontos de equilíbrio e estude sua estabilidade.

(b) Existem valores dos parâmetros que tornem o sistema Hamiltoniano?

6. O Mapa de Meyer é dado por

$$x_1 = x_0 - p_0$$

$$p_1 = p_0 + \epsilon + (x_0 - p_0)^2 .$$

(a) Mostre que o mapa preserva áreas.

(b) Encontre os pontos fixos e estude sua estabilidade como função de  $\epsilon$ . Encontre os pontos fixos de período 2 e estude sua estabilidade. Esboce o fluxo no espaço  $(x, p)$  e construa o diagrama de bifurcações, representando o gráfico da coordenada  $x$  dos pontos fixos e dos pontos de periódicos de período 2 são em função de  $\epsilon$ . Use linha cheia para pontos estáveis e linha pontilhada para pontos instáveis.

7. Considere as seguintes hamiltonianas de dois graus de liberdade, conhecidas como *Henon-Heiles*, *Marta* e *Nelson*:

$$H_{HH} = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda \left( x^2 y - \frac{y^3}{3} \right),$$

$$H_M = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - x^2 y + \frac{x^4}{12}$$

e

$$H_N = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \left( y - \frac{x^2}{2} \right)^2 + \mu \frac{x^2}{2}$$

onde  $\mu$  e  $\lambda$  são parâmetros positivos.

- (a) Encontre os pontos de equilíbrio e estude sua estabilidade.
- (b) Faça um esboço das curvas de equipotencial indicando a posição dos pontos de equilíbrio.
8. Considere um oscilador harmonico sob a ação de uma perturbação periódica impulsiva:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{\bar{K}x^4}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau).$$

Usando os métodos da seção 7.4 construa o mapa estroboscópico do sistema. Mostre que o mapa é conservativo e que pode ser descrito pelos parâmetros  $K = \bar{K}/m^3\omega^3$  e  $\psi = \omega\tau$ . Encontre os pontos fixos do mapa e estude sua estabilidade. Explore numericamente o sistema.

9. Responda às mesmas perguntas para a Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{\bar{K}x^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau).$$

Esse sistema é integrável? Mostre que para cada valor de  $\psi = \omega\tau$  existe um  $K$  máximo para que as órbitas fiquem confinadas e não *escapem* para o infinito.

10. Em variáveis de ângulo e ação o oscilador harmônico é descrito por  $H_0 = \omega I$ . Construa o mapa estroboscópico para o oscilador perturbado periodicamente por

$$H = \omega I + \bar{K} \sin \phi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau).$$

Escreva essa hamiltoniana em termos de  $x$  e  $p$  e compare com os problemas anteriores.

11. Considere a Hamiltoniana de dois graus de liberdade

$$\mathcal{H}(q, p, \phi, I) = H(q, p, \phi) + I\omega$$

onde  $\phi$  é uma variável angular conjugada à  $I$ . Mostre que as equações de movimento para  $q$  e  $p$  são equivalentes às equações do sistema de um grau de liberdade dependente periodicamente do tempo dado pela Hamiltoniana  $H(q, p, t) = H(q, p, t + \tau)$  onde  $\tau = 2\pi/\omega$ . Esse resultado mostra que o mapa estroboscópico de  $H$  é equivalente à seção de Poincaré  $\phi = 0$  de  $\mathcal{H}$ .

12. Um caso particular do problema anterior é dado pela Hamiltoniana

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} + \omega \bar{K} \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - 2n\pi) + \omega p_\phi \quad (7.32)$$

onde as coordenadas generalizadas são  $(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi)$ . Mostre que as equações de movimento para  $p_\theta$  e  $\theta$  são as mesmas do rotor chutado com  $\tau = 2\pi/\omega$  e que o mapa de Poincaré em  $\phi = 2n\pi$  corresponde ao mapa estroboscópico do rotor em  $t = n\tau$ .

13. Na seção 7.3 mostramos que se  $-2 < \text{Tr}[F'(\eta_0)] < 2$  os autovalores da matriz  $F'(\eta_0)$  são da forma  $\lambda = e^{i\phi}$ ,  $\lambda^* = e^{-i\phi}$ . Mostre que, nesse caso, a evolução de uma perturbação inicial  $\delta\eta$  em torno do ponto fixo  $\eta_0$  é propagada para  $\delta\eta' = VRV^{-1}\delta\eta$  onde  $R$  representa uma rotação pelo ângulo  $\phi$ . Obtenha a matriz  $V$  em termos dos autovetores de  $F'$ .

# Capítulo 8

## Teoria de Perturbação

Como vimos no capítulo 6, sistemas integráveis são, de certa forma, triviais. Isso ocorre porque existem coordenadas canônicas especiais, de ação e ângulo, nas quais o movimento é linear. Embora a construção explícita dessa transformação canônica possa ser difícil, pois podem aparecer integrais complicadas que têm que ser resolvidas, o teorema de Arnold-Liouville garante sua existência. Mas será que todo sistema Hamiltoniano é integrável? Infelizmente a resposta é não. Na verdade os sistemas integráveis com mais de um grau de liberdade são raros e qualquer perturbação genérica pode destruir as constantes de movimento tornando o sistema não-integrável. Em outras palavras, sistemas integráveis são estruturalmente instáveis. O objetivo deste capítulo é estudar o efeito de pequenas perturbações em sistemas integráveis. Seguiremos de perto a apresentação da referência [26]. Outras fontes importantes são [27, 28, 29]

### 8.1 Um grau de liberdade

Vamos considerar uma hamiltoniana da forma

$$H(I, \phi) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \phi) + \epsilon^2 H_2(I, \phi) + \dots \quad (8.1)$$

onde  $(I, \phi)$  são variáveis de ação e ângulo para  $H_0$ . Se  $\epsilon = 0$  a solução é

$$I = I_0; \quad \phi = \phi_0 + \omega t; \quad \omega = \partial H_0 / \partial I. \quad (8.2)$$

Buscamos então uma transformação canônica de  $(I, \phi)$  para  $(J, \theta)$  de tal forma que a nova hamiltoniana  $K$  só dependa de  $J$ . Se conseguirmos construir essa transformação o sistema será novamente trivial nas novas variáveis.

Como estamos nos restringindo aqui a sistemas com apenas um grau de liberdade, ele é sempre integrável, e tal transformação deve existir para todo  $\epsilon$ . No entanto, trataremos o problema de forma perturbativa apenas, pois estenderemos o tratamento para mais graus de liberdade na próxima seção.

Seja  $S(J, \phi)$  a função geratriz (do tipo  $F_2$ ) dessa transformação. Como para  $\epsilon \ll 1$  a transformação deve ser próxima da identidade, podemos escrever

$$S(J, \phi) = J\phi + \epsilon S_1(J, \phi) + \epsilon^2 S_2(J, \phi) + \dots \quad (8.3)$$

A função  $S_1$  será escolhida de forma a eliminar a dependência angular da nova hamiltoniana. As equações da transformação são

$$I = \frac{\partial S(J, \phi)}{\partial \phi} = J + \epsilon \frac{\partial S_1(J, \phi)}{\partial \phi} + O(\epsilon^2) \quad (8.4)$$

$$\theta = \frac{\partial S(J, \phi)}{\partial J} = \phi + \epsilon \frac{\partial S_1(J, \phi)}{\partial J} + O(\epsilon^2). \quad (8.5)$$

Podemos resolver essas equações para as coordenadas originais em termos das novas em primeira ordem em  $\epsilon$ :

$$I = J + \epsilon \frac{\partial S_1(J, \theta)}{\partial \theta} + O(\epsilon^2) \quad (8.6)$$

$$\phi = \theta - \epsilon \frac{\partial S_1(J, \theta)}{\partial J} + O(\epsilon^2). \quad (8.7)$$

Substituindo essa transformação na hamiltoniana obtemos

$$\begin{aligned} K(J, \theta) &= H(I(J, \theta), \phi(J, \theta)) \\ &= H_0(I(J, \theta)) + \epsilon H_1(I(J, \theta), \phi(J, \theta)) + O(\epsilon^2) \\ &= \left[ H_0(J) + \epsilon \frac{\partial H_0}{\partial J} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + O(\epsilon^2) \right] + \epsilon [H_1(J, \theta) + O(\epsilon)] \\ &= H_0(J) + \epsilon \left[ \omega(J) \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + H_1(J, \theta) \right] + O(\epsilon^2) \\ &\equiv K_0(J) + \epsilon K_1(J, \theta) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (8.8)$$

onde  $\omega = \partial H_0 / \partial I = \partial K_0 / \partial J$  é a frequência do movimento não perturbado.

Vamos agora determinar  $S_1$  de forma que  $K_1 = K_1(J)$ . Para isso vamos explicitar a dependência angular expandindo  $H_1$  e  $S_1$  em série de Fourier:

$$S_1(J, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_{1n}(J) e^{in\theta} \quad (8.9)$$

$$H_1(J, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{1n}(J) e^{in\theta}. \quad (8.10)$$

Substituindo em  $K_1$  obtemos

$$K_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [in\omega S_{1n} + H_{1n}] e^{in\theta}. \quad (8.11)$$

Vemos que a escolha

$$S_{1n}(J) = \begin{cases} i \frac{H_{1n}(J)}{n\omega(J)} & \text{se } n \neq 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad (8.12)$$

cancela todos os termos de  $K_1$ , menos o termo de  $H_{1n}$  com  $n = 0$ . O resultado é

$$K_1(J) = H_{10}(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(J, \theta) d\theta \equiv \langle H_1 \rangle. \quad (8.13)$$

Dessa forma obtemos

$$\begin{aligned} K(J) &= H_0(J) + \epsilon \langle H_1 \rangle \\ S(J, \phi) &= J\phi + \sum_{n \neq 0} i \frac{H_{1n}(J)}{n\omega(J)} e^{in\phi} \end{aligned} \quad (8.14)$$

o que resolve o problema até primeira ordem em  $\epsilon$ . Para fechar essa seção notamos que existe uma maneira bem mais direta de se obter a função geratriz  $S_1$  sem ter que fazer a expansão de  $H_1$  em série de Fourier. Para isso notamos de (8.8) que

$$K_1 = \omega \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + H_1 \equiv \omega \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \tilde{H}_1 + \langle H_1 \rangle \quad (8.15)$$

onde separamos  $H_1$  em seu termo médio mais o resto, que é a parte dependente de  $\theta$ . Como vimos que  $K_1 = \langle H_1 \rangle$ , então  $\omega \partial S_1 / \partial \theta = -\tilde{H}_1$  ou,

$$S_1 = -\frac{1}{\omega} \int \tilde{H}_1 d\theta. \quad (8.16)$$

A receita final então é a seguinte: calcula-se  $\langle H_1 \rangle$  e obtém-se  $K$ . Define-se  $\tilde{H}_1 \equiv H_1 - \langle H_1 \rangle$  e integra-se para obter  $S_1$ .

### 8.1.1 Exemplo: o pêndulo simples

Como exemplo de aplicação da teoria de perturbação vamos considerar o pêndulo simples, cuja hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{p_\psi^2}{2ml^2} - mgl(\cos \psi - 1). \quad (8.17)$$

Faremos o cálculo perturbativo completo desse problema para ilustrar sua aplicação. A dinâmica pode ser vista qualitativamente na figura 8.1. Note que  $\psi = 0$  é um ponto de equilíbrio estável e  $\psi = \pi$  é um ponto de equilíbrio instável. A estrutura em forma de ilha representa movimentos oscilatórios, enquanto que as curvas contínuas representam rotações nos sentidos anti-horário (em cima) e horário (em baixo). A curva que separa os dois tipos de movimento é conhecida como *separatriz* e o tempo necessário para percorre-la completamente é infinito. As oscilações com baixa amplitude tem frequência  $\sqrt{g/l}$  e, conforme a amplitude aumenta, a frequência diminui, tendendo a zero sobre a separatriz.

Considerando o limite de pequenas oscilações podemos expandir o cosseno até ordem 4 em  $\psi$

$$H = \frac{p_\psi^2}{2ml^2} + mgl(\psi^2/2 - \psi^4/24) + O(\psi^6). \quad (8.18)$$

Os termos quadráticos caracterizam um oscilador harmônico  $H_0$  de frequência  $\omega = \sqrt{g/l}$  e podemos escrever variáveis de ângulo e ação  $(\phi, I)$  como:

$$p_\psi = \sqrt{2mglI/\omega} \cos \phi \quad \psi = \sqrt{2\omega I/mgl} \sin \phi. \quad (8.19)$$

Substituindo em  $H$  obtemos, até ordem 4,

$$H = \omega I - \frac{I^2}{6ml^2} \sin^4 \phi \equiv H_0 + H_1. \quad (8.20)$$



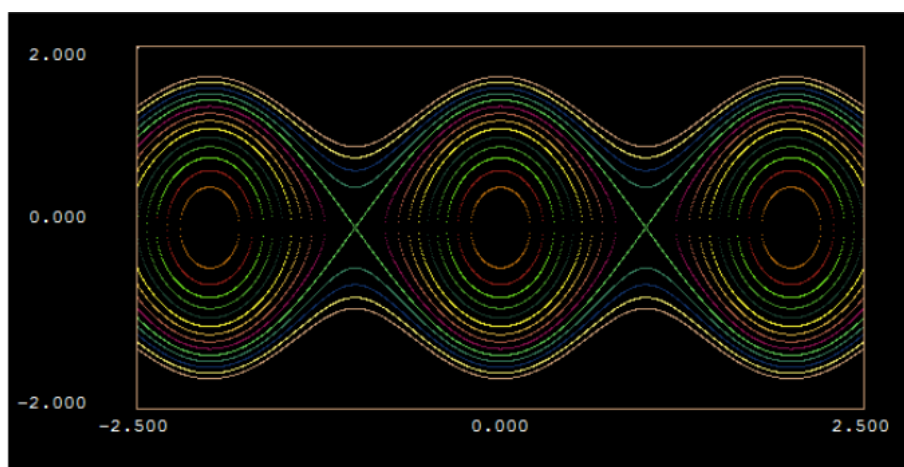
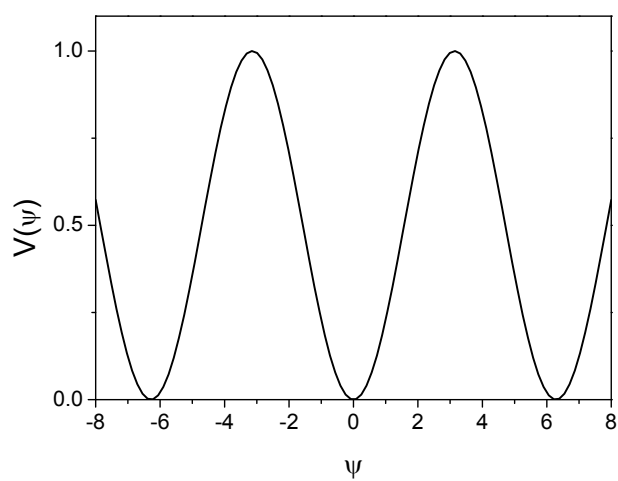


Figura 8.1: Potencial  $V(\psi) = -mgl(\cos \psi - 1)$  e espaço de fases  $p_\psi - \psi$  para o pêndulo com  $g = 1$ ,  $m = 1/4$  e  $l = 2$ .

Para aplicar a teoria de perturbação canônica, temos que expandir  $H_1$  em série de Fourier. Escrevendo  $\sin^2 \phi = (1 - \cos 2\phi)/2$  e elevando ao quadrado obtemos  $(1 - 2\cos 2\phi + \cos^2 2\phi)/4$ . Escrevendo ainda  $\cos^2 2\phi = (1 + \cos 4\phi)/2$  obtemos

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{I^2}{48ml^2} (3 - 4\cos 2\phi + \cos 4\phi) \\ &= -\frac{I^2}{96ml^2} [6 - 4(e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}) + (e^{4i\phi} + e^{-4i\phi})]. \end{aligned} \quad (8.21)$$

O valor médio de  $H_1$  é  $\langle H_1 \rangle = H_{10} = -I^2/16ml^2$  e a nova hamiltoniana é

$$K = \omega J - \frac{J^2}{16ml^2}. \quad (8.22)$$

A frequência das oscilações agora depende de  $J$ :

$$\Omega = \frac{\partial K}{\partial J} = \omega - \frac{J}{8ml^2}. \quad (8.23)$$

Como  $E = \omega J - J^2/16ml^2$ , podemos inverter e escrever  $J$  em termos de  $E$  como (mostre esse resultado!)  $J = (E/\omega)(1 + E/(16mgl))$ . Vemos então que a frequência diminui com a energia (e portanto com a amplitude das oscilações) o que está de acordo com o resultado exato.

Podemos calcular  $S_1$  usando (8.14) ou (8.16). Vamos fazer pelo primeiro método para ilustrar o procedimento. Em primeiro lugar notamos que  $H_{1,2} = H_{1,-2} = J^2/24ml^2$  e  $H_{1,4} = H_{1,-4} = -J^2/96ml^2$ . Assim,

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{1,2}e^{2i\phi} + S_{1,-2}e^{-2i\phi} + S_{1,4}e^{4i\phi} + S_{1,-4}e^{-4i\phi} \\ &= \frac{iH_{1,2}}{2\omega}(e^{2i\phi} - e^{-2i\phi}) + \frac{iH_{1,4}}{4\omega}(e^{4i\phi} - e^{-4i\phi}) \\ &= -\frac{H_{1,2}}{\omega} \sin 2\phi + -\frac{H_{1,4}}{2\omega} \sin 4\phi \\ &= \frac{J^2}{192m\omega l^2} (\sin 4\phi - 8 \sin 2\phi) \end{aligned} \quad (8.24)$$

Finalmente calculamos a solução nas variáveis  $(\phi, I)$ :

$$\begin{aligned} I &= J + \frac{\partial S_1}{\partial \theta} = J + \frac{J^2}{48m\omega l^2}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta) \\ \phi &= \theta - \frac{\partial S_1}{\partial J} = \theta - \frac{J}{96m\omega l^2}(\sin 4\theta - 8\sin 2\theta) \end{aligned} \quad (8.25)$$

onde  $J(t) = J_0$  e  $\theta(t) = \theta_0 + \Omega t$ . Para obter a evolução temporal nas variáveis originais, basta substituir  $I(t)$  e  $\phi(t)$  na transformação (8.19).

## 8.2 Dois ou mais graus de liberdade

### 8.2.1 Preâmbulo

O problema do oscilador harmônico perturbado por um termo quártico (veja o exemplo 4.8.2) é semelhante ao problema do pêndulo que resolvemos na seção anterior. Nesse caso

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \epsilon q^4/4$$

ou, em termos das variáveis de ação e ângulo do oscilador harmônico,

$$H = \omega I + \epsilon \frac{I^2}{m^2\omega^2} \sin^4 \theta.$$

O resultado da teoria de perturbação pode ser inferido dos cálculos anteriores para o pêndulo e resulta em

$$\bar{H} = \omega \bar{I} + \epsilon \frac{3}{8} \frac{\bar{I}^2}{m^2\omega^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Nessa aproximação  $\bar{I}$  é constante e

$$\dot{\bar{\theta}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{I}} = \omega + \epsilon \frac{3}{4} \frac{\bar{I}}{m^2\omega^2} \equiv \Omega$$

é a frequência do movimento perturbado. Note que  $\Omega$  depende de  $\bar{I}$ , que depende de  $E$  através da relação  $E = \omega \bar{I} + 3\epsilon \bar{I}^2/(8m^2\omega^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Invertendo essa relação temos

$$\bar{I}(E) = \frac{E}{\omega} - \epsilon \frac{3}{8} \frac{E^2}{m^2\omega^4} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

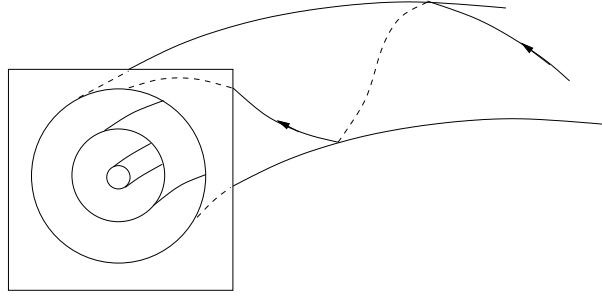


Figura 8.2: Representação de uma família de toros intersectando uma seção de Poincaré.

de forma que podemos obter a dependência da frequência com a energia:

$$\Omega(E) = \omega + \epsilon \frac{3}{4} \frac{E}{m^2 \omega^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Esse tipo de dependência é típico em sistemas Hamiltonianos. O caso do oscilador harmônico, onde a frequência do movimento não depende da energia é raro e ‘patológico’. Qualquer perturbação não-harmônica introduz dependências da frequência com a amplitude do movimento.

Nas próximas subseções vamos considerar sistemas com dois graus de liberdade e iremos supor que as frequências características do movimento dependem de sua amplitude. Para fixarmos idéias vamos considerar um sistema integrável modelo da forma

$$H_0(I_1, I_2) = \omega_{10} I_1 + \frac{\alpha_1}{2} I_1^2 + \omega_{20} I_2 + \frac{\alpha_2}{2} I_2^2,$$

que corresponde à aproximação do oscilador quártico que acabamos de discutir. As ações  $I_1$  e  $I_2$  são constantes e as frequências nas direções de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são

$$\omega_1 = \omega_{10} + \alpha_1 I_1$$

$$\omega_2 = \omega_{20} + \alpha_2 I_2$$

de forma que

$$\rho \equiv \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_{10} + \alpha_1 I_1}{\omega_{20} + \alpha_2 I_2}$$

é função de  $I_1$  e  $I_2$ . Fixando uma superfície de energia  $H_0(I_1, I_2) = E$  podemos escrever, por exemplo,  $I_2 = I_2(I_1, E)$ . Dessa forma, para  $E$  fixo,

$$\rho = \rho(I_1) = \frac{\omega_{10} + \alpha_1 I_1}{\omega_{20} + \alpha_2 I_2(I_1, E)}.$$

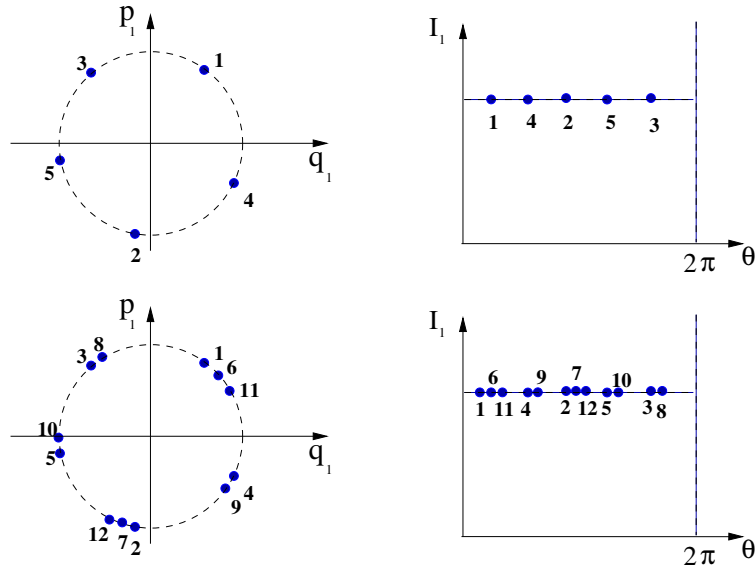


Figura 8.3: Órbitas periódicas e não periódicas na seção de Poincaré  $q_1$ - $p_1$  e  $I_1$ - $\theta_1$ .

Veremos que a razão entre as duas frequências não perturbadas é de grande importância na maneira pela qual o sistema  $H_0$  responde a perturbações. Conforme distribuimos a energia total  $E$  entre os dois modos de oscilação, variando o valor de  $I_1$  e  $I_2$  mas mantendo  $H_0(I_1, I_2) = E$ , mudamos o toro  $M_{\mathbf{f}}$  onde o movimento ocorre e também o valor de  $\rho$ . Como  $\rho$  é uma função contínua de  $I_1$ , seu valor muda continuamente ao varrermos a superfície de energia.

Em uma seção de Poincaré, os toros que compõe a superfície de energia intersectam a seção como ilustrado na figura 8.2. O valor de  $\rho$  em cada um desses toros indicará se as trajetórias sobre ele são periódicas ( $\rho$  racional) ou não-periódicas ( $\rho$  irracional). As figuras 8.3 ilustram esses dois casos para uma seção de Poincaré definida por  $\theta_2 = 0$  nos planos  $q_1$ - $p_1$  e  $I_1$ - $\theta_1$  para  $\rho = 2/5$  (em cima) e  $\rho$  irracional próximo de  $2/5$  (em baixo). No primeiro caso, qualquer trajetória fura o plano apenas 5 vezes, repetindo a mesma sequência de pontos indefinidamente. No mesmo toro existem infinitas trajetórias, cada uma furando cinco vezes em pontos distintos do círculo representando a intersecção do toro com o plano de Poincaré. No caso do toro irracional, uma

única trajetória acaba preenchendo o círculo todo se esperarmos um tempo suficientemente longo.

### 8.2.2 O Caso não-ressonante

O cálculo perturbativo para sistemas com mais de um grau de liberdade é praticamente idêntico ao caso unidimensional. Começamos com uma hamiltoniana da forma

$$H(I, \phi) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \phi) + \epsilon^2 H_2(I, \phi) + \dots \quad (8.26)$$

onde  $(I, \phi) = (I_1, I_2, \dots, I_n, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  são variáveis de ação e ângulo para  $H_0$ . Se  $\epsilon = 0$  a solução é

$$I_k = I_{k0}; \quad \phi_k = \phi_0 + \omega_k t; \quad \omega_k = \partial H_0 / \partial I_k. \quad (8.27)$$

Buscamos novamente uma transformação canônica de  $(I, \phi)$  para  $(J, \theta)$  de tal forma que a nova hamiltoniana  $K$  só dependa de  $J$ . Seja  $S(J, \phi)$  a função geratriz da transformação. Então

$$S(J, \phi) = J \cdot \phi + \epsilon S_1(J, \phi) + \epsilon^2 S_2(J, \phi) + \dots \quad (8.28)$$

onde usaremos a notação  $J \cdot \phi \equiv J_1 \phi_1 + J_2 \phi_2 + \dots + J_n \phi_n$ . A função  $S_1$  deverá ser escolhida de forma a eliminar a dependência angular da nova hamiltoniana. As equações da transformação são

$$I_k = \frac{\partial S(J, \phi)}{\partial \phi_k} = J_k + \epsilon \frac{\partial S_1(J, \phi)}{\partial \phi_k} + O(\epsilon^2) \quad (8.29)$$

$$\theta_k = \frac{\partial S(J, \phi)}{\partial J_k} = \phi_k + \epsilon \frac{\partial S_1(J, \phi)}{\partial J_k} + O(\epsilon^2). \quad (8.30)$$

Resolvendo para as coordenadas originais obtemos, em primeira ordem em  $\epsilon$ ,

$$I_k = J_k + \epsilon \frac{\partial S_1(J, \theta)}{\partial \theta_k} + O(\epsilon^2) \quad (8.31)$$

$$\phi_k = \theta_k - \epsilon \frac{\partial S_1(J, \theta)}{\partial J_k} + O(\epsilon^2). \quad (8.32)$$

Substituindo a transformação na hamiltoniana obtemos

$$\begin{aligned}
K(J, \theta) &= H(I(J, \theta), \phi(J, \theta)) \\
&= H_0(I(J, \theta)) + \epsilon H_1(I(J, \theta), \phi(J, \theta)) + O(\epsilon^2) \\
&= \left[ H_0(J) + \epsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_0}{\partial J_k} \frac{\partial S_1}{\partial \theta_k} + O(\epsilon^2) \right] + \epsilon [H_1(J, \theta) + O(\epsilon)] \\
&= H_0(J) + \epsilon \left[ \sum_{k=1}^n \left( \omega_k(J) \frac{\partial S_1}{\partial \theta_k} \right) + H_1(J, \theta) \right] + O(\epsilon^2) \\
&= H_0(J) + \epsilon \left[ \omega \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + H_1(J, \theta) \right] + O(\epsilon^2) \\
&\equiv K_0(J) + \epsilon K_1(J, \theta) + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{8.33}$$

onde  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  são as frequências do movimento não perturbado.

Vamos agora determinar  $S_1$  de forma que  $K_1 = K_1(J)$ . Expandindo  $H_1$  e  $S_1$  em série de Fourier múltipla obtemos:

$$S_1(J, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_{1n}(J) e^{in \cdot \theta} \tag{8.34}$$

$$H_1(J, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{1n}(J) e^{in \cdot \theta} \tag{8.35}$$

onde agora  $n = (n_1, n_2, \dots, n_n)$  Substituindo em  $K_1$  obtemos

$$K_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [in \cdot \omega S_{1n} + H_{1n}] e^{in \cdot \theta}. \tag{8.36}$$

Antes de fazer a escolha das componentes de  $S_1$  temos que observar se o movimento não perturbado encontra-se em ressonância ou não. A condição de ressonância ocorre quando

$$n \cdot \omega = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \dots + n_n \omega_n = 0 \tag{8.37}$$

para algum conjunto de inteiros  $n_k$ , positivos ou negativos. Como o valor das frequências  $\omega_k$  depende dos valores de  $I$ , ou seja do toro ao redor do qual estamos fazendo a perturbação, temos que especificar se estamos tratando de um toro ressonante ou não-ressonante. Nesta seção vamos considerar apenas o caso não-ressonante. Nesse caso vemos que a escolha

$$S_{1n}(J) = \begin{cases} i \frac{H_{1n}(J)}{n \cdot \omega(J)} & \text{se } n \neq 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad (8.38)$$

cancela todos os termos de  $K_1$ , menos o termo de  $H_{1n}$  com  $n = 0$ . O resultado é

$$K_1(J) = H_{10}(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(J, \theta) d\theta_1 \dots d\theta_n \equiv \langle H_1 \rangle. \quad (8.39)$$

Dessa forma obtemos, como no caso unidimensional,

$$\begin{aligned} K(J) &= H_0(J) + \epsilon \langle H_1 \rangle \\ S(J, \phi) &= J \cdot \phi + \sum_{n \neq 0} i \frac{H_{1n}(J)}{n \cdot \omega(J)} e^{in\theta} \end{aligned} \quad (8.40)$$

o que, aparentemente, resolve o totalmente o problema até primeira ordem em  $\epsilon$ .

O problema com essa solução é a convergência da série para  $S_1$ . Vamos considerar o caso de dois graus de liberdade. O denominador que aparece em  $S_{1n}$  é

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = n_1 \omega_2 \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{-n_2}{n_1} \right). \quad (8.41)$$

O caso não ressonante corresponde a  $\sigma = \omega_1/\omega_2$  irracional. No entanto, sabemos que qualquer irracional pode ser aproximado tão bem quanto se queira por um racional, i.e., existem inteiros  $r$  e  $s$  tal que  $|\omega_1/\omega_2 - r/s| < \delta$  para qualquer  $\delta$ . Assim, conforme somamos sobre  $n_1$  e  $n_2$ , o denominador em (8.38) pode ficar arbitrariamente pequeno e a série pode não convergir. A convergência dependerá dos coeficientes de Fourier  $(n_1, n_2)$  de  $H_1$  irem a zero mais rápido do que a aproximação de  $\sigma$  pelo racional  $n_2/n_1$  correspondente. A demonstração da convergência é dada pelo teorema KAM que discutiremos no próximo capítulo. Note que, além da questão de convergência da série



de Fourier para  $S_1$ , existe o problema da convergência da série em  $\epsilon$ , i.e., da série perturbativa como um todo. A conclusão, por enquanto, é que a solução (8.40) é apenas formal e não faz sentido enquanto não mostrarmos sua convergência.

### 8.2.3 O Caso ressonante

Vamos nos restringir agora a sistemas com dois graus de liberdade para simplificar os cálculos e a interpretação dos resultados. Supomos então que estamos interessados na dinâmica perturbada na vizinhança de um toro para o qual  $\sigma = \omega_1/\omega_2 = r/s$  com  $r$  e  $s$  inteiros e primos entre si. Esse toro é chamado de *toro ressonante*. Então vemos que  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$  se anula não só para  $n_1 = n_2 = 0$  mas também para  $n_1 = ps$  e  $n_2 = -pr$  para qualquer valor inteiro de  $p$ , positivo ou negativo. Vamos excluir o caso  $p = 0$ , pois este corresponde a  $n_1 = n_2 = 0$  que será levado em conta separadamente. A escolha que fizemos para  $S_{1n}$  em (8.38) deve então ser modificada.

Vamos reescrever a expressão de  $K_1$  na forma

$$K_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [in \cdot \omega S_{1n} + H_{1n}] e^{in \cdot \theta}. \quad (8.42)$$

e separar a soma sobre  $n = (n_1, n_2)$  em três partes: (a)  $(n_1, n_2) = (0, 0)$ , (b)  $(n_1, n_2) = p(s, -r) \equiv n_p$ , com  $p = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$  e (c) outros valores de  $n$ . Com isso obtemos

$$K_1 = H_{100} + \sum_{p \neq 0} H_{1,ps,-pr} e^{ip(s\theta_1 - r\theta_2)} + \sum_{n \neq n_p, 0} [in \cdot \omega S_{1n} + H_{1n}] e^{in \cdot \theta}. \quad (8.43)$$

Note que os termos envolvendo  $n \cdot \omega$  se anulam para  $n = 0$  e para  $n = n_p$ .

Podemos agora escolher os valores dos coeficientes  $S_{1n}$ :

$$S_{1n}(J) = \begin{cases} i \frac{H_{1n}(J)}{n \cdot \omega(J)} & \text{se } n \neq 0 \text{ e } n \neq n_p \\ 0 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = n_p \end{cases}. \quad (8.44)$$

Essa escolha permite eliminar a terceira parcela da hamiltoniana  $K_1$ , mas não permite a eliminação da dependência angular:

$$K_1 = H_{100} + \sum_{p \neq 0} H_{1,ps,-pr} e^{ip(s\theta_1 - r\theta_2)}. \quad (8.45)$$

Veremos agora que a forma dessa hamiltoniana está relacionada ao aparecimento de ilhas ressonantes (cercadas de regiões caóticas) em sistemas perturbados. Para isso notamos primeiramente que, como  $K_1$  é real, temos que ter  $H_{1,n} = H_{1,-n}^*$ . Isso nos permite escrever a soma sobre  $p$ 's negativos como o complexo conjugado da soma sobre os  $p$ 's positivos. Escrevendo  $H_{1,ps,-pr} = \alpha_p e^{ip\beta_p}$  a expressão (8.45) simplifica para

$$K_1 = H_{100} + \sum_{p=1}^{\infty} 2\alpha_p \cos [p(s\theta_1 - r\theta_2 + \beta_p)]. \quad (8.46)$$

Fazemos finalmente uma última transformação canônica de  $(J, \theta)$  para  $(\bar{J}, \bar{\theta})$  gerada por

$$F_2(\bar{J}, \theta) = (s\theta_1 - r\theta_2 + \beta_p)\bar{J}_1 + \theta_2\bar{J}_2. \quad (8.47)$$

A transformação é dada explicitamente por

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= J_1/s \\ \bar{J}_2 &= J_2 + rJ_1/s \\ \bar{\theta}_1 &= s\theta_1 - r\theta_2 + \beta_p \\ \bar{\theta}_2 &= \theta_2 \end{aligned} \quad (8.48)$$

e sua inversa é

$$\begin{aligned} J_1 &= s\bar{J}_1 \\ J_2 &= \bar{J}_2 - r\bar{J}_1 \\ \theta_1 &= (\bar{\theta}_1 - \beta_p + r\bar{\theta}_2)/s \\ \theta_2 &= \bar{\theta}_2 \end{aligned} \quad (8.49)$$

Nas novas variáveis a hamiltoniana completa fica

$$K = H_0(\bar{J}) + \epsilon H_{100}(\bar{J}) + \sum_{p=1}^{\infty} 2\epsilon\alpha_p(\bar{J}) \cos [p\bar{\theta}_1]. \quad (8.50)$$

Veja então que  $K$  corresponde a uma **aproximação integrável** de  $H$ , pois além da energia total,  $\bar{J}_2$  também é constante, já que  $K$  não depende de  $\bar{\theta}_2$ . Como os coeficientes de Fourier de  $H_1$  devem cair exponencialmente rápido com a ordem, em uma primeira aproximação basta considerar  $p = 1$ , o que leva à forma mais simples

$$K = H_0(\bar{J}) + \epsilon H_{100}(\bar{J}) + 2\epsilon\alpha_1(\bar{J}) \cos \bar{\theta}_1. \quad (8.51)$$

Como  $\bar{J}_2$  é constante e  $\bar{\theta}_2$  não aparece, reduzimos o problema a um movimento unidimensional. Na verdade, como  $\Omega_2 \equiv \dot{\bar{\theta}}_2 \neq 0$ , o movimento no plano  $(\bar{\theta}_1, \bar{J}_1)$  é apenas uma projeção do movimento global onde  $\bar{\theta}_2$  também depende do tempo. Se marcarmos os valores de  $(\bar{\theta}_1, \bar{J}_1)$  cada vez que  $\bar{\theta}_2$  passar por 0 (ou  $2\pi$ ), teremos um mapa de Poincaré.

Podemos simplificar um pouco mais a hamiltoniana notando que essa forma específica vale apenas nas vizinhanças do toro ressonante com razão de frequências  $r/s$  que estamos analisando. Vamos então expandir as variáveis  $\bar{J}$  em torno do seu valor ressonante  $\bar{J}^*$ . Na verdade, como  $\bar{J}_2$  é constante, vamos calcular  $K$  em  $\bar{J}_2 = \bar{J}_2^*$  e expandir apenas  $\bar{J}_1$ . Além disso, podemos também apenas calcular o termo  $\epsilon H_{100}(\bar{J})$  em  $\bar{J}^*$  pois já é de ordem  $\epsilon$  e é muito menor que  $H_0$ . Assim fazemos:

$$H_0(\bar{J}) \approx H_0(\bar{J}^*) + \frac{\partial H_0}{\partial \bar{J}_1^*}(\bar{J}_1 - \bar{J}_1^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{J}_1^{*2}}(\bar{J}_1 - \bar{J}_1^*)^2. \quad (8.52)$$

O termo de primeira ordem nessa expansão dá zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial \bar{J}_1^*} &= \frac{\partial H_0}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \bar{J}_1^*} + \frac{\partial H_0}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \bar{J}_1^*} \\ &= \omega_1 s + \omega_2(-r) = 0. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Dessa forma, próximo do toro ressonante obtemos uma hamiltoniana efetiva dada simplesmente por

$$\Delta K = \frac{G}{2}(\Delta \bar{J}_1)^2 - F \cos \bar{\theta}_1. \quad (8.54)$$

onde  $\Delta K = K - H_0(\bar{J}^*) + \epsilon H_{100}(\bar{J}^*)$ ,  $\Delta \bar{J}_1 = \bar{J}_1 - \bar{J}_1^*$  e as constantes  $G = \partial^2 H_0 / \partial \bar{J}_1^2$  e  $F = -2\epsilon \alpha_1$  são calculadas em  $\bar{J}^*$ .

Essa é a hamiltoniana de um pêndulo. A *ilha de estabilidade* correspondente ao movimento oscilatório do pêndulo é criada pela ressonância, de onde originou o cosseno. A energia efetiva da separatriz é  $\Delta K = F$ , pois corresponde à energia do ponto instável  $\bar{\theta}_1 = \pi$  e  $\Delta \bar{J}_1 = 0$ . A largura da ilha, i.e., o valor de  $\Delta \bar{J}_1$  sobre a separatriz em  $\bar{\theta}_1 = 0$  é  $\Delta \bar{J}_1 = \sqrt{4F/G} \approx \sqrt{\epsilon H_{1,s,-r}}$ . A largura da ressonância diminui então com a raiz quadrada do parâmetro perturbativo e também com a ordem da ressonância, que deve cair exponencialmente rápido.

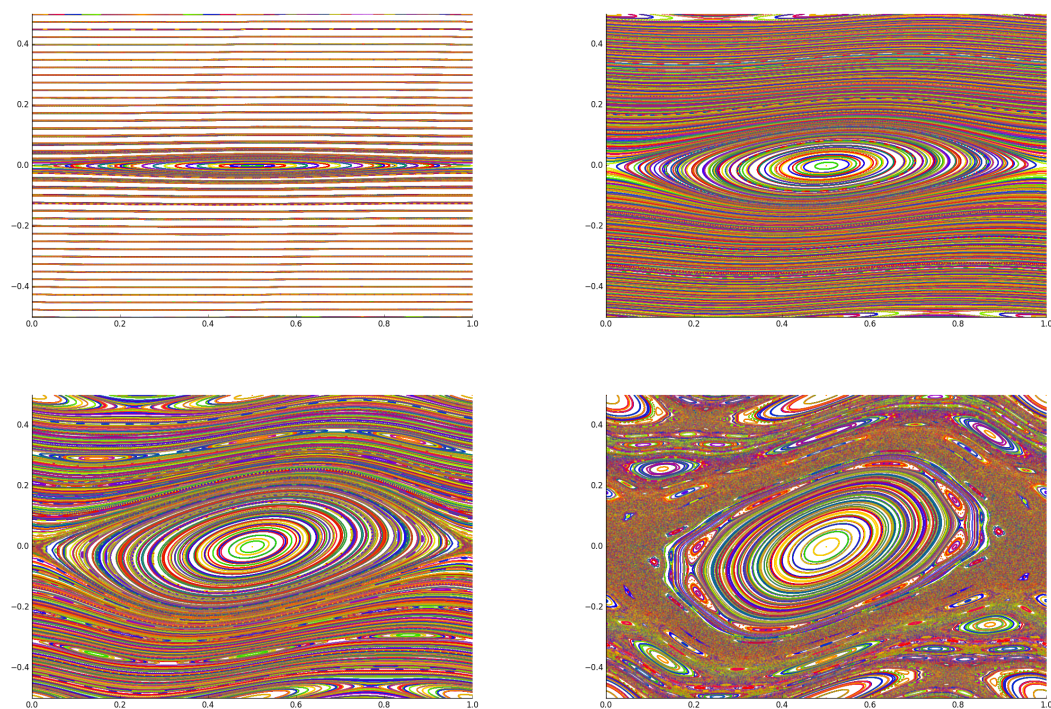


Figura 8.4: Mapa standard para (a)  $k=0.01$ ; (b)  $k=0.2$ ; (c)  $k=0.5$  e (d)  $k=1.0$ . Foram geradas 1600 trajetórias com condições iniciais regularmente espaçadas no plano e cada uma foi propagada por 3000 passos.

Finalmente voltamos às variáveis  $(\theta, J)$ . Como vimos, os pontos de equilíbrio no plano  $(\bar{\theta}_1, \bar{J}_1)$  correspondem a órbitas periódicas no espaço completo  $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{J}_1, \bar{J}_2)$ . As equações (8.49) mostram que  $\theta_2 = \bar{\theta}_2$  mas  $\theta_1 = \bar{\theta}_1/r + r\bar{\theta}_2/s$ . Assim, o intervalo onde  $\bar{\theta}_1$  varia entre  $-\pi$  e  $\pi$  (onde vemos *um pêndulo*), correspondente a uma variação entre  $-\pi/r$  e  $\pi/r$  apenas para  $\theta_1$ . Temos que repetir  $r$  vezes o desenho do pêndulo para completar a figura na variável  $\theta_1$ . Então, observamos uma cadeia com  $r$  ilhas, onde  $r$  é a ordem da ressonância.

Um exemplo que ilustra o efeito da perturbação em toros ressonantes é dado pelo Mapa Padrão, apresentado na seção 7.4:

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \phi_n \quad \phi_{n+1} = \phi_n + I_{n+1}.$$

Fazendo a mudança de variáveis  $x_n = \phi_n/2\pi$  e  $r_n = I_n/2\pi$  obtemos

$$r_{n+1} = r_n + K \sin (2\pi x_n)/2\pi \quad x_{n+1} = x_n + r_{n+1}. \quad (8.55)$$

onde  $x$  fica agora no intervalo  $[0, 1]$ .

Como esse mapa preserva áreas, ele pode ser pensado como a seção de Poincaré de um sistema Hamiltoniano perturbado. O parâmetro perturbativo é  $K$ . Para  $K = 0$  a ação  $r$  permanece constante, enquanto  $x$  salta sempre de um valor constante igual à  $r$ . Para  $r = 0$  todos os pontos  $x$  são pontos fixos do mapa. A linha  $r = 1/3$  corresponde a um toro ressonante, pois os pontos são órbitas periódicas de período 3. O mesmo ocorre em  $r = 1/2$  onde estão órbitas de período 2 e, em geral em  $r = p/q$ , com  $p$  e  $q$  inteiros, onde ficam órbitas de período  $q$ .

Na figura 8.4 mostramos várias trajetórias do mapa para quatro valores do parâmetro  $K$ . Cada trajetória, correspondendo a uma condição inicial diferente, é representada com uma cor diferente. Próximo de  $r = 0$  abre-se imediatamente uma ilha grande. Isso ocorre porque, para  $r \approx 0$  qualquer valor de  $K$  é significativo. Olhando o gráfico para  $K = 1$  podemos distinguir claramente duas cadeias de ilhas perto de  $r = 0.5$  e três cadeias perto de  $r = 0.35$ . Outras cadeias com mais ilhas podem ser observadas, porém com menor amplitude.

### 8.2.4 Estruturas fractais

A teoria de perturbação que desenvolvemos prevê que o movimento nas vizinhanças de um toro racional é modificado de forma qualitativa. O conjunto

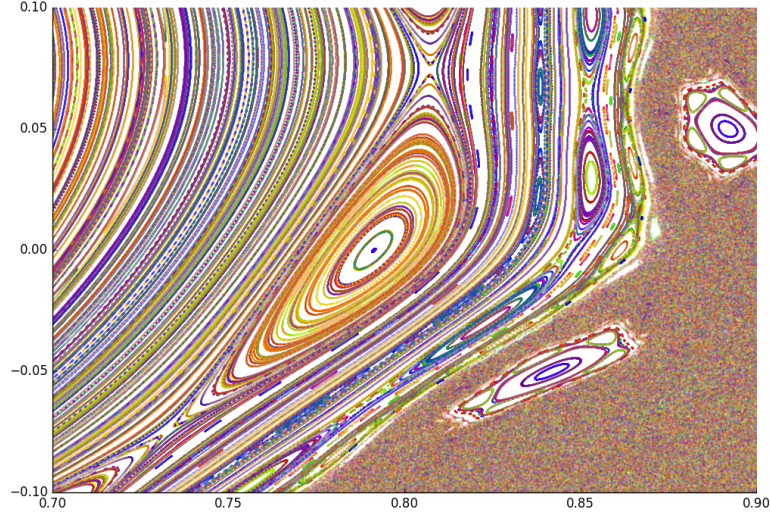


Figura 8.5: Ampliação de uma região do Mapa standard para  $k=1.0$

de órbitas periódicas que cobria o toro é substituído por uma cadeia de ilhas que possui geralmente apenas duas órbitas periódicas: uma estável no centro da ilha e outra instável nos seus extremos. Próximo do ponto estável podemos expandir o cosseno como fizemos no exemplo do pêndulo. Reescrevemos então a equação (8.54) como

$$\Delta K = \frac{G}{2}(\Delta \bar{J}_1)^2 - F + F\bar{\theta}_1^2/2 - F\bar{\theta}_1^4/24 + O(\epsilon^2, \bar{\theta}^6). \quad (8.56)$$

Desprezando o termo constante  $-F$  e definindo variáveis de ângulo e ação  $\psi$  e  $L$  por

$$\Delta \bar{J}_1 = \sqrt{2L_1\Omega_1/G} \cos \psi_1 \quad \bar{\theta}_1 = \sqrt{2L_1\Omega_1/F} \sin \psi_1 \quad (8.57)$$

onde  $\Omega_1 = \sqrt{FG}$ , obtemos

$$\Delta K = \Omega_1 L_1 - \frac{\Omega_1^2 L_1^2}{6F} \sin^4 \psi_1 + O(\epsilon^2, \bar{\theta}^6). \quad (8.58)$$

Aplicando a teoria de perturbação nas variáveis  $L_1$  e  $\psi_1$  e lembrando que  $\langle \sin^4 \psi_1 \rangle = 3/8$  podemos escrever

$$\Delta K = \Omega_1 L_1 - \frac{\Omega_1^2 L_1^2}{16F} + O(\epsilon^2) \equiv \Delta K_0 + \epsilon^2 K_2(L, \psi) \quad (8.59)$$

onde os termos em  $\epsilon^2$  representam todas as correções dessa ordem que foram desprezadas nos cálculos anteriores. Estamos também chamando  $L_2 = \Delta \bar{J}_2$  e  $\psi_2 = \bar{\theta}_2$  para uniformizar a notação.

Estamos agora olhando as trajetórias próximas ao centro de uma das ilhas. O movimento nessa região é, grosso modo, regular, constituído de curvas aproximadamente elípticas que circundam o ponto fixo central. Podemos chamar essas estruturas de toros secundários, pois aparecem devido à perturbação. No entanto, as frequências não perturbadas nessa região do espaço de fases são dadas por

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\partial \Delta K_0}{\partial L_1} = \Omega_1 - \frac{GL_1}{8} \\ w_2 &= \frac{\partial \Delta K_0}{\partial L_2} = L_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial L_2} - \frac{L_1^2}{16} \frac{\partial G}{\partial L_2} \end{aligned} \quad (8.60)$$

e novamente podem haver ressonâncias, i.e., valores de  $L_1$  e  $L_2$  para os quais  $w_1/w_2$  é um número racional. Nessas regiões a dependência angular de  $K_2$  não pode ser totalmente eliminada por teoria de perturbação e pequenas ilhas aparecerão onde haveria um toro secundário racional. Dentro dessas pequenas ilhas o processo se repete em ordem mais alta de  $\epsilon$ : pequenos toros terciários circundam o ponto central da ilha, etc.

O resultado é uma estrutura fractal de ilhas dentro de ilhas. A largura dessas ilhas diminui não apenas com  $\epsilon$ , mas também com a ordem da ressonância e ficam exponencialmente pequenas conforme adentramos a estrutura fractal. A figura 8.5 mostra um ampliação do mapa standard onde a estrutura secundária de ilhas é visível.

Outra característica importante desses sistemas perturbados é a persistência de alguns toros para perturbações pequenas (veja por exemplo a figura 8.4 para  $K$  pequeno). Isso indica que a série perturbativa deve convergir para alguns toros irracionais. Vemos também a existência de movimento aparentemente aleatório para perturbações maiores, trataremos esses assuntos no próximo capítulo.

### 8.3 Exercícios

1. Um sistema Hamiltoniano de um grau de liberdade é dado por

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} + \epsilon \left( aq + \frac{b}{2} q^2 \right).$$

Suponha que  $q(0) = q_0$  e  $p(0) = p_0$ .

- (a) Resolva o problema exatamente.
  - (b) Resolva o problema por teoria de perturbação supondo  $\epsilon$  pequeno.
  - (c) Expanda o resultado exato em primeira ordem em  $\epsilon$  e compare com o resultado perturbativo.
2. A energia do pêndulo simples é dada, em primeira ordem de teoria de perturbação, por  $E = \omega J - 3J^2/48ml^2 + \mathcal{O}(J^3)$ . Mostre que essa equação pode ser invertida de forma que  $J = (E/\omega)(1 + 3E/(48mgl)) + \mathcal{O}(E^3)$ .
3. Obtenha a função geratriz (8.24) usando a integral (8.16).
4. Considere um oscilador harmônico com uma perturbação quártica:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \epsilon \frac{q^4}{4}.$$

- (a) Escreva a Hamiltoniana em termos de variáveis de ação e ângulo  $I$  e  $\phi$  do oscilador harmônico não perturbado.
  - (b) Use a teoria de perturbação em primeira ordem para encontrar a função geratriz  $S(J, \phi)$  da transformação canônica  $(I, \phi) \rightarrow (J, \theta)$  que elimina a dependência angular da hamiltoniana.
  - (c) Encontre a nova hamiltoniana  $K(J)$  e calcule a frequência do movimento angular em função da energia.
5. Mesma questão anterior para

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \epsilon \frac{q^6}{6}.$$



6. Considere o sistema descrito pela hamiltoniana

$$H = -\alpha I_1^2 + \beta I_1 I_2 \cos \theta_1.$$

O sistema é integrável? Analise qualitativamente o movimento. Mostre que existe uma órbita periódicas com  $\theta_1 = 0$ . Encontre os valores de  $I_1$  e  $I_2$  em função da energia e o período da órbita.

7. Mesma questão anterior para a hamiltoniana

$$H = \alpha I_1^2 - \beta I_2 \cos \theta_1.$$

Existe uma órbita periódica também para  $\theta_1 = \pi$ ?



# Capítulo 9

## O Teorema KAM

As duas questões de convergência da série perturbativa levantadas no final da seção 8.2.2 do capítulo anterior foram tratadas pelo matemático russo Andrey **Kolmogorov** (1903-1987) em 1954 e, mais tarde, extendidas e tornadas rigorosas pelo seu aluno ucraniano Vladimir **Arnold** (1937-2010) em 1963 (para sistemas Hamiltonianos) e pelo alemão Jürgen **Moser** (1928-1999) em 1962 (para mapas). O resultado é conhecido hoje como Teorema KAM. A demonstração desse teorema pode ser encontrada, por exemplo, no livro *Ergodic Problems of Classical Mechanics* de Arnold e Avez [20], no apêndice 34, e é bastante complexa e sofisticada. Em vez de tentar esboçar uma prova simplificada, o que provavelmente não é possível, vamos ilustrar os problemas de convergência das séries (8.28) e (8.34) através do estudo de dois problemas muito simples ligados à questão de encontrar os zeros de funções a uma variável real. Além disso, como vimos no capítulo anterior, o efeito da perturbação depende fortemente da razão entre as frequências do movimento não perturbado. Veremos portanto algumas propriedades básicas dos números irracionais e de suas aproximações por racionais. Depois dessas discussões preliminares vamos enunciar o teorema KAM e discutir algumas aplicações simples em astronomia. Essa discussão seguirá de perto a apresentação de M. Berry em [30].

### 9.1 O método superconvergente de Newton

A idéia central da demonstração de Kolmogorov é baseada em uma técnica *superconvergente* de teoria de perturbação. Curiosamente, esse mesmo tipo

de convergência rápida ocorre no método de Newton para encontrar zero de funções, e o usaremos para ilustrar a idéia.

Suponha que queremos encontrar a posição  $\bar{x}$  onde a função suave  $f(x)$  se anula,  $f(\bar{x}) = 0$ . Suponha ainda que conheçamos a posição aproximada do zero,  $x_0$ , e que a distância entre  $\bar{x}$  e  $x_0$  seja pequena. Escrevemos

$$f(\bar{x}) = f(x_0 + (\bar{x} - x_0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (\bar{x} - x_0)^n \equiv 0$$

onde  $f^{(n)} = d^n f / dx^n$ . Re-arranjando os termos podemos reescrever essa expressão como

$$(\bar{x} - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{f^{(2)}}{f^{(1)}} (\bar{x} - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{f^{(3)}}{f^{(1)}} (\bar{x} - x_0)^3 + \dots = -\frac{f^{(0)}}{f^{(1)}} \equiv \epsilon.$$

Podemos agora inverter essa série e escrever  $(\bar{x} - x_0)$  em função de  $\epsilon$  (veja, por exemplo, *Handbook of Mathematical Functions*, M. Abramowitz e I.A. Stegun):

$$\bar{x} = x_0 + \epsilon + \epsilon^2 \left[ -\frac{f^{(2)}}{2f^{(1)}} \right] + \epsilon^3 \left[ 2 \left( \frac{f^{(2)}}{2f^{(1)}} \right) - \frac{f^{(3)}}{6f^{(1)}} \right] + \dots \quad (9.1)$$

Assim, conhecendo a função e ponto  $x_0$ , podemos calcular  $\bar{x}$  com precisão arbitrária por meio desta série no parâmetro  $\epsilon$ . Obviamente a convergência da série vai depender da função e de  $\epsilon$ . Esse tipo de procedimento é análogo ao apresentado na equação (8.28).

Existe, no entanto, um método muito mais eficiente que a equação (9.1) para encontrar zero de funções, que é o método de Newton. O método consiste do seguinte: dado  $x_0$ , obtemos primeiramente uma aproximação melhor,  $x_1$ , a partir de

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_0 + (\bar{x} - x_0)) \approx f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x_1 - x_0),$$

o que resulta em

$$x_1 - x_0 = -f(x_0)/f'(x_0) = \epsilon \equiv \epsilon_1.$$

Como  $x_1$  deve ser uma aproximação melhor para  $\bar{x}$  que  $x_0$ , repetimos o procedimento anterior começando agora em  $x_1$  e obtendo  $x_2$  e assim por diante:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= x_2 - x_1 = -f(x_1)/f'(x_1) \\ &\vdots \\ \epsilon_n &= x_n - x_{n-1} = -f(x_{n-1})/f'(x_{n-1}). \end{aligned}$$

A distância entre as sucessivas aproximações não é constante. Para ter uma idéia da taxa de convergência da série temos que estimar  $\epsilon_{n+1}$  em termos de  $\epsilon_n$ . Para fazer isso escrevemos

$$\epsilon_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f(x_{n-1} + \epsilon_n)}{f'(x_{n-1} + \epsilon_n)}.$$

A expansão do numerador resulta

$$\begin{aligned} f(x_{n-1} + \epsilon_n) &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})\epsilon_n + \frac{1}{2}f''(x_{n-1})\epsilon_n^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2}f''(x_{n-1})\epsilon_n^2 + \dots \end{aligned}$$

onde usamos a definição de  $\epsilon_n$  para cancelar os dois primeiros termos. Podemos expandir o denominador em ordem zero apenas e obter

$$\epsilon_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \epsilon_n^2.$$

Dessa forma, conquanto que o zero de  $f(x)$  não seja uma tangência (onde  $f'(x) = 0$ ) a seqüência de distâncias é:  $\epsilon_1 = \epsilon$ ,  $\epsilon_2 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ ,  $\epsilon_3 = \mathcal{O}(\epsilon^4)$ ,  $\epsilon_4 = \mathcal{O}(\epsilon^8)$ , etc. A convergência é, portanto, muito mais rápida do que a série usual dada pela equação (9.1).

Esse é um dos procedimentos utilizados por Kolmogorov para demonstrar o teorema KAM. Mostra-se em primeiro lugar a convergência da série de Fourier para  $S_1$ , equação (8.28), para certos toros não-perturbados iniciais, i.e., para certos valores das variáveis de ação  $\mathbf{I}$ . Com isso consegue-se um novo conjunto de variáveis  $\mathbf{J}^{(1)}$  e  $\theta^{(1)}$ , diferindo das originais em ordem  $\epsilon$ , de tal forma que, em primeira ordem na perturbação, os  $\mathbf{J}^{(1)}$  são constantes. Em seguida, reescreve-se a hamiltoniana em termos dessas novas variáveis de forma que a dependência em  $\theta^{(1)}$  é da ordem  $\epsilon^2$ . Busca-se então um novo conjunto de coordenadas  $\mathbf{J}^{(2)}$  e  $\theta^{(2)}$ , diferindo de  $\mathbf{J}^{(1)}$  e  $\theta^{(1)}$  em ordem  $\epsilon^2$  e mostra-se a convergência da série  $S_1$  associada, e assim por diante. A cada passo a dependência das variáveis de ângulo no parâmetro  $\epsilon$  é o quadrado da dependência anterior.

No entanto, para que tudo isso funcione, temos que mostrar quando as séries para  $S_1$  convergem. Novamente ilustraremos o procedimento de forma bastante simples.

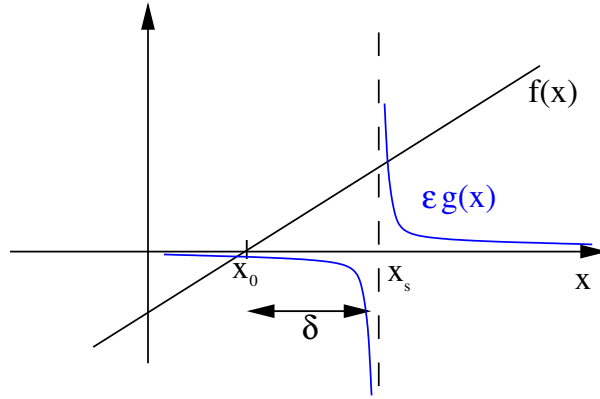


Figura 9.1: Função  $f(x)$  e a perturbação singular  $g(x) = \epsilon/(x - x_s)$ . O parâmetro  $\delta = x_s - x_0$  mede a distância do zero não perturbado da singularidade.

## 9.2 Perturbações singulares

Vamos voltar ao problema do cálculo dos zeros de uma função suave. Vamos supor que podemos escrever a função como  $F(x) = f(x) + \epsilon g(x)$  de tal forma que sabemos onde estão os zeros de  $f(x)$ . Para simplificar as coisas vamos supor que  $f(x) = x - x_0$ . Se  $g(x)$  for também uma função bem comportada o cálculo dos zeros de  $f$  não apresentará surpresas. Suponha, no entanto, que  $g(x)$  tenha uma singularidade em  $x = x_s$ , próximo de  $x_0$ . Como um exemplo concreto considere

$$F(x) = (x - x_0) + \frac{\epsilon}{x - x_s}$$

com  $x_s > x_0$ , conforme ilustrado na figura 9.1.

Como  $F(x)$  é muito simples, podemos calcular a posição de seus zeros explicitamente. Impondo  $F(x) = 0$  encontramos a seguinte equação do segundo grau:

$$x^2 - x(x_0 + x_s) + (x_s x_0 + \epsilon) = 0.$$

A condição para existência de soluções reais é que

$$\Delta \equiv (x_0 - x_s)^2 - 4\epsilon \geq 0.$$

A figura 9.2 mostra o comportamento de  $F(x)$  para  $\Delta < 0$ ,  $\Delta = 0$  e  $\Delta > 0$ . Então, fixando a distância  $\delta = x_s - x_0$ , entre o zero não perturbado e a

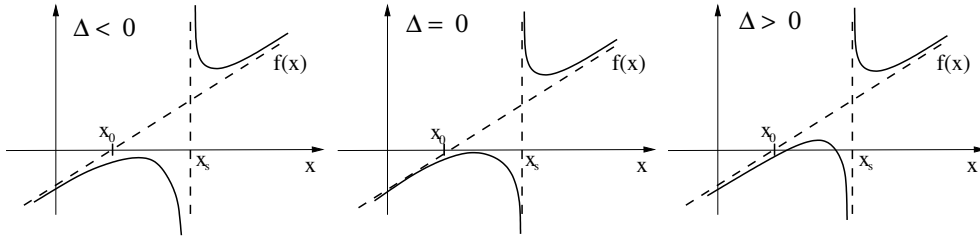


Figura 9.2: Função  $F(x)$  para diferentes valores de  $\Delta$  (veja o texto). A função perturbada só terá zeros se o valor da perturbação for suficientemente pequeno comparado à distância entre o zero original e a singularidade.

posição da singularidade, o zero da função perturbada só existirá se

$$\epsilon \leq \delta^2/4.$$

Ou ainda: mantendo  $\epsilon$  fixo,  $F(x)$  só terá um zero próximo à  $x_0$  se este estiver suficientemente longe da singularidade  $x_s$ .

A analogia com a teoria de perturbação desenvolvida no capítulo 8 é a seguinte: para um valor fixo da perturbação, os toros da hamiltoniana perturbada só existirão se a razão entre suas frequências não perturbadas estiver suficientemente longe de um número racional.

Na próxima seção discutiremos medidas de distância entre números racionais e irracionais, necessárias para entender a convergência da teoria de perturbação desenvolvida no capítulo 8. Antes, porém, é interessante fazer duas observações sobre este exemplo simples. Em primeiro lugar, notamos que a escolha de  $f(x)$  como uma função linear não é restritiva, pois se  $x_0$  é próximo de  $x_s$ , sempre podemos linearizar  $f(x)$  nessa região. A função singular  $g(x)$  pode, é claro, ser de ordem mais alta, como  $(x - x_s)^{-2}$ , mas o polo de primeira ordem é o mais simples e basta para tirarmos as informações qualitativas sobre o problema.

Finalmente, é interessante notar que, caso hajam zeros de  $F(x)$ , eles aparecem genericamente aos pares (exceto para  $\epsilon = \delta^2/4$ ). Veremos que um reflexo disso também acaba aparecendo no teorema correlato de Poincaré-Birkhoff, que trataremos mais adiante.

### 9.3 Frações continuadas

As equações (8.40) e (8.41) do capítulo 8 e a discussão da seção anterior, mostram que a quantidade chave que vai determinar a convergência ou não da série perturbativa (8.34) é a ‘distância’ entre o toro não-ressonante, também chamado de *toro irracional*, para o qual a série foi desenvolvida, e os toros ressonantes vizinhos, chamados de *racionais*. Em outras palavras, temos que determinar se a razão entre as frequências não perturbadas  $\sigma = \omega_1/\omega_2$  está suficientemente longe dos números racionais. Embora a idéia de distância entre racionais e irracionais possa parecer estranha, pois um conjunto é denso no outro, ela pode ser formulada de maneira precisa com a ajuda das chamadas *frações continuadas* [31, 32].

Todo número irracional  $\sigma$  pode ser aproximado tão bem quanto se queira por um número racional. Dado

$$\sigma = d_0.d_1d_2d_3\dots$$

onde os dígitos  $d_k$  são inteiros entre 0 e 9, podemos produzir a seguinte sequência de aproximações racionais:

$$d_0, \quad \frac{d_0d_1}{10}, \quad \frac{d_0d_1d_2}{100}, \quad \frac{d_0d_1d_2d_3}{1000}, \dots, etc.$$

Nessa sequência, o erro cometido, i.e., a distância entre o número irracional e sua aproximação racional, é dado por

$$\left| \sigma - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{s}. \quad (9.2)$$

Para o número  $\pi = 3.14159265\dots$  e  $r/s = 3141/1000$ , o erro é menor do que  $1/1000$ , pois está na quarta casa decimal.

Existe, no entanto, uma outra maneira de gerar aproximações racionais para números irracionais que é bem mais eficiente. Nesse método, conhecido como frações continuadas (ou frações contínuas), o número  $\sigma$  é escrito na forma

$$\sigma = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

onde os coeficientes  $a_k$  são inteiros maiores ou iguais a um se  $k > 1$  e  $a_0 \equiv [\sigma]$  é a parte inteira de  $\sigma$  (que pode ser positiva, negativa ou nula), que



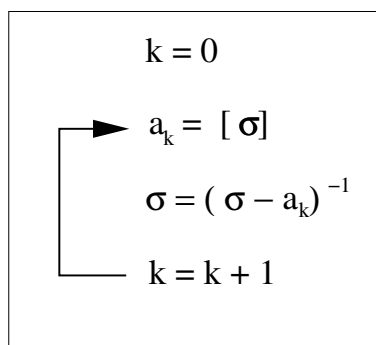


Figura 9.3: Algoritmo para construção de frações continuadas.

denotaremos pelos colchetes  $[ \ ]$ . Essa expansão é única e pode ser obtida através do algoritmo indicado na figura 9.3.

**Exemplo 9.3.1** O número  $\pi$ :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}$$

**Exemplo 9.3.2** O número  $e$ :

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}$$

É possível encontrar uma relação de recorrência entre a aproximação ra-

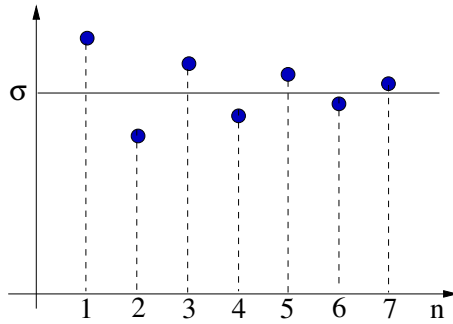


Figura 9.4: Comportamento dos aproximantes racionais para o número  $\sigma$ .

cional de ordem  $n$

$$\sigma_n \equiv \frac{r_n}{s_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (9.3)$$

e a aproximação de ordem  $n-1$ . De fato, podemos mostrar por indução que

$$r_n = a_n r_{n-1} + r_{n-2} \quad (9.4)$$

$$s_n = a_n s_{n-1} + s_{n-2}$$

onde  $r_0 = a_0$ ,  $s_0 = 1$ ,  $r_{-1} \equiv 1$  e  $s_{-1} \equiv 0$ . Note que, para  $n > 1$ ,  $s_n > s_{n-1}$ .

**Exercício:** Demonstre essa relação.

**Solução:** é fácil ver que (9.4) vale para  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ . Supomos então que ela seja válida para  $\sigma_n$  e mostramos que vale também para  $\sigma_{n+1}$ . Usamos agora o fato que a expansão de  $\sigma_{n+1}$  como uma série do tipo (9.3) fica idêntica à série de  $\sigma_n$  se fizermos  $a_n + 1/a_{n+1} \equiv \bar{a}_n$ . Assim, escrevendo  $\sigma_{n+1} = \bar{r}_n/\bar{s}_n$  temos que

$$\bar{r}_n = \bar{a}_n r_{n-1} + r_{n-2}$$

$$\bar{s}_n = \bar{a}_n s_{n-1} + s_{n-2}.$$

Substituindo  $\bar{a}_n = (a_n a_{n+1} + 1)/a_{n+1}$  e re-arranjando os termos obtemos

$$\bar{r}_n = \frac{1}{a_{n+1}} [a_{n+1} r_n + r_{n-1}]$$

$$\bar{s}_n = \frac{1}{a_{n+1}} [a_{n+1} s_n + s_{n-1}].$$

Dividindo  $\bar{r}_n$  por  $\bar{s}_n$  o inteiro  $a_{n+1}$  se cancela e os termos entre colchetes ficam iguais à  $r_{n+1}$  e  $s_{n+1}$  respectivamente.

Multiplicando a primeira das equações (9.4) por  $s_{n-1}$ , a segunda por  $r_{n-1}$  e subtraindo uma da outra obtemos

$$r_n s_{n-1} - r_{n-1} s_n = -[r_{n-1} s_{n-2} - r_{n-2} s_{n-1}].$$

Usando essa relação recursivamente chegamos a

$$r_n s_{n-1} - r_{n-1} s_n = (-1)^n [r_0 s_{-1} - r_{-1} s_0] = (-1)^{n+1}$$

e dividindo os dois lados por  $s_n s_{n-1}$  obtemos a relação importante

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{s_n s_{n-1}}. \quad (9.5)$$

Essa equação mostra que os aproximantes racionais de  $r_n/s_n$  são alternadamente maiores e menores do que  $\sigma$ , como ilustra a figura 9.4. Além disso, essa relação mostra que ou  $\sigma_n < \sigma < \sigma_{n+1}$  (por exemplo, para  $n = 2$  na figura) ou  $\sigma_{n+1} < \sigma < \sigma_n$  (como para  $n = 3$  na figura). No primeiro caso vale a relação  $0 < \sigma - \sigma_n < \sigma_{n+1} - \sigma_n$ . No segundo caso vale  $\sigma_{n+1} - \sigma_n < \sigma - \sigma_n < 0$ , de forma que sempre é verdadeira a desigualdade

$$|\sigma - \sigma_n| < |\sigma_{n+1} - \sigma_n| = \frac{1}{s_n s_{n+1}} < \frac{1}{s_n^2}. \quad (9.6)$$

Comparando com a (9.2) vemos que o ganho em precisão é significativo. Essa relação vale para todo número irracional e pode-se mostrar que nenhum outro tipo de aproximação racional gera precisão que seja melhor do que essa para todo irracional.

Para um dado irracional, a sequência  $\sigma_n$  converge rápido se a sequência  $a_1, a_2, \dots$  divergir rápido. Dessa forma, o número *mais irracional* de todos é aquele cuja aproximação por racionais é a mais lenta possível, isto é, quanto todos os  $a_n$  forem iguais à 1. Esse número, conhecido como razão áurea, é dado por

$$\zeta = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

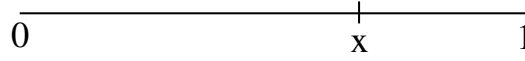


Figura 9.5: A razão áurea na visão de Euclides, onde  $1/x = x/(1-x)$

Claramente vemos que  $\zeta$  satisfaz a relação  $\zeta = 1 + 1/\zeta$ , ou

$$\zeta = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.6180339 \dots \quad (9.7)$$

A equação (9.4) mostra que, para a razão áurea, as relações de recorrência satisfeitas pelo numerador e denominador de  $\zeta_n = r_n/s_n$  são de fato idênticas, estando apenas ‘defasadas’:

$$r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$$

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$$

pois  $r_{-1} = r_0 = 1$  enquanto  $s_{-1} = 0$  e  $s_0 = s_1 = 1$ . Escrevendo genericamente

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_{-1} = F_0 = 1$$

temos a famosa *Sequência de Fibonacci*, cujos primeiros números são

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Claramente  $\zeta_n = F_n/F_{n-1}$ .

A razão áurea teve uma grande influência nas artes. Aparentemente esse número curioso foi descoberto por Euclides em cerca de 300 AC como sendo o ponto ao longo de um segmento de comprimento unitário tal que a razão entre seu tamanho e o trecho maior, seja igual à razão entre os trechos maior e menor, como na figura 9.5. Por algum motivo misterioso, esse tipo de proporção geométrica é agradável aos olhos e foi muito utilizado em pinturas do período renascentista. A figura 9.6 mostra um retângulo construído com as proporções da razão áurea e que é subdividido em um quadrado mais outro retângulo dourado. Repetindo o processo é possível gerar uma espiral cujas proporções são freqüentemente encontradas na natureza. O ponto final da espiral é conhecido como *olho de diabo*. Para mais detalhes e curiosidades veja o artigo de Maria Efigênia de Alencar na revista Física na Escola [33]

A equação (9.6) nos diz que qualquer número irracional pode ser aproximado por uma racional da forma  $r/s$  de tal forma que o erro na aproximação

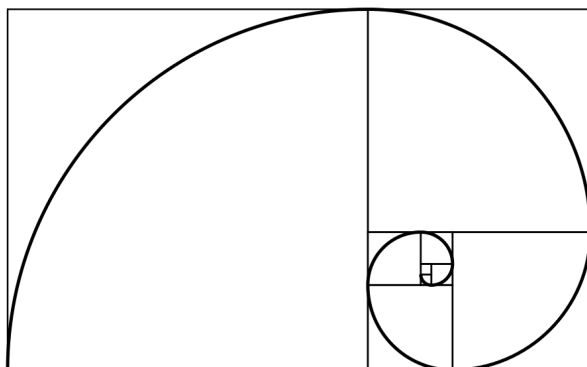


Figura 9.6: Retângulo de razão áurea e espiral. O retângulo é dividido de forma que o lado menor forme um quadrado. Um arco de círculo é então desenhado nesse quadrado. O retângulo vertical que sobra dessa divisão é novamente um retângulo áureo e o processo pode ser repetido indefinidamente. O ponto de convergência da espiral é o chamado *olho do diabo*.

é menor do que  $s^{-2}$ . No entanto, para certas classes especiais de números, a convergência pode ser ainda melhor, como  $s^{-3}$ ,  $s^{-4}$  ou mesmo  $e^{-s}$ . O livro *Continued Fractions* de A.Y. Khinchin, demonstra todos esses resultados de forma rigorosa. Para ter uma idéia do tipo de número cuja convergência é mais rápida do que  $s^{-2}$ , considere as raízes reais da equação

$$f(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n$$

onde os  $d_k$  são inteiros. Essas raízes são ditas *algebráicas de ordem  $n$*  e são uma generalização dos racionais. Esses últimos são raízes de funções da forma  $f(x) = d_0 + d_1x$ . Os números não-algebráicos são ditos transcendentais. Por exemplo,  $\sqrt{2}$  é algebráico, pois é raiz de  $f(x) = x^2 - 2$  e  $\pi$  é transcendental. Um teorema de Liouville diz que se o erro  $|\sigma - r/s| < c/s^\alpha$  com  $\alpha > 2$ , então  $\sigma$  é transcendental. Em particular, a razão áurea é um número algebráico de ordem 2. Note, no entanto, que o teorema de Liouville não prova que todo transcendental é necessariamente ‘bem aproximado’ por um racional.

## 9.4 O teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser

Considere um sistema integrável com dois graus de liberdade descrito pela hamiltoniana  $H_0(I_1, I_2)$ . Vamos supor que  $H_0$  seja não degenerado, isto é,

que

$$\det \left| \frac{\partial \omega_k}{\partial I_m} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_k \partial I_m} \right| \neq 0.$$

Nesse caso as frequências do movimento em cada toro dependem efetivamente do toro e temos um mapa entre toros  $(I_1, I_2)$  e frequências angulares  $(\omega_1, \omega_2)$ . Os toros racionais e irracionais estão ‘um ao lado do outro’ como os números racionais e irracionais. Note que a condição de não-degenerescência exclui osciladores harmônicos, onde as frequências são independentes das variáveis de ação.

Vamos considerar inicialmente uma perturbação da forma  $\epsilon \bar{H}_1(I_1, I_2)$ , independente das variáveis angulares  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Cada superfície de energia de  $H_0$  é composta por uma família de toros, e cada toro é caracterizado pela razão  $\sigma_0 = \omega_{10}/\omega_{20}$  entre as frequências de rotação nas direções dos ângulos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  respectivamente. O sistema perturbado,  $H = H_0 + \epsilon \bar{H}_1$ , também é integrável e, portanto, suas superfícies de energia também são compostas por toros. Se a hamiltoniana  $H_0$  não for degenerada, isto é, se  $\sigma_0$  mudar suavemente conforme mudamos de toro, então podemos caracterizar (pelo menos localmente) cada toro pelo seu valor de  $\sigma_0$ . Note que isso não ocorre no caso do oscilador harmônico bidimensional, onde  $\sigma_0$  é igual para todos os toros.

Se tanto  $H_0$  quanto  $\bar{H}_1$  forem funções suaves, então podemos acompanhar, como função de  $\epsilon$ , a superfície bidimensional correspondente a um toro com razão  $\sigma$  fixa. Esperamos que essa superfície deforme-se suavemente conforme  $\epsilon$  é variado. Por exemplo, podemos considerar o toro de  $H_0$  cuja razão de frequências é  $\sigma_0 = \sqrt{2}$  e, para cada valor de  $\epsilon$ , buscar o toro de  $H$  com o mesmo  $\sigma = \sqrt{2}$ . Se esse toro existir para um intervalo finito de variação de  $\epsilon$ , dizemos que o toro com  $\sigma_0 = \sqrt{2}$  foi preservado pela perturbação, ou *sobreviveu* à perturbação, pois existia em  $H_0$  e continua existindo em  $H$ . Neste caso particular onde tanto  $H_0$  quanto  $H$  são integráveis, todos os toros sobrevivem à perturbação.

Considere agora uma perturbação genérica  $\epsilon H_1(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2)$  como fizemos no capítulo 8. O sistema perturbado  $H = H_0 + \epsilon H_1$  não é mais integrável e não é mais possível saber a priori quais toros sobrevivem à perturbação (se é que algum toro sobrevive) e quais são *destruídos*. O teorema KAM diz respeito a essa questão e prova que a série perturbativa, desenvolvida com a técnica superconvergente à la Newton, converge para toros irracionais cuja razão de frequências seja ‘suficientemente irracional’ para que a seguinte

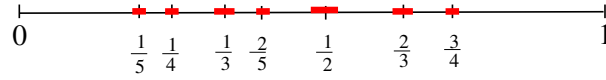


Figura 9.7: Toros racionais e vizinhanças de tamanho  $K(\epsilon)/s^{2.5}$ . Quanto maior  $s$  menor o tamanho da vizinhança removida.

relação seja satisfeita:

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\epsilon)}{s^{2.5}} \quad (9.8)$$

para todos  $r$  e  $s$  inteiros e onde  $K(\epsilon)$  é independente de  $r$  e  $s$  e vai a zero quando  $\epsilon$  vai a zero.

Toros com razão de frequências transcendentais que admitem rápida convergência por racionais, por exemplo, serão os primeiros a serem destruídos. Toros com razão de frequências algebraicas, por outro lado, vão satisfazer essa relação, e sobreviverão à perturbação se ela for suficientemente pequena. Vamos assumir que todos os toros que não satisfazem essa relação são destruídos. Isso inclui todos os toros racionais com  $\sigma_0 = r/s$  e uma pequena vizinhança deles, onde

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| < \frac{K(\epsilon)}{s^{2.5}}. \quad (9.9)$$

Vamos então estimar qual a fração dos toros que sobrevivem à perturbação. Ora, como os números racionais são densos nos reais e temos que retirar os racionais juntamente com uma pequena vizinhança deles, podemos achar que não vai sobrar nada, i.e., que todos os toros serão destruídos. Isso, no entanto, não é verdade.

Suponha que os toros em uma determinada camada de energia tenham  $\sigma_0$  variando entre 0 e 1. Localizamos então todos os números racionais nesse intervalo e retiramos não apenas esses números, mas também uma vizinhança de tamanho  $K(\epsilon)/s^{2.5}$  em torno de cada um. Obviamente um ponto dentro dessa vizinhança satisfaz (9.9) e deve ser removido. Tudo o que sobrar satisfaz (9.8) e corresponde à fração de toros que sobreviveram. A figura (9.7) ilustra o procedimento.

Para cada denominador  $s$  fixo temos, em geral,  $s - 1$  racionais. Para  $s = 7$ , por exemplo, temos  $1/7$ ,  $2/7$ ,  $3/7$ ,  $4/7$ ,  $5/7$  e  $6/7$ . O intervalo total removido da reta,  $\mathcal{R}$ , é então

$$\mathcal{R} < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K(\epsilon)}{s^{2.5}} (s - 1) < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K(\epsilon)}{s^{2.5}} s = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K(\epsilon)}{s^{1.5}} \approx 2.6K(\epsilon).$$

Como  $K(\epsilon)$  vai a zero quando  $\epsilon$  vai a zero, para pequenas perturbações quase todos os toros irracionais sobrevivem!

O resultado final é que, no sistema perturbado, apesar de não haver duas constantes de movimento, a maioria das órbitas continuam sobre toros. Aquelas que não estão sobre toros formam um conjunto pequeno mas finito, distribuído no espaço de fases entre os toros que ficaram.

O fator  $K/s^{2.5}$  nas equações (9.8) e (9.9) de fato é da forma  $K/s^\mu$  onde  $\mu > 2$  e o fator  $K(\epsilon)$  deve satisfazer a relação  $K(\epsilon) \gg \sqrt{|\epsilon|}$ . De forma mais geral o teorema KAM pode ser enunciado da seguinte forma: dado o valor do parâmetro perturbativo  $\epsilon$  existe  $\delta > 0$  tal que os toros que satisfazem a relação

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\epsilon)}{s^\mu} \quad (9.10)$$

com  $K(\epsilon) > \delta\sqrt{|\epsilon|}$  e  $\mu > 2$  são preservados. O artigo [34] trás uma ótima apresentação e demonstração do teorema KAM.

O teorema KAM não diz nada sobre o que acontece na região do espaço de fases onde não há mais toros. Voltaremos a esse ponto no próximo capítulo.

## 9.5 Aplicações em astronomia

### 9.5.1 O problema de três corpos em um plano

Vamos considerar aqui uma versão bastante restrita do problema gravitacional de três corpos que, apesar de simplificada, é útil para certos problemas de astronomia. Para fixar idéias podemos pensar que os três corpos são o Sol, Júpiter e um pequeno asteróide. As massas desse três corpos, que denominaremos genericamente de A, B e C, são, respectivamente,  $M$ ,  $m$  e  $\mu$ , com  $M \gg m \gg \mu$ .

Como  $\mu$  é muito pequena, podemos assumir que o movimento do sistema A-B não é afetado por C e suas órbitas são conhecidas. Para tornar tudo mais simples vamos supor que A fica parado na origem (pois  $M \gg m$ ) e que B está em órbita circular de raio  $r_B$  e frequência angular  $\Omega$ . Queremos estudar o movimento de C sob a influência de A e B assumindo que tudo acontece no plano orbital do sistema A-B, conforme ilustrado na figura 9.8.

A lagrangiana para o corpo C no referencial  $x$ - $y$  de A é dada por

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{GM\mu}{r} + \frac{Gm\mu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B(t)|} \quad (9.11)$$



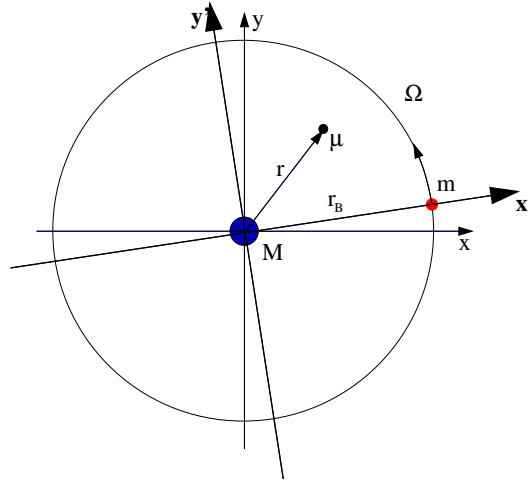


Figura 9.8: Sistema plano de três corpos com  $M$  fixo no centro,  $m$  em órbita circular e  $\mu$  orbitando sob a influência dos dois corpos. O sistema de coordenadas  $x$ - $y$  é inercial, fixo em relação ao corpo central, e o  $x'$ - $y'$  gira junto com  $m$ .

onde  $\mathbf{r}_B(t)$  é uma função conhecida do tempo. Para eliminar a dependência explícita do tempo mudamos para um referencial não inercial  $x'$ - $y'$  cuja origem é  $A$  mas que gira com velocidade  $\Omega$  junto com  $B$ . Escolhemos o eixo  $x'$  na direção de  $B$ , de forma que  $\mathbf{r}'_B = r_B \hat{x}'$ .

A transformação para o novo sistema de coordenadas pode ser feita facilmente e é deixada como exercício para o leitor (veja o problema 4 do capítulo 4). O resultado é

$$L = \frac{1}{2}\mu [\dot{\mathbf{r}} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})]^2 + \frac{GM\mu}{r} + \frac{Gm\mu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B|}$$

onde  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$  e abolimos as linhas para simplificar a notação. Em coordenadas polares  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  podemos mostrar que  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \Omega r(-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y})$ , de forma que

$$L = \frac{1}{2}\mu \left[ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 2\Omega r^2 \dot{\theta} + \Omega^2 r^2 \right] + \frac{GM\mu}{r} + \frac{Gm\mu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B|}. \quad (9.12)$$

Observe que o denominador do último termo da lagrangiana pode ser escrito como  $\sqrt{r^2 + r_B^2 - 2rr_B \cos \theta}$ .

Os momentos canônicos são  $p_r = \mu\dot{r}$  e  $p_\theta = \mu r^2(\dot{\theta} + \Omega)$  e a hamiltoniana fica

$$H = \left[ \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} - p_\theta \Omega - \frac{GM\mu}{r} \right] + \epsilon \frac{GM\mu}{\sqrt{r^2 + r_B^2 - 2rr_B \cos \theta}} \quad (9.13)$$

$$\equiv H_0 + \epsilon H_1$$

onde  $\epsilon \equiv m/M$  é o parâmetro perturbativo. A hamiltoniana  $H_0$  descreve a interação de  $C$  com  $A$  e é certamente integrável. As constantes de movimento são a energia e  $p_\theta$ . A interação entre  $C$  e  $B$ ,  $H_1$ , quebra a integrabilidade pois depende de  $\theta$ .

Note que  $H$  não corresponde à energia do sistema, pois fizemos uma transformação de coordenadas dependente do tempo. Para  $m = 0$ , por exemplo, a energia de  $\mu$  é dada por  $E = p_r^2/2\mu + p_\theta^2/2\mu r^2 + GM\mu/r$ , sem o termo  $p_\theta \Omega$  que aparece em  $H$ .

Para aplicar o teorema KAM a esse problema precisamos primeiramente escrever  $H_0$  em termos de suas variáveis de ação e ângulo. É fácil ver que

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = p_\theta.$$

A variável de ação  $I_r$  é dada por

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2\mu \left( E + \Omega I_\theta + \frac{GM\mu}{r} \right) - \frac{I_\theta^2}{r^2}} dr.$$

O cálculo é feito pelo método de resíduos no apêndice D e o resultado é

$$I_r = -I_\theta + \frac{GM\mu^2}{\sqrt{-2\mu(E + \Omega I_\theta)}}.$$

Resolvendo para  $E$  obtemos

$$H_0(I_r, I_\theta) = -\frac{G^2 M^2 \mu^3}{2(I_r + I_\theta)^2} - \Omega I_\theta. \quad (9.14)$$

As frequências do movimento não-perturbado são

$$\begin{aligned} \omega_{0\theta} &= -\Omega + \omega_C \\ \omega_{0r} &= \omega_C \end{aligned} \quad (9.15)$$

onde

$$\omega_C = \frac{G^2 M^2 \mu^3}{(I_r + I_\theta)^3} \quad (9.16)$$

é a frequência de Kepler de  $C$  em torno de  $A$  no sistema inercial. A razão entre as frequências é

$$\frac{\omega_{0\theta}}{\omega_{0r}} = 1 - \frac{\Omega}{\omega_C}. \quad (9.17)$$

### 9.5.2 Falhas no cinturão de asteróides

O cinturão de asteróides que existe entre as órbitas de Marte e Júpiter, a aproximadamente 3 UA (uma Unidade Astronômica é igual à distância entre a Terra e o Sol) é composta por corpos de tamanhos variados. A grande maioria tem menos de 10Km de extensão e apenas 26 tem mais de 200Km de diâmetro. Estima-se que a massa total dos asteróides seja menor do que a da Lua. O maior de todos os asteróides conhecidos é Ceres, com 974Km de diâmetro e  $1.76 \times 10^{20}$  Kg.

A órbitas dos asteróides é determinada em grande parte pelo Sol, enquanto Júpiter faz o papel de corpo perturbador. As massas envolvidas são:

Massa do Sol  $M = 1.99 \times 10^{30}$  Kg

Massa de Júpiter  $m = 1.90 \times 10^{27}$  Kg

Massa típica de um asteróide  $\mu = 10^{17}$  Kg

onde estimamos  $\mu$  como sendo um milésimo da massa de Ceres. O valor do parâmetro perturbativo  $\epsilon = m/M$  é da ordem de  $10^{-3}$ .

O astrônomo Daniel Kirkwood foi o primeiro a observar, em 1857, que a distribuição dos asteróides no cinturão apresentava falhas. Um histograma moderno é apresentado na figura 9.9. Kirkwood corretamente explicou que, nessas posições, o período das órbitas dos asteróides estaria em ressonância com Júpiter (a razão entre as frequências é indicada na figura). Como vimos, essas órbitas não estão restritas a se mover sobre toros de baixa dimensionalidade, e podem ser arrastadas para outras regiões até serem eventualmente atraídas para o Sol, Júpiter ou mesmo para fora do sistema solar. Veremos no próximo capítulo que parte das órbitas na região dos toros destruídos são caóticas.

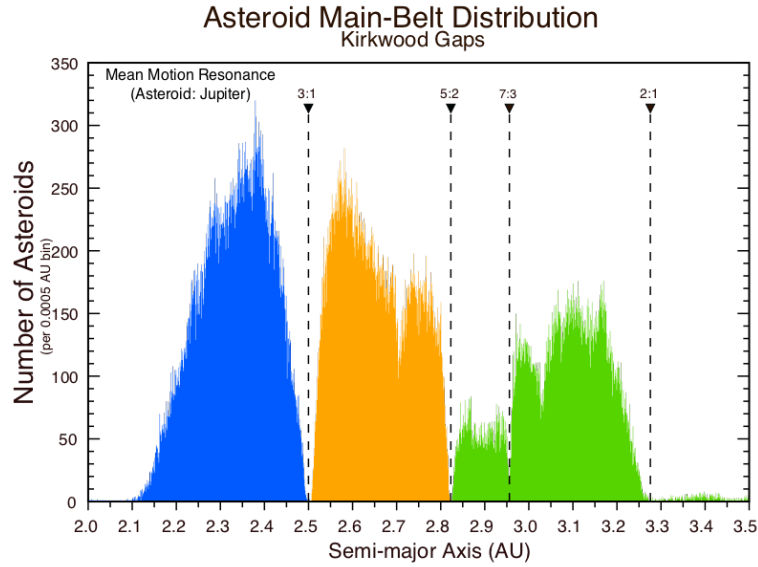


Figura 9.9: Histograma do número de asteróides em função da distância ao Sol em UA (Alan Chamberlin, 2007, JPL/Caltech).

Note que quanto mais simples é a razão das frequências, maior é a falha. Isso é consistente com o teorema KAM, que prevê intervalos da ordem de  $1/s^{2.5}$ . Quanto maior  $s$ , menor o intervalo de toros destruídos.

### 9.5.3 Falhas nos anéis de Saturno

Existem várias teorias sobre a origem dos anéis de Saturno. Uma delas, proposta por Edouard Roche no século 19, diz que eles se formaram devido à desintegração, devido aos efeitos de maré, de uma lua que orbitava nessa região. Uma variante dessa teoria diz que a lua foi atingida por um grande cometa e se despedaçou. Uma terceira hipótese é a de que as partículas dos anéis são restos da nuvem de poeira original que formou Saturno. Essa última hipótese parece não muito aceita, pois há indicações que os anéis sejam recentes.

A teoria de Roche é interessante do ponto de vista mecânico e vamos apresentá-la aqui rapidamente. A figura 9.10 mostra um planeta de massa  $M$  e um satélite de massa  $2m$  que dividimos ficticiamente em duas metades de raio  $a$ . As duas metades sentem forças gravitacionais diferentes, pois uma

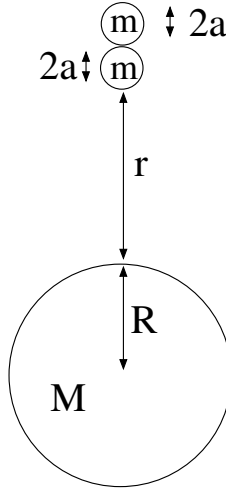


Figura 9.10: Forças de maré e atração gravitacional mútua sobre uma lua.

delas está ligeiramente mais afastada do planeta que a outra. Esse gradiente de atração provoca uma tensão repulsiva entre elas, chamada de efeito de maré. Por outro lado, as duas metades estão também conectadas pela atração gravitacional mútua. A desintegração acontece quando a repulsão da maré vence a atração entre as duas metades.

A força atrativa entre as duas metades é

$$F_{at} = \frac{Gm^2}{4a^2}.$$

A força de maré, por outro lado, pode ser estimada como:

$$\begin{aligned} F_{mare} &= \frac{GMm}{(R+r+a)^2} - \frac{GMm}{(R+r+3a)^2} \\ &= \frac{GMm}{(R+r+a)^2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2a}{R+r+a} \right)^{-2} \right] \\ &\approx \frac{4GMma}{(R+r+a)^3} \approx \frac{4GMma}{(r+R)^3}. \end{aligned}$$

Podemos comparar as forças assumindo que os corpos tenham densidades  $\rho_m$  e  $\rho_M$  respectivamente, de forma que  $M = 4\pi\rho_MR^3/3$  e  $m = 4\pi\rho_ma^3/3$ .

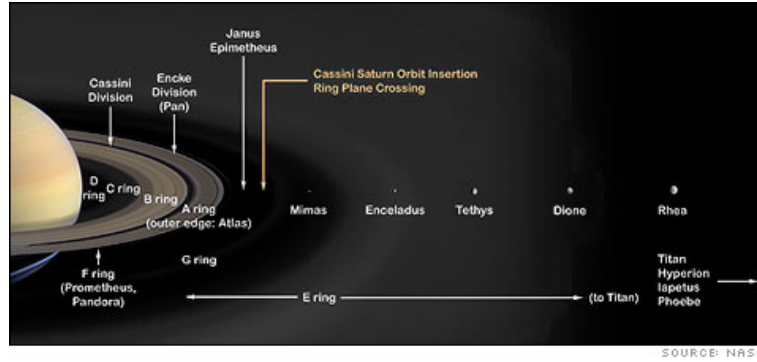


Figura 9.11: Anéis de Saturno em comparação com o planeta.(imagem: *Nasa/JPL*)

Para que  $F_{at}$  seja maior que  $F_{mare}$  chegamos à condição

$$r + R > (16\rho_M/\rho_m)^{1/3}R$$

que resulta em  $\approx 2.52R \approx 146.000$  Km se as densidades são iguais. Aqui usamos  $R \approx 58.200$ Km para o raio de Saturno. Essa estimativa simples, conhecida como Limite de Roche, parece bastante precisa. De fato, não há nenhum satélite de Saturno aquém desse limite. O satélite mais próximo, Janus, está a cerca de 151.000 Km, embora um pequeno satélite, Prometeus, tenha sido identificado à cerca de 139.000 Km de Saturno. Como sua densidade parece ser bem baixa (ele seria consituido de gelo poroso) seu limite de Roche seria ainda maior e esse cálculo simples não explica sua estabilidade.

Os anéis de Saturno também apresentam falhas, ou divisões, devido a presença de corpos perturbadores, que nesse caso são as luas Mimas, Tethys e Encelados, novamente verificando a instabilidade dos toros racionais. A figura 9.11 mostra um esquema das falhas. Chamando de  $\omega$  a freqüência das partículas nos anéis, as principais ressonâncias são:  $\omega = 3\omega_{mimas}$  entre os anéis C e B e  $\omega = 2\omega_{mimas}$ ,  $\omega = 3\omega_{encelados}$ ,  $\omega = 4\omega_{tethys}$  entre os anéis B e A, conhecido como divisor de Cassini.

## 9.6 Exercícios

1. Demonstre a expressão (9.1).

2. Calcule o zero da função  $f(x) = \cos(x)$  partindo da aproximação  $x_0 = 1.4$ . Faça o cálculo usando a equação (9.1) até ordem  $\epsilon^2$  e com o método de Newton, também até segunda ordem. Compare as aproximações com o resultado exato.
3. Expanda os números abaixo em frações contnuadas até terceira ordem e calcule o erro entre a aproximação racional e o número dado.
  - (a)  $\pi$
  - (b)  $\sqrt{2}$
  - (c)  $e$
4. Calcule os números cujas frações continuadas são dadas abaixo:

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 \dots}}}}$$

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{k + \frac{1}{1 + \frac{1}{k \dots}}}}$$

5. Mostre que todo número irracional tem uma fração continuada infinita.
6. Considere a sequência de Fibonacci  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  com  $F_1 = F_0 = 1$ . Resolva essa equação e calcule  $F_n$  explicitamente como função de  $n$ . Dica: suponha uma solução da forma  $F_n = A\lambda^n$ . Mostre que  $F_n/F_{n+1}$  converge para a razão dourada.
7. Considere o sistema integrável (veja o exercício 5.6)

$$H_0(I_1, I_2) = \alpha \frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2}.$$

Para uma energia fixa  $E$ , encontre o valor de  $I_1$  e  $I_2$  (i.e., encontre o toro) onde  $\rho \equiv \omega_1/\omega_2 = 1/\sqrt{2}$ . Considere agora uma perturbação da forma  $H = H_0 + \epsilon I_1 I_2$ . Obtenha  $I_1$  e  $I_2$  em função de  $\epsilon$  de tal forma que  $H = E$  e  $\rho = \rho_0$ .

8. Use o resultado do problema 13 do capítulo 1 e a equação (9.14) com  $\Omega = 0$  para mostrar que a frequência  $\omega_C$  na equação (9.16) é de fato a frequência de Kepler de  $\mu$  na presença de  $M$ .
9. Pontos de Lagrange  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . A lagrangiana (9.12) pode descrever o movimento de um satélite artificial no sistema Sol-Terra. Os pontos de Lagrange são posições especiais onde um satélite pode orbitar o Sol com o mesmo período da Terra, ficando estacionário em relação à ela. Encontre as equações de movimento de tal satélite supondo  $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$  e que  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , de forma que o satélite fique posicionado na linha que liga a Terra ao Sol. Mostre que as equações ficam

$$\Omega^2 r = \frac{GM}{r^2} \pm \frac{Gm}{(r - r_B)^2}$$

para  $\theta = 0$ . O sinal  $+$  se aplica quando o satélite quando ele está posicionado além da Terra e o  $-$  quando está entre a Terra e o Sol. Para  $\theta = \pi$  as equações deve ficar

$$\Omega^2 r = \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm}{(r + r_B)^2}.$$

Resolva essas equações usando os valores fictícios  $GM = 100$ ,  $Gm = 10$ ,  $r_B = 1$  e  $\Omega = 3$  com a ajuda de um computador. Mostre que as coordenadas dos pontos de Lagrange são:  $L_1 = (0.75, 0)$ ,  $L_2 = (2.42, 0)$  e  $L_3 = (-2.27, 0)$ .

10. Pontos de Lagrange  $L_4$  e  $L_5$ . As equações do problema anterior podem ser interpretadas como balanço entre as forças reais de atração gravitacional e a força centrífuga  $\mu\Omega^2 r$  da órbita circular no referencial girante. Para obter os pontos de Lagrange  $L_4$  e  $L_5$ , que não ficam na linha Terra-Sol, precisamos levar em conta que  $M$  e  $m$  giram em torno de seu centro de massa, e não em torno de  $M$  como aproximamos. Colocando o centro de massa na origem, a massa  $M$  na posição  $(-x_{cm}, 0)$  e a massa  $m$  em  $(x_m, 0)$  o balanço de forças fica

$$\Omega^2 r = \frac{GM}{(x + x_{cm})^2 + y^2} + \frac{Gm}{(x - x_m)^2 + y^2}$$

onde  $x_{cm} = mx_m/M$  e  $x_{cm} + x_m$  é a distância entre a Terra e o Sol. Mostre numericamente usando os mesmos valores do problema anterior



que essa equação tem cinco soluções reais, três delas correspondendo aos pontos  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  e duas fora da linha Terra-Sol,  $L_4 = (0.3, 2.2)$  e  $L_5 = (0.3, -2.2)$ .

11. Faça curvas de nível do potencial

$$V(x, y) = -\frac{\Omega^2(x^2 + y^2)}{2} - \frac{GM}{\sqrt{(x + x_{cm})^2 + y^2}} - \frac{Gm}{\sqrt{(x - x_m)^2 + y^2}}$$

e verifique que seus pontos de extremo correspondem às soluções do problema anterior e que apenas os pontos  $L_4$  e  $L_5$  são estáveis.



# Capítulo 10

## Caos Hamiltoniano

O teorema KAM não diz nada sobre o comportamento das trajetórias nas regiões próximas aos toros racionais, onde a teoria de perturbação não converge. A dinâmica nessas regiões é extremamente rica e complexa e será o assunto deste capítulo. Vamos inicialmente demonstrar o teorema de Poincaré-Birkhoff, que mostra a persistência de algumas órbitas periódicas onde haviam toros racionais. O teorema ainda afirma que metade dessas órbitas periódicas são instáveis. Veremos que isso leva ao aparecimento dos chamados *emaranhados homoclínicos* que, por sua vez, estão associados a movimentos caóticos. Esse capítulo está baseado nas referências [30, 21, 26].

### 10.1 O mapa de torção

A figura 8.2 mostra o comportamento típico de uma família de toros com energia  $E$  fixa, de um sistema integrável de dois graus de liberdade, interceptando uma seção de Poincaré arbitrária. As curvas geradas pela interceptação tem a topologia de círculos, mas podem ser bem complicadas. Órbitas sobre os toros aparecerão na seção de Poincaré como uma sequência de pontos sobre a curva correspondente.

Para facilitar a análise que faremos a seguir, construiremos uma transformação canônica simples que leva as variáveis originais  $q_1, q_2, p_1, p_2$  em novas variáveis  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$  de tal forma que os toros interceptem a seção de Poincaré  $Q_2 = 0$  em círculos perfeitos.

Em primeiro lugar supomos conhecida a transformação canônica que leva de  $q_1, q_2, p_1, p_2$  às variáveis de ângulo e ação  $\theta_1, \theta_2, I_1, I_2$ , de forma que a

hamiltoniana do sistema tem a forma  $H_0 = H_0(I_1, I_2)$ . Definimos então

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sqrt{2I_1} \sin \theta_1 & P_1 &= \sqrt{2I_1} \cos \theta_1 \\ Q_2 &= \sqrt{2I_2} \sin \theta_2 & P_2 &= \sqrt{2I_2} \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Considere agora a seção de Poincaré  $Q_2 = 0$  com  $P_2 > 0$  e  $H_0 = E$ . Trajetórias sobre a seção tem a variável ângulo  $\theta_2$  igual a  $0, 2\pi, 4\pi$ , etc. e variáveis de ação  $I_1, I_2$  satisfazendo  $H_0(I_1, I_2) = E$ . Das equações de Hamilton e da escolha inicial  $\theta_2(0) = 0$  obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{10} & \theta_1 &= \theta_{10} + \omega_1 t \\ I_2 &= I_{20} & \theta_2 &= \omega_2 t \end{aligned}$$

onde  $\omega_1 = \omega_1(I_1, I_2) = \partial H_0 / \partial I_1$ ,  $\omega_2 = \omega_2(I_1, I_2) = \partial H_0 / \partial I_2$  e  $H_0(I_{10}, I_{20}) = E$ . Em  $t = 0$  a trajetória está sobre a seção de Poincaré e retorna a ela em  $t = 2\pi/\omega_2 \equiv t_1$ . Assim temos:

$$\begin{aligned} Q_{11} &\equiv Q_1(t_1) = \sqrt{2I_{10}} \sin(\theta_{10} + 2\pi\omega_1/\omega_2) \\ &= Q_{10} \cos(2\pi\alpha) + P_{10} \sin(2\pi\alpha) \\ P_{11} &\equiv P_1(t_1) = \sqrt{2I_{10}} \cos(\theta_{10} + 2\pi\omega_1/\omega_2) \\ &= -Q_{10} \sin(2\pi\alpha) + P_{10} \cos(2\pi\alpha) \end{aligned}$$

onde  $\alpha = \omega_1/\omega_2$ , é conhecido como *número de rotação*. A transformação claramente corresponde a uma rotação pelo ângulo  $2\pi\alpha$ . Em forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} Q_{11} \\ P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & \sin(2\pi\alpha) \\ -\sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{10} \\ P_{10} \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

ou, em notação simplética

$$\eta_1 = P_0(\alpha)\eta_0. \quad (10.2)$$

As curvas invariantes de  $P_0$  são círculos com centro na origem.

O sub-escrito 0 em  $P_0(\alpha)$  indica que o mapa é para o Hamiltoniano integrável  $H_0$  e a dependência em  $\alpha$  enfatiza que o ângulo de rotação depende

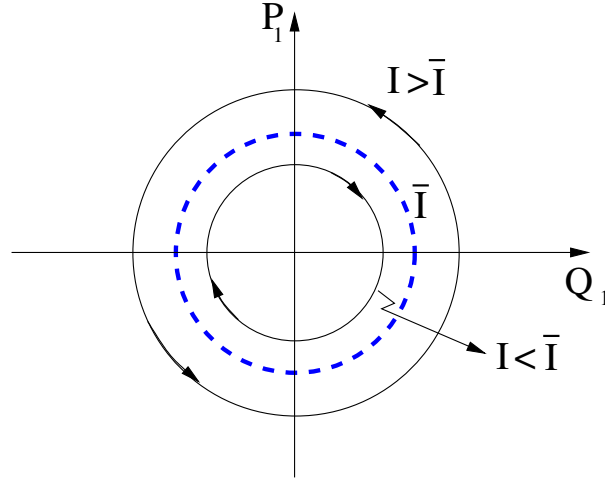


Figura 10.1: Mapa de torção  $T_0 = P_0^s$ . Pontos sobre  $\bar{I}$  são pontos fixos do mapa. Pontos sobre círculos externos à  $\bar{I}$  rodam no sentido anti-horário e pontos sobre círculos internos rodam no sentido horário, gerando uma torção no espaço de fases.

do toro inicial sobre a superfície de energia. Como a energia está fixa, podemos rotular os toros pela variável de ação  $I_1$ , pois  $I_2 = I_2(E, I_1)$  (veja a seção 8.2.1). Vamos supor que  $d\alpha/dI_1 \equiv \alpha' \neq 0$  e, por conveniência, que  $\alpha' > 0$ .

Iterando a equação (10.2) geramos os pontos sobre a seção de Poincaré correspondente à condição inicial  $\eta_0$ :

$$\eta_k = [P_0(\alpha)]^k \eta_0 = P_0(k\alpha) \eta_0. \quad (10.3)$$

O número de rotação  $\alpha$  varia continuamente com  $I_1$ . Considere então um toro  $I_1 = \bar{I}_1$  tal que  $\bar{\alpha} \equiv \alpha(\bar{I}_1) = r/s$  com  $r$  e  $s$  inteiros. Então, todo  $\theta_{10}$  sobre esse toro corresponde a uma órbita periódica que intercepta a seção de Poincaré em  $s$  pontos distintos. Isso é evidente, pois  $2\pi s\alpha = 2\pi r$  e, portanto,  $P(s\alpha) = 1$ . Fica claro também que os pontos rodam  $r$  vezes em torno da origem ao completarem a órbita. Todos os pontos do círculo de raio  $Q_1^2 + P_1^2 = 2\bar{I}_1$  são órbitas periódicas do mapa de Poincaré com período  $s$ . O período real, no espaço de fases, é  $\bar{\tau} = s(2\pi/\omega_2) = r(2\pi/\omega_1)$ .

A periodicidade  $s$  das órbitas do toro  $\bar{I}_1$  nos leva naturalmente a definir o **mapa de torção**  $T_0(\alpha) = P_0^s(\alpha) = P_0(s\alpha)$ . Sob a ação de  $T_0$ , todos os pontos sobre o toro  $\bar{I}_1$  são pontos fixos. A razão do nome ‘torção’ ficará clara em breve.

Considere agora um toro vizinho, com  $I_1 = \bar{I}_1 + \delta I_1$ , com  $\delta I_1 > 0$ . Como escolhemos  $\alpha' > 0$  vemos que  $\alpha(I_1) \approx \bar{\alpha} + \alpha' \delta I_1 > \bar{\alpha}$ . Após uma iteração de  $T_0$ , um ponto inicial  $\theta_{10}$  sobre esse toro vizinho terá posição angular

$$\begin{aligned}\theta_{1s} &= \theta_{10} + 2\pi(\bar{\alpha} + \alpha' \delta I_1) = \theta_{10} + 2\pi r + 2\pi \alpha' \delta I_1 \\ &= \theta_{10} + 2\pi \alpha' \delta I_1 > \theta_{10}.\end{aligned}$$

Assim, vemos que pontos sobre  $I_1 > \bar{I}_1$  não são pontos fixos de  $T_0$ , pois, a cada interceptação da seção de Poincaré, rodam um pouco mais do que seria necessário para completar  $r$  voltas em  $s$  passos. Sob a ação de  $T_0$  pontos sobre  $I_1 > \bar{I}_1$  rodam no sentido anti-horário.

Da mesma forma, pontos sobre  $I_1 < \bar{I}_1$  rodam no sentido horário. O resultado, ilustrado na figura 10.1 é uma torção no espaço de fases.

## 10.2 O teorema de Poincaré-Birkhoff

Suponha que o sistema integrável tratado na seção anterior seja perturbado, de forma que

$$H(I, \phi) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta) \quad (10.4)$$

onde  $(I, \phi) = (I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$  são variáveis de ação e ângulo para  $H_0$ . Denotaremos o mapa de Poincaré  $Q_2 = 0$  correspondente à  $H$  por  $P_\epsilon$ , de forma que  $P_0$  representa o mapa não perturbado que discutimos na seção anterior.

Não esperamos que os círculos permaneçam invariantes por  $P_\epsilon$ . No entanto, se  $\epsilon$  for suficientemente pequeno, esperamos que pontos ‘acima’ de  $\bar{I}_1$  ainda movam-se no sentido anti-horário pela ação de  $T_\epsilon = P_\epsilon^s$ , enquanto pontos ‘abaixo’ de  $\bar{I}_1$  movam-se no sentido horário, embora  $I_1$  não permaneça mais constante. Note que a rotação depende basicamente de  $\alpha'$ , que não é uma quantidade infinitesimal, enquanto que a variação de  $I$  é proporcional à  $\epsilon$ .

Vamos então observar a dinâmica de pontos iniciais com ângulo  $\theta_{10}$  fixo e valor de ação próximo à  $\bar{I}_1$ , como ilustrado na figura 10.2. Como abaixo de  $\bar{I}_1$  a rotação é para um lado e acima de  $\bar{I}_1$  a rotação é para outro lado, então, por continuidade, deve existir um ponto próximo de  $\bar{I}_1$  onde não há rotação alguma. Sob a ação de  $T_\epsilon$  esse ponto pode apenas mover-se radialmente. Encontrando esse ‘ponto que não roda’ para todo  $\theta_1$  geramos uma curva  $R_\epsilon$  dos pontos que não rodam. Claramente  $R_\epsilon$  tende ao círculo  $\bar{I}_1$  quando  $\epsilon$  vai a zero.

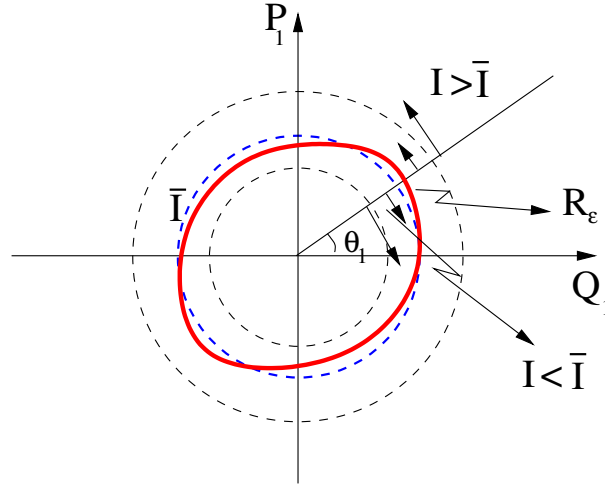


Figura 10.2: Mapa de torção  $T_\epsilon$  do sistema perturbado. Pontos externos à  $\bar{I}$  ainda rodam no sentido anti-horário e pontos internos no sentido horário. A curva  $R_\epsilon$  (linha grossa, em vermelho) contém os pontos que não rodam sob a ação de  $T_\epsilon$ , podendo apenas ter movimento radial.

Como observamos acima,  $R_\epsilon$  não é uma curva invariante pelo mapa  $T_\epsilon$ , pois seus pontos podem mover-se radialmente. Assim, aplicando  $T_\epsilon$  a cada ponto desta curva geramos uma nova curva, como ilustrado na figura 10.3. As setas indicam o sentido do movimento, sempre radial, pela ação do mapa.

Conforme mostramos na seção 5.7.2, mapas de Poincaré preservam áreas e, portanto, a área envolvida por  $R_\epsilon$  é a mesma envolvida por  $T_\epsilon(R_\epsilon)$ . Dessa forma, se parte dos pontos da curva expandem-se pela aplicação do mapa de torção, outros tem que se contrair, de forma a preservar a área inicial. O resultado é que:

- (i)  $R_\epsilon$  e  $T_\epsilon(R_\epsilon)$  devem tipicamente cruzar-se um número par de vezes.
- (ii) Os pontos de intersecção são pontos fixos de  $T_\epsilon(R_\epsilon)$ , pois não tem movimento de rotação nem movimento radial.
- (iii) Metade dos pontos fixos são instáveis ( $A_1$  e  $A_2$ ) e metade estáveis ( $B_1$  e  $B_2$ ). Esses pontos aparecem de forma alternada,  $A_1, B_1, A_2, B_2$ , etc.

Essa última propriedade pode ser demonstrada com o auxílio da própria

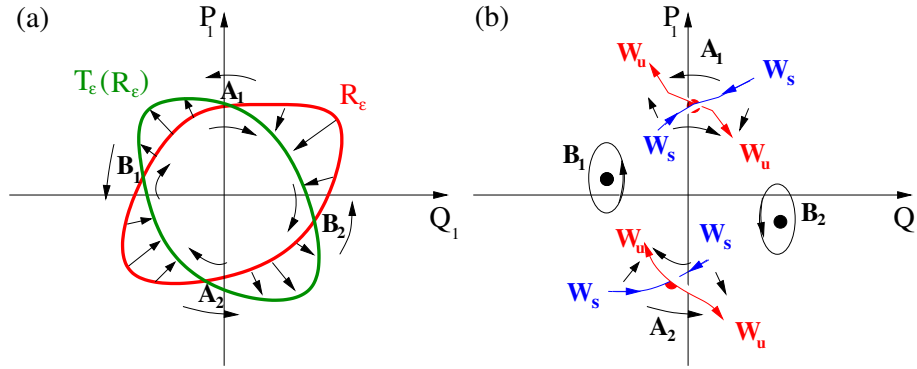


Figura 10.3: (a) Curvas  $R_\epsilon$  (vermelho) e  $T_\epsilon(R_\epsilon)$  (verde). Os pontos de intersecção são pontos fixos de  $T_\epsilon$ , sendo metade instáveis –  $A_1$  e  $A_2$  – e metade estáveis, –  $B_1$  e  $B_2$ . (b) Curvas invariantes nas vizinhanças dos pontos fixos estáveis e instáveis.

figura 10.3(a): na vizinhança dos pontos  $B_1$  e  $B_2$  o movimento de pontos sob a ação de  $T_\epsilon$  causa sua rotação em torno do ponto fixo, caracterizando um ponto estável. Compare com a figura 7.1(b). Da mesma forma, a dinâmica na vizinhança dos pontos  $A_1$  e  $A_2$  é característica de pontos fixos instáveis.

A figura 10.3(b) apresenta os mesmos pontos fixos novamente, apenas sem as curvas  $R_\epsilon$  e  $T_\epsilon(R_\epsilon)$  mas com algumas curvas invariantes nas vizinhanças dos pontos estáveis e com as variedades estáveis e instáveis (veja a seção 7.3), nas vizinhanças dos pontos instáveis.

O resultado dessa análise é conhecido como teorema de Poincaré-Birkhoff, e pode ser resumido da seguinte forma: a ação de uma perturbação genérica sobre um sistema integrável causa o desaparecimento de quase todas as (infinitas) órbitas periódicas ali existentes. Sobrevivem, no entanto, um número par dessas órbitas, sendo metade delas instáveis e metade estáveis.

Note que cada um dos pontos fixos de  $T_\epsilon$  é ponto fixo de período  $s$  do mapa de Poincaré  $P_\epsilon$ . Assim, se houver apenas uma órbita periódica estável e uma instável, aparecerão  $2s$  pontos fixos de  $T_\epsilon$ ,  $s$  para cada órbita. A figura 10.3 é apenas pictórica, compatível com  $s = 2$ .

Veja que o teorema KAM prevê a sobrevivência dos toros irracionais, mas não diz nada sobre os racionais. O teorema acima é o primeiro passo para entender o que acontece nessa região.



## 10.3 O emaranhado homoclínico

Quando definimos as curvas invariantes  $W_s$  e  $W_u$  no capítulo 7, apresentamos apenas exemplos simples onde  $W_s$  e  $W_u$  eram de fato a mesma curva: pontos que tentem assintoticamente para o ponto fixo quando propagados para frente no tempo, também tendem ao ponto fixo quando propagados para trás no tempo. Esse tipo de comportamento é característico apenas de sistemas integráveis, como os sistemas 1D que apresentamos com exemplo na seção 7.3. Vale a pena reescrever as definições aqui considerando o mapa  $T_\epsilon$ :

A **Variedade Estável**  $W_s$  de um ponto de equilíbrio instável  $\bar{\eta}$  é o conjunto invariante de pontos  $\eta$  do espaço de fases tal que a trajetória de  $\eta$  tende assintoticamente a esse ponto:

$$\eta \in W_s \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_\epsilon^n \eta = \bar{\eta}.$$

A **Variedade Instável**  $W_u$  de um ponto de equilíbrio instável é o conjunto invariante de pontos  $\eta$  do espaço de fases tal que a trajetória de  $\eta$ , quando propagada para trás no tempo, tende assintoticamente a esse ponto. Em outras palavras, são os pontos que, no passado, estavam arbitrariamente próximos do ponto de equilíbrio:

$$\eta \in W_u \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} T_\epsilon^n \eta = \bar{\eta}.$$

Tipicamente as curvas  $W_s$  e  $W_u$  são distintas, podendo cruzar-se apenas em pontos isolados ao invés de coincidirem em toda sua extensão. Para entendermos a dinâmica na vizinhança dos pontos fixos instáveis temos que estudar o comportamento dessas curvas. A figura 10.4 ilustra os elementos básicos numa seção de Poincaré próxima ao toro racional com  $s = 5$ . Por simplicidade vamos supor que  $r = 1$ . Vemos alguns toros irracionais vizinhos preservados pela perturbação e a estrutura de cinco pontos fixos estáveis e cinco instáveis no lugar do toro racional com  $\omega_1/\omega_2 = 1/5$ . As setas indicam a direção do fluxo pelo mapa  $T_\epsilon$ .

Cada um dos cinco pontos instáveis corresponde à mesma órbita periódica, que fura a seção 5 vezes antes de completar um período, o mesmo ocorrendo para os 5 pontos estáveis. Da mesma forma, as variedades  $W_s$  (ou  $W_u$ ) de cada um dos pontos instáveis são, de fato, a mesma variedade estável (ou instável). Se propagamos um pequeno trecho de  $W_s$  geramos uma fita que dá a volta no espaço de fases e intercepta a seção sobre um trecho um pouco menor (os pontos se aproximam todos do ponto fixo) de  $W_s$  do próximo ponto

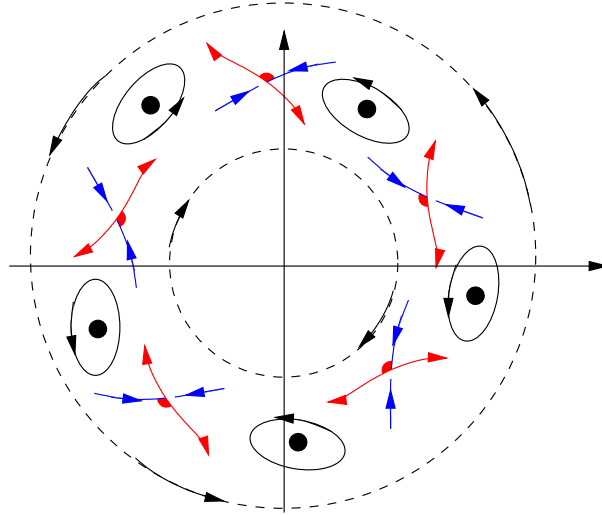


Figura 10.4: Curvas invariantes nas vizinhanças dos pontos fixos estáveis e instáveis para o caso  $s = 5$ .

estável da seção.

O cruzamento das variedades  $W_s$  e  $W_u$  em pontos isolados da seção de Poincaré tem consequências dramáticas para a dinâmica. Para entendermos como isso acontece, vamos mostrar primeiro que nem  $W_s$  nem  $W_u$  podem se auto-interceptar. De fato, suponha que  $W_s$  cruze consigo mesma como ilustrado na figura 10.5(a). Se  $x$  representa o ponto de intersecção e  $y$  e  $z$  representam pontos vizinhos, então, supondo que a dinâmica é contínua e suave: (i)  $T_\epsilon x$ ,  $T_\epsilon y$  e  $T_\epsilon z$  devem ser próximos uns dos outros e (ii) o arco de  $W_s$  entre  $y$  e  $z$  deve ser mapeado em outro arco contínuo ligando  $T_\epsilon y$  e  $T_\epsilon z$ . O leitor pode se convencer facilmente que essas duas condições não podem ser satisfeitas simultaneamente.

Vamos agora considerar o cruzamento da variedade estável  $W_s$  de um dado ponto fixo com a variedade instável  $W_u$  de outro ponto fixo vizinho correspondente à mesma órbita periódica, como ilustrado na figura 10.5(b). Essa figura pode ser simplificada se a re-desenharmos nas variáveis  $\bar{J}$  e  $\bar{\theta}$  introduzidas na seção 8.2.3. Nessas variáveis focalizamos apenas em um dos  $r$  pontos fixos estáveis que aparecem na seção de Poincaré. Como  $\bar{\theta}$  varia de  $+\pi$  à  $-\pi$ , os pontos fixos instáveis, que ficam em  $\bar{\theta} = \pm\pi$  representam o mesmo ponto. O espaço de fases  $\bar{J}$ - $\bar{\theta}$  tem a topologia de um cilindro, periódico em  $\bar{\theta}$  e extenso em  $\bar{J}$ . Sobre o cilindro vemos apenas um ponto fixo

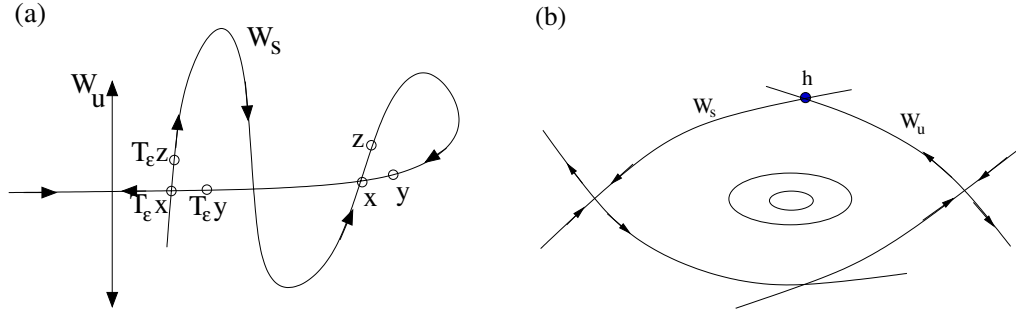


Figura 10.5: (a) Intersecção de  $W_s$  consigo mesma. (b) Intersecção de  $W_s$  com  $W_u$  no ponto homoclínico  $h$ .

estável e um instável, como ilustrado na figura 10.6.

Como as curvas  $W_s$  e  $W_u$  são invariantes, pontos sobre elas são sempre levados de volta a elas pela dinâmica. Como o ponto  $h$  pertence às duas curvas, ele deve ser levado em  $T_\epsilon h$  pertencente também à  $W_s$  e  $W_u$ . Isso mostra que a existência de um ponto homoclínico leva naturalmente à infinitos outros, dados pela órbita de  $h$ . Além disso, devido à propriedade de preservação de áreas nas seções de Poincaré, as regiões hachuradas na figura 10.6(a) tem todas a mesma área. A órbita de  $h$  é chamada de *órbita homoclínica* do ponto fixo, pois aproxima-se dele tanto para tempos futuros quanto para tempos passados.

A órbita de  $h$  vista sobre a variedade  $W_s$  aproxima-se indefinidamente do ponto fixo. Isso implica que a distância entre  $T_\epsilon^{n+1}h$  e  $T_\epsilon^n h$  vai tendendo a zero para  $n$  grande. Para manter a área em cada região hachurada constante, os *loops* hachurados devem ficar cada vez mais longos e retorcidos, pois não podem ocorrer auto-intersecções. A figura resultante é conhecida como emaranhado homoclínico. A figura 10.6(b) mostra o emaranhamento das variedades estável e instável (cores azul e vermelha) para o ponto fixo instável do mapa de Meyer (veja a seção 7.3).

Note que o ponto  $h$  ‘pula’ uma intersecção, de forma que existem genericamente duas órbitas homoclínicas, uma gerada por  $h$  e outra por  $p$  (figura 10.6(a)). Caso não houvesse o ‘pulo’ as áreas hachuradas seriam mapeadas alternadamente para fora e para dentro do loop homoclínico, o que não é compatível com o fluxo na vizinhança do ponto fixo  $f$ .

Voltando às variáveis originais  $J$  e  $\theta$ , uma visão esquemática do espaço de fases ficaria como na figura 10.7: órbitas elípticas circulando os pontos fixos

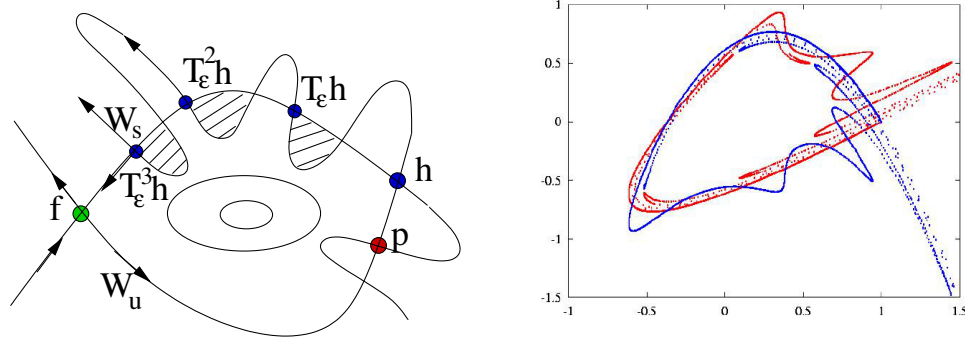


Figura 10.6: (a) Intersecção de  $W_s$  com  $W_u$  nas variáveis auxiliares  $\bar{J}$  e  $\bar{\theta}$ . As variedades são mostradas partindo do mesmo ponto fixo  $f$  (mostrado em verde) e cruzando no ponto homoclínico  $h$  (azul). Sucessivas evoluções temporais pelo mapa  $T_\epsilon$  são mostradas. Os pontos  $h$  e  $p$  (vermelho) estão sobre órbitas homoclínicas distintas. As áreas hachuradas são todas iguais. (b) Emaranhado homoclínico no mapa de Meyer (veja o problema 6 do capítulo 7).

estáveis e, nas vizinhanças dos pontos instáveis, o emaranhado homoclínico, representado por curvas azuis e vermelhas que cruzam-se infinitas vezes sem no entanto cruzarem-se entre si. Fica claro dessa figura que o movimento nas regiões vizinhas aos pontos instáveis é bastante complicado. Embora estejamos agora olhando apenas para órbitas sobre as curvas  $W_s$  e  $W_u$ , espera-se que uma órbita genérica nessa região também tenha comportamento bastante complexo. Mostraremos nas próximas seções que ele é de fato caótico.

## 10.4 Caos: o mapa de Ferradura de Smale

Para entender a complexidade do movimento nas vizinhanças dos pontos fixos instáveis que surgem devido à perturbação, considere uma pequena região  $D$  em torno de um desses pontos fixos, conforme mostrado em amarelo na figura 10.8(a). Vamos fazer uma série de considerações sobre as órbitas nessa região que nos levarão à idéia de caos. Primeiramente vemos que iterando os pontos dentro dessa região pelo mapa de Poincaré  $T_\epsilon$  ela tenderá a se esticar ao longo da variedade instável  $W_u$  enquanto se contrai na direção de  $W_s$ , sempre preservado a área inicial. Depois de um número suficientemente grande  $k$  de interações do mapa, essa região atingirá o ponto homoclínico  $h$ ,

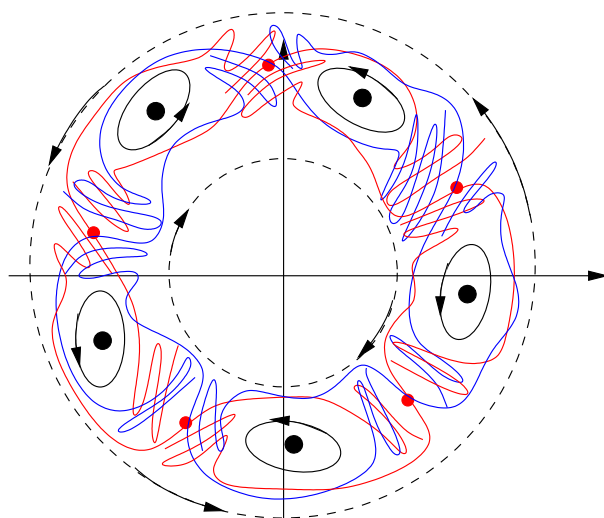


Figura 10.7: Visão esquemática do espaço de fases do sistema perturbado mostrando alguns dos toros irracionais que sobrevivem à perturbação e a região onde havia um toro racional. O toro é substituído por cadeias de *ilhas de estabilidade* em torno dos pontos fixos estáveis e pelo emaranhado homoclínico junto aos pontos instáveis.

como mostrado na cor laranja em 10.8(a). Da mesma forma, se propagarmos essa região inicial amarela para trás no tempo ela se esticará ao longo de  $W_s$  e depois de  $n$  passos também atingirá  $h$  (região azul na figura).

Dessa forma, tomando como região inicial diretamente a faixa em azul, vemos que depois de  $n + k$  iterações do mapa ela será levada à faixa laranja. Esse mapa da faixa azul à faixa laranja é mostrado de forma simplificada na figura 10.8(b). A característica mais significativa desse processo, conhecido como *Mapa de Ferradura*, é que dois conjuntos de pontos da faixa azul voltam sobre ela. Esses conjuntos são identificados pelas regiões de intersecção entre as faixas, ressaltados em vermelho.

Para simplificar a notação vamos chamar  $P \equiv T_\epsilon^{n+k}$ . Dessa forma,  $P$  leva a região azul na laranja diretamente. Note que a faixa azul é primeiramente contraída e depois esticada na direção contrária. A figura 10.9(a) mostra onde as regiões de intersecção vermelhas sobre a parte laranja encontravam-se na parte amarela, antes de ser esticada. A mesma figura mostra ainda onde essas duas regiões estavam sobre a faixa azul (duas finas faixas vermelhas). Isso tudo é simplificado e ampliado na figura 10.9(b): a região azul é levada na laranja de tal forma que suas duas sub-faixas escuras são levadas de volta à região azul nas sub-faixas vermelhas.

A conclusão dessa sequência de figuras é a seguinte: o mapa  $P$  é tal que cada região inicial contém duas sub-faixas horizontais que são levadas de volta à mesma região inicial na forma de duas sub-faixas verticais. O restante das órbitas vai terminar fora dessa região inicial.

Vamos agora nos fixar apenas nesses dois sub-conjuntos de pontos, marcados como faixas azul escuras horizontais, cujas órbitas retornam ao retângulo azul claro pela aplicação de  $P$ . Chamando o retângulo azul claro de  $A$ , as faixas de  $H_0$  e  $H_1$  e as faixas verticais vermelhas de  $V_0$  e  $V_1$  temos que

$$P(H_0) = V_0 \in A \quad e \quad P(H_1) = V_1 \in A.$$

Podemos então nos perguntar se alguns desses pontos ainda permanecem em  $A$  se aplicarmos o mapa duas vezes. Ora, parte das faixas  $V_0$  e  $V_1$  vermelhas caem exatamente sobre  $H_0$  e  $H_1$  e sabemos que tudo que está nessas regiões é mapeado de volta em  $A$ . Então, as regiões pintadas de amarelo na figura 10.10(a) correspondem aos pontos procurados. Na região original  $A$  eles aparecem com duas sub-regiões dentro de  $H_0$  e  $H_1$ , que denominamos  $H_{00}$ ,  $H_{01}$ ,  $H_{10}$  e  $H_{11}$ , e que satisfazem

$$P^2(H_{ij}) = V_{ij}.$$

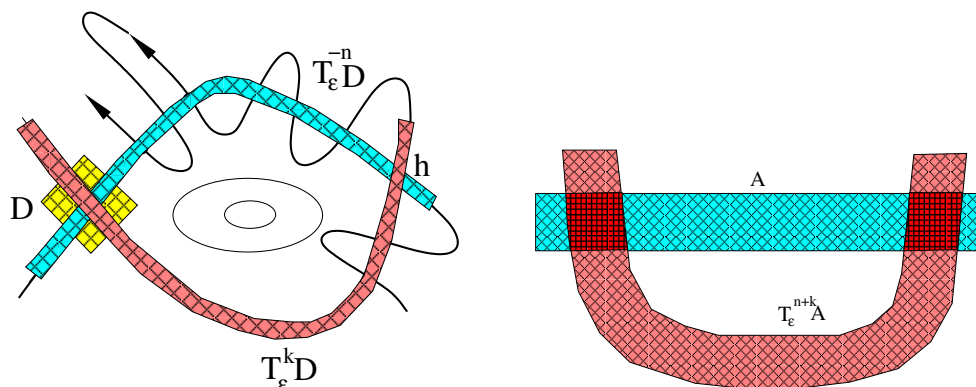


Figura 10.8: (a) Dinâmica na vizinhança dos pontos fixos: uma pequena região  $D$  é levada na região laranja contendo o ponto homoclínico  $h$  depois de um certo número  $k$  passos do mapa. Se mapeada para trás no tempo a região amarela vai na azul depois de  $n$  passos. (b) A região azul é levada na laranja depois de  $k + n$  passos do mapa, interceptando-a duas vezes.

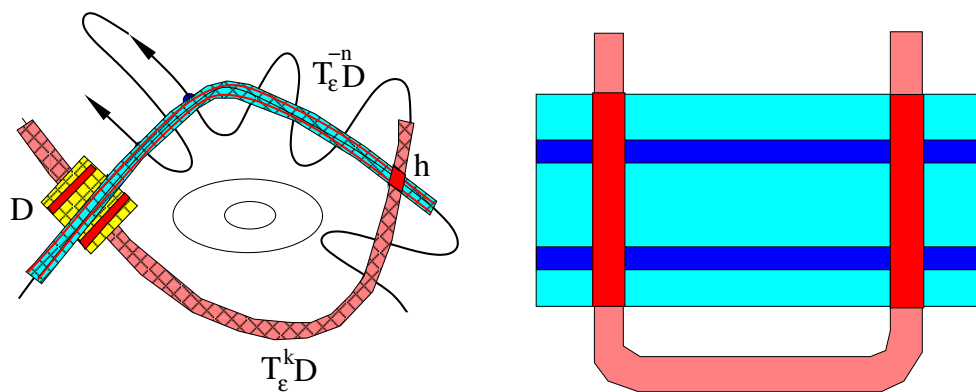


Figura 10.9: (a) Dinâmica na vizinhança dos pontos fixos: as duas regiões vermelhas da faixa laranja interceptam a azul (só uma é visível, pois a outra está debaixo da região amarela) são mostradas onde estavam originalmente no quadrado amarelo e também na faixa azul. (b) Simplificação da dinâmica: a região azul é levada na laranja de tal forma que suas duas sub-faixas escuras são levadas de volta à região azul nas sub-faixas vermelhas.

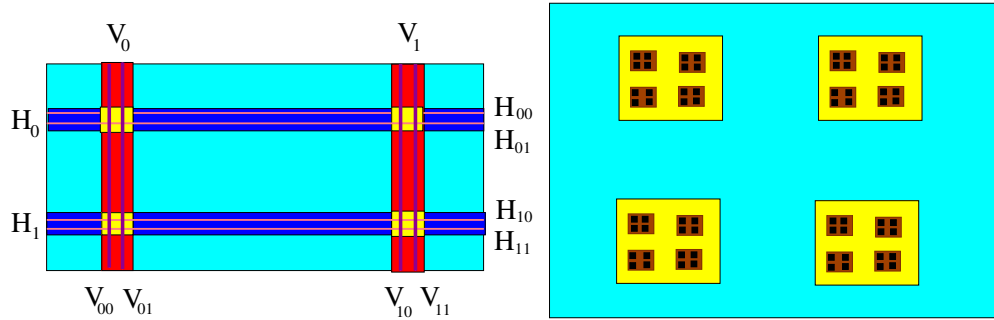


Figura 10.10: (a) Dinâmica simbólica onde faixas horizontais são levadas em faixas verticais. (b) Conjuntos que voltam à  $A$  se mapeados tanto para frente quanto para trás no tempo após: uma iteração (amarelo); duas iterações (marrom); três iterações (preto).

Da mesma forma as faixas  $V_{ij}$  interceptam  $H_0$  e  $H_1$  em 8 sub-conjuntos que correspondem às faixas horizontais do tipo  $H_{ijk}$  em  $A$ , duas delas dentro de cada uma das faixas  $H_{ij}$  e assim por diante. Os conjuntos  $H_{ijk}$  são levados em  $V_{ijk}$  por  $P^3$ .

A conclusão é: existem  $2^k$  subconjuntos de  $A$  que sempre retornam à  $A$  por até  $k$  aplicações do mapa  $P$ . Esses conjuntos são faixas horizontais rotulados por  $H_{i_1 i_2 \dots i_k}$  onde os  $i_n$  valem 0 ou 1. Da mesma forma, fazendo a dinâmica inversa, mapeando para trás no tempo, veremos que são os pontos sobre os conjuntos  $V_{i_1 i_2 \dots i_k}$  que são levados de volta à  $A$  pelas primeiras  $k$  iterações do mapa inverso. A intersecção desses dois conjuntos contém os pontos que permanecem em  $A$  se propagados para frente ou para trás por até  $k$  iterações. A figura 10.10(b) mostra esses conjuntos para  $k = 1$  (amarelo),  $k = 2$  (marrom) e  $k = 3$  (preto). No limite em que  $k$  vai a infinito obtemos o conjunto que nunca deixa a região inicial  $A$ . Esse conjunto  $\Lambda$  é fractal e forma um *conjunto de Cantor*. É esse fractal que é responsável pela dinâmica caótica. Vamos ver isso de duas maneiras.

**Sensibilidade às condições iniciais.** Em primeiro lugar considere duas condições iniciais escolhidas sobre a seção de Poincaré representada pela figura 10.10(b) de tal forma que uma delas está sobre o quadrado amarelo superior esquerdo, dentro do quadrado marrom superior esquerdo e também muito próxima da sub-região preta superior esquerda, mas fora dela. A segunda condição inicial, por outro lado está também dentro dessa sub-região



marrom e, além disso, dentro da região preta superior esquerda e dentro das próximas 37 sub-regiões que delimitam as zonas que retornam ao quadrado. Embora muito próximas, a trajetória da primeira condição inicial retornará ao quadrado azul apenas duas vezes consecutivas, enquanto que a segunda fará isso por 39 iterações do mapa. Temos então uma sensibilidade às condições iniciais promovida pela existência deste fractal no espaço de fases. Essa propriedade é uma das marcas registradas do movimento caótico.

**Dinâmica simbólica.** Considere agora o conjunto  $\Lambda$  dos pontos sobre o conjunto fractal que nunca deixam o quadrado. Um ponto  $x \in \Lambda$  deve necessariamente estar sobre uma das faixas horizontais  $H_0$  ou  $H_1$ , caso contrário não retornaria ao quadrado na próxima iteração do mapa. Vamos associar o número  $a_0$  igual a zero ou um se  $x \in H_0$  ou  $x \in H_1$  respectivamente. Considere agora  $P(x)$ , i.e., o próximo retorno do ponto  $x$  ao quadrado. Novamente,  $P(x)$  deve estar sobre  $H_0$  ou  $H_1$ , caso contrário  $P^2(x)$  não retornaria ao quadrado. Associamos o número  $a_1$  igual a zero ou um se  $P(x) \in H_0$  ou  $P(x) \in H_1$  respectivamente. Repetindo o processo geramos uma sequência de zeros e uns associada a  $x$  dada por  $a_0 a_1 a_2 \dots$  onde  $a_k = 0$  se  $P^k(x) \in H_0$  e  $a_k = 1$  se  $P^k(x) \in H_1$ . Da mesma forma  $x$  deve estar sobre  $V_0$  ou sobre  $V_1$  pois  $P^{-1}(x)$ , na iteração anterior, também estava no quadrado. Associamos então uma outra sequência  $b_0 b_1 b_2 \dots$  onde  $b_k = 0$  se  $P^{-k}(x) \in V_0$  e  $b_k = 1$  se  $P^{-k}(x) \in V_1$ . Colocando as duas sequências juntas podemos associar à  $x$  a sequência duplamente infinita

$$x \longrightarrow \dots b_3 b_2 b_1 b_0 . a_0 a_1 a_2 \dots$$

É fácil ver que a sequência associada à  $P(x)$  deve ser

$$P(x) \longrightarrow \dots b_3 b_2 b_1 b_0 a_0 . a_1 a_2 \dots$$

Isso fica claro quando notamos que  $P(x)$  está sobre a mesma órbita que  $x$ , portanto sua sequência futura deve ser a mesma. Por outro lado, como pontos sobre  $H_i$  são levados à  $V_i$ , se  $a_0 = 0$  ( $x$  estava em  $H_0$ ) agora o ponto está em  $V_0$  e o primeiro dígito da sequência à esquerda deve ser 0. O mesmo vale se  $a_0 = 1$ .

A dinâmica de pontos sobre  $\Lambda$  consiste simplesmente em deslocar o ponto na sequência de zeros e uns associada à órbita. Dessa forma temos as seguintes consequências:

(a) podemos pensar nas órbitas de  $\Lambda$  como sequências aleatórias de caras e coroas.

(b) duas órbitas onde os primeiros  $M$  coeficientes  $a$  sejam iguais e que difiram nos coeficientes seguintes tem órbitas semelhantes por  $M$  iterações do mapa  $P$ , mas depois separam-se uma da outra. Isso mostra que essas órbitas estão na mesma  $M$ -ésima sub-região do figura 10.10(b) e reflete a sensibilidade às condições iniciais.

(c) sequências periódicas correspondem a órbitas periódicas. Por exemplo, a órbita  $\dots abca.bca \dots$  tem período 3. Como os coeficientes são apenas 0 ou 1, existem aproximadamente  $2^N/N$  órbitas de período  $N$  em  $\Lambda$ .

(d) uma órbita do tipo  $\dots abca.bcxzytabcabc \dots$  é uma órbita homoclínica à órbita periódica  $\dots abca.bca \dots$ , pois aproxima-se dela no futuro e no passado. Podemos construir uma infinidade de órbitas homoclínicas variando o tamanho e os dígitos da parte central  $xyz$ .

Em resumo, o cruzamento das variedades  $W_s$  e  $W_u$  leva a uma riqueza de comportamentos que está longe de ser óbvia. Existem métodos para determinar se uma determinada perturbação provocará tal cruzamento, levando ao aparecimento de movimento caótico. Na verdade o conjunto de perturbações onde isso não ocorre é muito pequeno e caos é um fenômeno genérico em sistemas com mais de um grau de liberdade.

## 10.5 Exercícios

1. Mostre que o mapa de torção satisfaz  $P_0(\alpha)P_0(\beta) = P_0(\alpha + \beta)$ . Use essa relação para demonstrar que  $P_0^k(\alpha) = P_0(k\alpha)$ .
2. Considere o mapa padrão

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \phi_n \quad \phi_{n+1} = \phi_n + I_{n+1}. \quad (10.5)$$

Escreva o mapa nas coordenadas canônicas

$$Q = \sqrt{2I} \sin \phi \quad P = \sqrt{2I} \cos \phi$$

para  $K = 0$ . Mostre que o resultado é um mapa de torção com  $\alpha = I/2\pi$ .

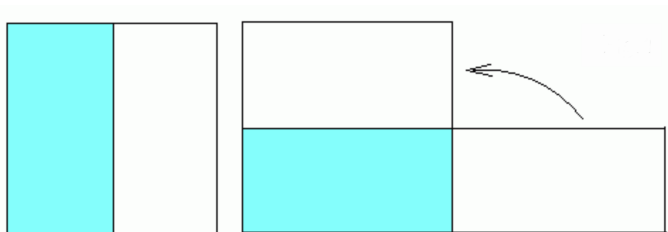


Figura 10.11: O mapa do padeiro: a *massa* é esticada, cortada ao meio e uma parte é colocada sobre a outra.

3. Uma versão conservativa do mapa da ferradura é dada pelo Mapa do Padeiro, que apresentamos na seção 7.4 e ilustramos na figura 10.11. O espaço de fases é o quadrado de lado unitário e a dinâmica consiste em achatar o quadrado na direção vertical e esticar na direção horizontal, mantendo a área constante. A parte com  $x > 1$  é então recortada e colocada sobre a outra. Matematicamente o mapa  $T$  é dado por:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n - [2x_n] \\ y_{n+1} &= (y_n + [2x_n]) / 2 \end{aligned} \tag{10.6}$$

onde  $[x]$  significa a parte inteira de  $x$ .

(a) Mostre que as coordenadas  $x$  e  $y$  de um ponto  $P$  qualquer sobre o quadrado podem ser escritas como  $x = 0.a_1a_2a_3\dots$  e  $y = 0.b_1b_2b_3\dots$  usando base 2, onde os  $a_i$  e  $b_i$  podem ser apenas 0's e 1's.

(b) Representando  $P$  pela sequência  $P = \dots b_3b_2b_2.a_1a_2a_3\dots$  mostre que  $T(P) = \dots b_3b_2b_2a_1.a_2a_3\dots$ , conhecido como *shift map*.

(c) Mostre que sequências periódicas correspondem à órbitas periódicas. Mostre que existem duas órbitas periódicas de período 3 e indique a posição aproximada dos pontos dessas órbitas sobre o quadrado.



# Capítulo 11

## Simetrias e Meios Contínuos

Neste capítulo vamos voltar ao tema das leis de conservação e sua associação com as simetrias. Formularemos inicialmente uma relação direta entre as simetrias da lagrangiana e suas respectivas grandezas conservadas sem alusão explícita às coordenadas cíclicas. Em seguida discutiremos brevemente o limite onde o número de graus de liberdade vai a infinito, passando da descrição de um sistema de partículas a um sistema de campos. Discutiremos também brevemente as leis de conservação nesse caso. A apresentação segue as referências [5, 18].

### 11.1 Simetrias e Leis de Conservação

A formulação lagrangiana da mecânica evidencia suas grandezas conservadas através das variáveis cíclicas, i.e., das variáveis que não aparecem explicitamente na lagrangiana. Assim, se um sistema é descrito por  $L(q, \dot{q}, t)$ , onde  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , e  $q_k$  não aparece, então

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

e o momento conjugado a  $q_k$ ,  $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$  é uma constante do movimento.

O fato de  $q_k$  não aparecer em  $L$ , por outro lado, implica uma simetria do sistema: se fizermos uma transformação onde todas as partículas são deslocadas na direção de  $q_k$  não devemos notar qualquer alteração no movimento. Como exemplo considere uma partícula movendo-se no plano sob a ação de

um potencial central:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r). \quad (11.1)$$

Como  $\theta$  é cíclica,  $p_\theta = mr^2 \dot{\theta} = m(xy - y\dot{x})$  é constante. Como  $\theta$  não aparece, a simetria do sistema é por rotações em torno do eixo  $z$ . Vamos mostrar essa simetria explicitamente. Definimos novas coordenadas por

$$\begin{cases} x' = x \cos \phi + y \sin \phi \\ y' = -x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \phi - y' \sin \phi \\ y = x' \sin \phi + y' \cos \phi \end{cases}. \quad (11.2)$$

É fácil verificar que  $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$  e  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2$ . Definindo coordenadas polares no sistema linha por  $x' = r' \cos \theta'$  e  $y' = r' \sin \theta'$  vemos que  $r' = r$ ,  $\theta' = \theta - \phi$  e

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}'^2 + r'^2 \dot{\theta}'^2) - V(r') \quad (11.3)$$

é de fato idêntica nos dois sistemas de coordenadas.

Apesar da simplicidade e de sua interpretação imediata, as grandezas conservadas só aparecem de forma explícita se escolhermos o sistema de coordenadas apropriado. Em coordenadas cartesianas  $x, y$  não há variáveis cíclicas e a conservação do momento angular está *escondida*. Vamos então mostrar o seguinte resultado que generaliza a regra relativa a coordenadas cíclicas:

**Proposição 1: Invariância por simetrias espaciais.** *Se a lagrangiana  $L(q, \dot{q})$  descrevendo um sistema autônomo é invariante pela transformação  $q \rightarrow Q(s) = h^s(q)$ , onde  $s$  é um parâmetro real e contínuo tal que  $h^0(q) = q$  é a identidade, então existe uma constante de movimento dada por*

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} [h_i^s(q)]_{s=0}. \quad (11.4)$$

*Expandindo  $h^s(q)$  em primeira ordem em  $s$ , ou seja, considerando a transformação como infinitesimal,*

$$Q_i(s) = q_i + sX_i(q) + \mathcal{O}(s^2) \quad (11.5)$$

obtemos a forma explícita

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} X_i(q). \quad (11.6)$$

**Prova:** Se  $q(t)$  é solução das equações de Lagrange, então, como  $L$  é invariante por  $h^s$ ,  $Q(s, t) = h^s(q(t))$  também é solução, pois  $q$  e  $Q(s)$  satisfazem às mesmas equações de movimento.

No nosso exemplo anterior, se  $x(t)$  e  $y(t)$  são soluções então  $x'(t)$  e  $y'(t)$  também satisfazem as equações de movimento para todo  $\phi$ . Isso fica evidente quando escrevemos  $x' = r' \cos \theta'$ ,  $y' = r' \sin \theta'$  e vemos que  $r' = r$  e  $\theta' = \theta - \phi$ . Portanto, se  $r(t)$  e  $\theta(t)$  são soluções, então  $r'(t) = r(t)$  e  $\theta'(t) = \theta(t) - \phi$  também são, pois as derivadas são iguais e as equações de movimento não dependem de  $\theta$ .

Isso implica que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(Q(s), \dot{Q}(s)) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(Q(s), \dot{Q}(s)). \quad (11.7)$$

Por outro lado, devido à invariância de  $L$  pela transformação  $h^s$  vemos que  $dL/ds = 0$  (no nosso exemplo,  $L$  não depende de  $\phi$ ). Explicitamente temos

$$\frac{dL}{ds} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}(Q(s), \dot{Q}(s)) \frac{\partial Q_i(s)}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(Q(s), \dot{Q}(s)) \frac{\partial \dot{Q}_i(s)}{\partial s} = 0. \quad (11.8)$$

Multiplicando (11.7) por  $\partial Q_i(s)/\partial s$  e somando sobre  $i$  obtemos

$$\sum_i \frac{\partial Q_i(s)}{\partial s} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i(s)}{\partial s} = - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i(s)}{\partial s} \quad (11.9)$$

onde usamos (11.8) na última passagem. Como

$$\frac{\partial \dot{Q}_i(s)}{\partial s} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Q_i(s)}{\partial s} \right) \quad (11.10)$$

vemos que aparece uma derivada total no tempo quando passamos todos os termos para o lado esquerdo:

$$\sum_i \left[ \frac{\partial Q_i(s)}{\partial s} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Q_i(s)}{\partial s} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_i(s)}{\partial s} \right] = 0. \quad (11.11)$$

O termo entre colchetes é, portanto, uma constante de movimento. Essa constante aparece para qualquer valor de  $s$ . No entanto, é mais prático usá-la diretamente para  $s = 0$ . Nesse caso a derivada de  $L$  no primeiro termo pode ser calculada na solução original (pois  $Q_i(s = 0, t) = q_i(t)$ ) e basta conhecer a transformação infinitesimal  $Q_i(s) = q_i + sX_i(q)$ .

**Exemplo 12.1.1** Suponha que o sistema seja invariante por translações ao longo do eixo  $x$ . A transformação correspondente é

$$\bar{\mathbf{r}}_i(s) = h_i^s(\mathbf{r}_i) = \mathbf{r}_i + s\hat{e}_x \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(o índice  $i$  se refere às partículas, não aos graus de liberdade, que são  $3n$  nesse caso) e

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_i(s)}{\partial s} = \hat{e}_x.$$

A função  $\vec{X}_i = (X_{ix}, X_{iy}, X_{iz})$  que descreve a transformação infinitesimal fica  $\vec{X}_i = (1, 0, 0) = \hat{e}_x$  e a constante de movimento é o momento linear do sistema na direção  $x$ :

$$I = \sum_{i=1}^n (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \hat{e}_x = \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i = P_x.$$

**Exemplo 12.1.2** Se o sistema for invariante por rotações em torno do eixo  $z$  a transformação é

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(s) &= x_i \cos s + y_i \sin s \approx x_i + sy_i \\ \bar{y}_i(s) &= -x_i \sin s + y_i \cos s \approx y_i - sx_i \\ \bar{z}_i(s) &= z_i. \end{aligned}$$

A função  $\vec{X}_i$  nesse caso fica

$$\vec{X}_i = (y_i, -x_i, 0) = \mathbf{r}_i \times \hat{e}_z$$



e a constante de movimento nesse caso é o momento angular total na direção  $z$ :

$$I = \sum_{i=1}^n (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot (\mathbf{r}_i \times \hat{e}_z) = \hat{e}_z \cdot \sum_{i=1}^n (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{r}_i) = -L_z.$$

Fica como exercício refazer o cálculo em um valor de  $s$  arbitrário. Lembre que nesse caso as derivadas  $\partial L / \partial \dot{q}_i$  devem ser também calculadas na solução  $Q(s, t)$  e não em  $q(t)$ .

Além das simetrias por transformações de coordenadas, vimos que a energia se conserva se a lagrangiana não depender do tempo. Vamos então enunciar a

**Proposição 2: Invariância por translação temporal.** *Se a lagrangiana  $L(q, \dot{q})$  não depende explicitamente do tempo, então a função*

$$h(q, \dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L,$$

*chamada de energia do sistema, é conservada.*

A demonstração está na seção 3.5.2 e o resultado pode ser interpretado como um caso particular da proposição 1 onde o tempo é a variável cíclica e a energia é seu momento conjugado. Esses dois resultados podem ser unificados em uma única proposição que é similar ao teorema de Noether que discutiremos em seguida:

**Proposição 3. Invariância por transformações espaço-temporais.** *Se a lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  é invariante pela transformação infinitesimal*

$$Q_i(s) = q_i + sX_i(q, t) \quad (11.12)$$

$$T(s) = t + sY(q, t) \quad (11.13)$$

*então*

$$I(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i X_i(q, t) - Y(q, t) h(q, \dot{q}, t) \quad (11.14)$$

*onde  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  e  $h = p_i \dot{q}_i - L$ , é conservada.*

Veja que se  $Y = 0$  recaímos na proposição 1, enquanto que se  $X_i = 0$  e  $Y = \text{constante}$  recuperamos a proposição 2. No entanto, se  $L$  só é invariante pelas transformações simultâneas das coordenadas e do tempo, então a

grandeza conservada é essa dada acima.

**Prova:** Sejam

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (11.15)$$

e

$$\bar{S} = \int_{T_1}^{T_2} L(Q, dQ/dT, T) dT \quad (11.16)$$

as ações correspondentes, calculadas ao longo de uma solução das equações de movimento. Vamos impor que  $\delta S \equiv \bar{S} - S = 0$ , já que  $S$  é um extremo quando calculada sobre  $q(t)$  e  $Q(t)$  pode ser considerada uma trajetória vizinha que difere apenas infinitesimalmente de  $q$ . De acordo com a transformação vemos que

$$dT = (1 + s\dot{Y})dt \quad (11.17)$$

$$\frac{dQ_i}{dT} = \frac{dQ_i}{dt} \frac{dt}{dT} = \dot{Q}_i(1 - s\dot{Y}) \quad (11.18)$$

onde o ponto significa derivada em relação à  $t$ . Dessa forma podemos escrever

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(Q, \dot{Q}(1 - s\dot{Y}), t + sY)(1 + s\dot{Y})dt \quad (11.19)$$

e, expandindo  $\bar{S}$  em primeira ordem em torno de  $s = 0$  obtemos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( L + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right) (1 + s\dot{Y})dt - \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (11.20)$$

onde estamos usando a convenção de soma sobre índices repetidos. Como

$$\begin{aligned} \delta q_i &= Q_i - q_i = sX_i \\ \delta \dot{q}_i &= \dot{Q}_i(1 - s\dot{Y}) - \dot{q}_i = \dot{Q}_i - \dot{q}_i - s\dot{Q}_i\dot{Y} = s(\dot{X}_i - \dot{q}_i\dot{Y}) \\ \delta t &= sY \end{aligned} \quad (11.21)$$

obtemos

$$\delta S = s \int_{t_1}^{t_2} \left( \dot{Y}L + \frac{\partial L}{\partial q_i} X_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{X}_i - \dot{q}_i\dot{Y}) + \frac{\partial L}{\partial t} Y \right) dt. \quad (11.22)$$

Para completar a demonstração usamos as equações de Lagrange no segundo termo para escrever

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} X_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{X}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) X_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{X}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} X_i \right)$$

e (veja a seção 3.5.2), como

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

vemos que

$$\dot{Y} L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \dot{Y} + Y \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( Y \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \right).$$

Com isso a expressão para  $\delta S$  fica

$$\delta S = s \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (X_i p_i - Y h) dt \equiv 0. \quad (11.23)$$

Dessa forma o valor da função  $\sum_i X_i p_i - Y h$  em  $t = t_2$  deve ser igual ao seu valor inicial em  $t_1$  para todo  $t_2$ , o que demonstra o teorema.

**Exemplo 12.1.3** Considere a lagrangiana (veja seção 4.3)

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} (v_0 t - x)^2.$$

É fácil ver que  $L$  é invariante pelas transformações

$$x' = x + s \quad t' = t + s/v_0$$

o que implica  $X = 1$  e  $Y = 1/v_0$ . A grandeza conservada nesse caso é  $I = m\dot{x} - h(x, \dot{x}, t)/v_0$ , ou

$$-v_0 I = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2} (v_0 t - x)^2 - mv_0 \dot{x}.$$

Fica como exercício ao leitor mostrar que a função do lado direito coincide com a hamiltoniana  $H'(y, p_y)$  construída na seção 4.3. Para isso basta notar que  $y = v_0 t - x$  e  $p_y = -m\dot{x}$ .

## 11.2 Meios contínuos e campos

O exemplo mais ilustrativo da passagem de um sistema de partículas para um campo é dado pelo limite em que uma cadeia de osciladores lineares se transforma em uma barra elástica. Considere então uma cadeia linear de massas  $m$  idênticas ligadas por molas também idênticas com constante elástica  $k$ . Seja  $a$  a distância de equilíbrio entre as massas (figura 11.1 - parte superior). A hipótese de massas e molas idênticas não é fundamental, mas facilita a descrição do sistema. Quando as massas são deslocadas de sua posição de equilíbrio o sistema começa a oscilar. Vamos medir o deslocamento da  $i$ -ésima partícula de sua posição de equilíbrio pela variável  $\eta_i$  (parte inferior da figura). Como a energia potencial armazenada em cada mola é proporcional à sua compressão ou expansão total, a lagrangiana do sistema é dada por

$$\begin{aligned} L &= \sum_i \frac{m}{2} \dot{\eta}_i^2 - \frac{k}{2} (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \\ &= \sum_i a \left[ \frac{m}{2a} \dot{\eta}_i^2 - \frac{ka}{2} \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] \equiv \sum_i a L_i. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Note que a lagrangiana é independente do *parâmetro de rede*  $a$ , que é introduzido apenas por conveniência. As equações de movimento ficam

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - ka \left[ \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} - \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} \right] = 0. \quad (11.25)$$

Podemos agora apreciar a introdução de  $a$  nas equações: no limite em que  $a \rightarrow 0$  a cadeia se transforma em uma barra elástica contínua e  $m/a \rightarrow \mu$  que é a densidade linear de massa. Nesse limite as pequenas molas devem ficar cada vez mais duras, pois as partículas não podem se mover em grandes distâncias. A constante da mola vezes o espaçamento da rede tende ao chamado Módulo de Young:  $ka \rightarrow Y$ . O deslocamento da  $i$ -ésima partícula se transforma na deformação sofrida pela barra no ponto  $x$  no instante  $t$ :  $\eta_i(t) \rightarrow \eta(x, t)$ . Finalmente o termo entre colchetes torna-se a derivada segunda de  $\eta(x, t)$  em relação a  $x$ . De fato,  $(\eta_{i+1} - \eta_i)/a$  é a derivada primeira no ponto  $i+1$  e  $(\eta_i - \eta_{i-1})/a$  é a derivada no ponto  $i$ . A diferença entre esses dois termos dividida por  $a$  é portanto a derivada segunda.

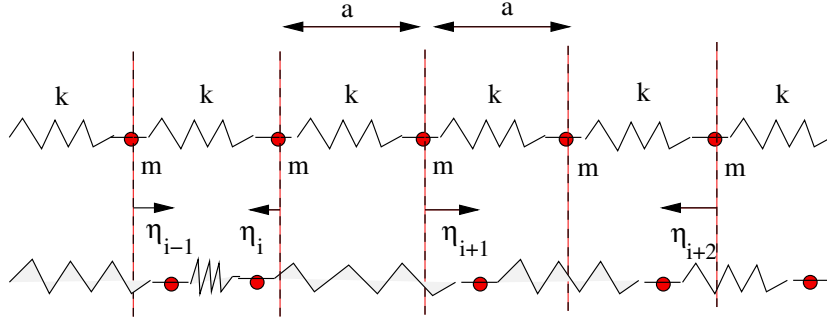


Figura 11.1: Cadeia linear de osciladores em equilíbrio (figura de cima) e fora do equilíbrio mostrando os deslocamentos de cada partícula (figura de baixo).

No limite do contínuo podemos então substituir a lagrangiana por

$$L = \int \mathcal{L} dx \quad (11.26)$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{\eta}^2 - \frac{Y}{2} \eta'^2 \quad (11.27)$$

é a *densidade lagrangiana*,  $\dot{\eta} = \partial\eta/\partial t$  e  $\eta' = \partial\eta/\partial x$ . As e as equações de movimento ficam

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (11.28)$$

que é uma equação de onda onde a *velocidade do som* (velocidade de propagação de pulsos) é  $v = \sqrt{Y/\mu}$ .

## 11.3 Generalização para campos em 1-D

A lagrangiana de um sistema de partículas depende genericamente das posições e das velocidades das partículas, além de poder depender explicitamente do tempo. Quando descrevemos um campo, como o campo de deformações da barra elástica, a lagrangiana é dada pela integral de uma densidade lagrangiana, que pode depender genericamente do campo  $\eta$ , de sua derivada temporal  $\dot{\eta}$ , de sua derivada espacial  $\eta'$  e também das coordenadas  $x$  e do tempo  $t$ :  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}, \eta', x, t)$ .

Para encontrar as equações de movimento do campo podemos aplicar o princípio variacional de Hamilton. Buscamos soluções  $\eta(x, t)$  onde o valor do campo é fixo em dois extremos,  $\eta(x_1, t) = \eta_1$  e  $\eta(x_2, t) = \eta_2$  e onde as configurações iniciais e finais também estão fixas, i.e.,  $\eta(x, t_1)$  e  $\eta(x, t_2)$  são funções conhecidas. O princípio variacional fica

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int_1^2 \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}, \eta', x, t) dx dt \\ &= \int_1^2 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \delta \dot{\eta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'} \delta \eta' \right] dx dt \\ &= \int_1^2 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'} \right) \right] \delta \eta dx dt + \int dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \delta \eta \Big|_{t_1}^{t_2} + \int dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'} \delta \eta \Big|_{x_1}^{x_2}\end{aligned}$$

onde fizemos duas integrações por partes na última passagem (em relação a  $t$  no segundo termo de  $S$  e em relação a  $x$  no terceiro termo). Ambos os termos de superfície gerados são nulos devido às condição de contorno. Impondo então que  $\delta S = 0$  somos levados à equação

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0. \quad (11.29)$$

**Exemplo 12.3.1** Considere um campo  $\eta(x, t)$  descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{c^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \hbar^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - m^2 c^4 \eta^2.$$

O campo satisfaz a equação de movimento  $\ddot{\eta} = c^2 \eta'' - m^2 c^4 / \hbar^2 \eta$ , que é conhecida como equação de Klein-Gordon. Podemos resolver essa equação buscando os modos normais do campo. Escrevendo  $\eta(x, t) = \eta_0 \exp i(Et + px) / \hbar$  vemos que os parâmetros  $E$  e  $p$  não podem ser independentes, mas devem satisfazer a relação relativística  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ . Esse tipo de lagrangiana é chamada de lagrangiana livre, pois não há interação do campo com elementos externos. O último termo, quadrático no campo, é chamado de termo de massa. Essa equação descreve uma partícula relativística de spin zero.

**Nota sobre o cálculo de derivadas.** Como o campo  $\eta$  depende agora de  $x$  e de  $t$ , as derivadas totais e parciais podem gerar alguma confusão. Em primeiro lugar notamos que  $x$  e  $t$  são variáveis independentes: não existe

$\partial x/\partial t$ . Então, para o campo  $\eta(x, t)$ ,  $d\eta/dx$  é o mesmo que  $\partial\eta/\partial x$ , o mesmo valendo para o tempo,  $d\eta/dt = \partial\eta/\partial t$ . A densidade lagrangiana, por outro lado, pode depender de  $\eta$ ,  $\dot{\eta}$ ,  $\eta'$ ,  $x$  e  $t$  e portanto

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \neq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \quad e \quad \frac{d\mathcal{L}}{dx} \neq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}.$$

De fato,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}\dot{\eta} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}}\ddot{\eta} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta'}\dot{\eta}' + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}.$$

## 11.4 Múltiplos campos em 3-D

Quando temos vários campos  $\eta_i$  em três dimensões é conveniente definir

$$x_0 = t \quad x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad (11.30)$$

e denotarmos uma coordenada espacial ou o tempo por  $x_\nu$ . As derivadas serão denotadas por

$$\frac{d\eta_i}{dx_\nu} = \eta_{i,\nu}. \quad (11.31)$$

Note que, apesar de sua semelhança com a notação relativística, nosso tratamento aqui é clássico (não-relativístico). No caso relativístico é usual definir  $x_0 = ct$  e a lagrangiana deve ser sempre invariante por transformações de Lorentz. Não faremos esse tratamento aqui.

Podemos então escrever a lagrangiana de forma compacta como

$$\mathcal{L}(\eta_i, \eta_{i,\nu}, x_\nu) \quad (11.32)$$

e as equações de movimento ficam

$$\frac{d}{dx_\nu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{i,\nu}} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i} = 0 \quad (11.33)$$

onde a soma sobre  $\nu$  está implícita.

## 11.5 Correntes conservadas

No caso de um sistema de partículas vimos que se a lagrangiana não depender explicitamente do tempo, então a energia se conserva. No caso de campos a

mesma coisa acontece. No entanto, como estaremos trabalhando com uma densidade lagrangiana, esperamos encontrar leis de conservação locais. Por exemplo, a densidade de energia não deve ser constante em todos os pontos, mas deve fluir de tal forma a satisfazer uma equação de continuidade: se não houver fontes externas a variação de energia em um ponto deve se dar apenas em função do fluxo de energia para pontos vizinhos, sem que haja criação ou perda global de energia.

Em vez de derivar  $L$  em função do tempo como fizemos na seção 3.5.2, vamos derivar a densidade lagrangiana em função de  $x_\mu$  onde o índice  $\mu$  pode ser qualquer componente de 0 a 3:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i}\eta_{i,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{i,\nu}}\eta_{i,\nu\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{d}{dx_\nu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{i,\nu}} \right) \eta_{i,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{i,\nu}}\eta_{i,\nu\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{d}{dx_\nu} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{i,\nu}}\eta_{i,\mu} \right] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \end{aligned} \quad (11.34)$$

ou ainda

$$\frac{d}{dx_\nu} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{i,\nu}}\eta_{i,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu,\nu} \right] = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \quad (11.35)$$

onde  $\mu$  é fixo e  $\nu$  e  $i$  são somados. Definindo o tensor de energia-tensão

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{i,\nu}}\eta_{i,\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu,\nu} \quad (11.36)$$

vemos que, se  $\mathcal{L}$  não depende explicitamente de  $x_\mu$ , então

$$\frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = 0. \quad (11.37)$$

Note que essa equação pode valer para  $\mu = 0$  e  $\mu = 1$ , por exemplo, e não para  $\mu = 2$  ou  $\mu = 3$ , caso a lagrangiana não dependa de  $x$  e  $t$  mas dependa de  $y$  e  $z$ .

Para entender o significado dessas equações de conservação vamos olhar a equação relativa a  $\mu = 0$ . Nesse caso temos

$$T_{00} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i - \mathcal{L} \quad (11.38)$$



que é a densidade de energia dos campos. Definindo ainda o vetor 3-D

$$T_0 = (T_{01}, T_{02}, T_{03}) \quad (11.39)$$

a equação para  $\mu = 0$  torna-se uma equação de continuidade para a densidade de energia:

$$\frac{dT_{00}}{dt} + \nabla \cdot T_0 = 0. \quad (11.40)$$

O vetor  $T_0$  é interpretado como o fluxo de densidade de energia. i.e.,  $T_{0i}$  é a energia por unidade de volume que atravessa uma área unitária perpendicular à direção  $x_i$  por unidade de tempo.

Analogamente, definindo os vetores 3-D como

$$T_\mu = (T_{\mu 1}, T_{\mu 2}, T_{\mu 3}) \quad (11.41)$$

podemos escrever todas as 4 equações de conservação como equações de continuidade na forma

$$\frac{dT_{\mu 0}}{dt} + \nabla \cdot T_\mu = 0. \quad (11.42)$$

Assim como a componente 0 corresponde à conservação de energia, as outras componentes correspondem à conservação do momento em cada direção espacial. Veja o livro do Goldstein para uma aplicação à barra elástica.

## 11.6 O teorema de Noether

O teorema de Noether é uma generalização do resultado anterior dado pela equação (11.37). Em teoria de campos ocorre muitas vezes que uma transformação de coordenadas  $x_\mu \rightarrow x'_\mu$  induz uma transformação nos próprios campos,  $\eta_i \rightarrow \eta'_i$ . Nesses casos a invariância do sistema requer que tanto coordenadas quanto campos sejam modificados simultaneamente. Um exemplo são os campos eletromagnéticos sob transformações de Lorenz.

Vamos então considerar transformações infinitesimais da forma

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \equiv x_\mu + \epsilon_r X_{r\mu} \quad (11.43)$$

$$\eta_i(x_\mu) \rightarrow \eta'_i(x'_\mu) = \eta_i(x_\mu) + \delta \eta_i(x_\mu) \equiv \eta_i(x_\mu) + \epsilon_r \Psi_{ri}.$$

Vamos definir também a variação  $\bar{\delta}$  através da relação

$$\eta'_i(x_\mu) = \eta_i(x_\mu) + \bar{\delta} \eta_i(x_\mu) \quad (11.44)$$

onde o campo com linha é calculado nas variáveis originais, sem linha. Finalmente, a densidade lagrangiana se transforma como

$$\mathcal{L}(\eta_i(x_\mu), \eta_{i,\nu}(x_\mu), x_\mu) \rightarrow \mathcal{L}'(\eta'_i(x'_\mu), \eta'_{i,\nu}(x'_\mu), x'_\mu). \quad (11.45)$$

Vamos demonstrar a existência de grandezas conservadas se a transformação satisfizer as seguintes relações:

1 - Invariância de forma - a forma funcional da lagrangiana transformada é igual à original, i.e.,  $\mathcal{L}'(\eta'_i(x'_\mu), \eta'_{i,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) = \mathcal{L}(\eta_i(x_\mu), \eta_{i,\nu}(x_\mu), x_\mu)$ .

2 - Invariância de escala - o valor numérico da integral de ação não se altera pela transformação infinitesimal:

$$I' = \int_{\Omega'} \mathcal{L}'(\eta'_i(x'_\mu), \eta'_{i,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) dx'_\mu = I = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\eta_i(x_\mu), \eta_{i,\nu}(x_\mu), x_\mu) dx_\mu.$$

Usando a propriedade 1 podemos tirar a linha de  $\mathcal{L}'$ . Como as variáveis de integração são mudas, podemos tirar as linhas de  $x'_\mu$  desde que mantenhamos a região de integração em  $\Omega'$ . A condição 2 pode então ser escrita como

$$\delta I = \int_{\Omega'} \mathcal{L}(\eta'_i(x_\mu), \eta'_{i,\nu}(x_\mu), x_\mu) dx_\mu - \int_{\Omega} \mathcal{L}(\eta_i(x_\mu), \eta_{i,\nu}(x_\mu), x_\mu) dx_\mu = 0$$

que equivale à condição de extremo de  $I$  sob a trajetória original  $\eta_i(x_\mu)$ .

O cálculo de  $\delta I$  possui duas contribuições, uma pelo fato dos campos  $\eta'$  serem diferentes dos campos originais  $\eta$  e outra devido à modificação do volume de integração de  $\Omega$  para  $\Omega'$ . Vamos ilustrar o procedimento usando uma função  $f(x)$  de uma única variável. Consideremos então

$$\delta S \equiv \int_{a+\delta a}^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)] dx - \int_a^b f(x) dx$$

A integral à esquerda pode ser quebrada em três partes:

$$\int_{a+\delta a}^a [f(x) + \delta f(x)] dx + \int_a^b [f(x) + \delta f(x)] dx + \int_b^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)] dx$$

de forma que

$$\delta S = \int_{a+\delta a}^a [f(x) + \delta f(x)] dx + \int_a^b \delta f(x) dx + \int_b^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)] dx$$

onde cancelamos as integrais de  $f(x)$  entre  $a$  e  $b$ . Como a primeira e terceira integrais envolvem intervalos infinitesimais, podemos desprezar o termo em  $\delta f$  e obter, em primeira ordem,

$$\delta S = \int_a^b \delta f(x) dx + f(b)\delta b - f(a)\delta a$$

que pode finalmente ser colocada na forma

$$\delta S = \int_a^b \left\{ \delta f(x) + \frac{d}{dx} (f(x)\delta x) \right\} dx.$$

Voltando ao cálculo de  $\delta I$  obtemos, por comparação,

$$\delta I = \int_{\Omega} \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \bar{\delta} \eta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{i,\nu}} \bar{\delta} \eta_{i,\nu} \right] + \frac{d}{dx_{\nu}} (\mathcal{L} \delta x_{\nu}) \right\} dx_{\mu} \quad (11.46)$$

onde o termo entre colchetes representa  $\delta \mathcal{L}$ . Note que aparecem os  $\bar{\delta}$ , pois os campos são todos calculados no mesmo ponto do espaço. Usando as equações de Lagrange no primeiro termo e invertendo a ordem das derivadas no segundo obtemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \bar{\delta} \eta_i \rightarrow \frac{d}{dx_{\nu}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{i,\nu}} \right) \bar{\delta} \eta_i$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{i,\nu}} \bar{\delta} \eta_{i,\nu} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{i,\nu}} \frac{d}{dx_{\nu}} (\bar{\delta} \eta_i).$$

Com isso é fácil ver que os dois primeiros termos da eq.(11.46) se combinam para formar uma derivada total. O resultado é

$$\delta I = \int_{\Omega} \left\{ \frac{d}{dx_{\nu}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{i,\nu}} \bar{\delta} \eta_i + \mathcal{L} \delta x_{\nu} \right] \right\} dx_{\mu} \equiv 0. \quad (11.47)$$

Para completar a identificação das grandezas conservadas precisamos especificar melhor a transformação infinitesimal em termos de parâmetros independentes. No caso de uma rotação em torno do eixo  $z$ , por exemplo, temos  $x' = x - y\delta\phi$ ,  $y' = y + x\delta\phi$  e  $z' = z$ , ou ainda,  $\delta x = -y\delta\phi$ ,  $\delta y = x\delta\phi$  e  $\delta z = 0$ . Em geral escrevemos

$$\begin{aligned} \delta x_{\nu} &= \epsilon_r X_{r\nu} \\ \delta \eta_i &= \epsilon_r \Psi_{ri} \end{aligned} \quad (11.48)$$

onde  $\epsilon_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$  representam os deslocamentos independentes e as funções  $X$  e  $\Psi$  as mudanças correspondentes nas coordenadas e campos. Precisamos, no entanto, relacionar  $\delta$  com  $\bar{\delta}$ :

$$\begin{aligned}\delta\eta_i &= \eta'_i(x'_\sigma) - \eta_i(x_\sigma) = \eta'_i(x_\sigma + \delta x_\sigma) - \eta_i(x_\sigma) \\ &= \bar{\delta}\eta_i + \eta_{i,\sigma}\delta x_\sigma.\end{aligned}$$

Assim obtemos

$$\bar{\delta}\eta_i = \delta\eta_i - \eta_{i,\sigma}\delta x_\sigma = \epsilon_r(\Psi_{ri} - \eta_{i,\sigma}X_{r\sigma}).$$

Substituindo agora  $\delta x_\nu$  da equação (11.48) e  $\bar{\delta}\eta_i$  da equação acima e rearranjando os termos obtemos finalmente

$$\delta I = \int_{\Omega} \epsilon_r \frac{d}{dx_\nu} \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{i,\nu}} \eta_{i,\sigma} - \mathcal{L} \delta_{\sigma\nu} \right] X_{r\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{i,\nu}} \Psi_{ri} \right\} dx_\mu \equiv 0.$$

Como os  $\epsilon_r$  são independentes, cada um dos termos deve ser nulo independentemente, ou seja,

$$\frac{d}{dx_\nu} \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{i,\nu}} \eta_{i,\sigma} - \mathcal{L} \delta_{\sigma\nu} \right] X_{r\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{i,\nu}} \Psi_{ri} \right\} = 0 \quad (11.49)$$

para  $r = 1, 2, \dots, R$ , que são as grandezas conservadas e o resultado principal do teorema de Noether. Comparando com a Eq.(11.37) vemos que essas expressões são equivalentes à equações de continuidade, onde existe uma *carga*, dada pela componente temporal, e uma *corrente*, definida pelas componentes espaciais. A equação da continuidade implica na conservação da carga total do sistema.

## 11.7 Exercícios

1. Considere uma cadeia linear de osciladores onde as molas não são todas idênticas. Suponha que a  $i$ -ésima mola (posicionada à direita da  $i$ -ésima partícula) tenha constante elástica  $k_i$ . Escreva a densidade lagrangiana e as equações de movimento nesse caso. Obtenha as equações de movimento partindo da cadeia discreta e tomando o limite para o contínuo e depois diretamente a partir das equações de Lagrange.

2. Considere um campo  $\phi$  cuja densidade lagrangiana seja

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{c^2}{2}\phi'^2 - \frac{\mu c^2}{2}(1 - \cos \phi)$$

onde o ponto representa derivada em relação ao tempo e a linha derivada em relação à  $x$ . Obtenha a equação de movimento, conhecida como equação de Sine-Gordon.

3. Mostre que o teorema de Noether recobra a equação (11.37) se  $R = 1$ ,  $\Psi_{1i} = 0$  e  $X_{1\nu} = \delta_{\nu\lambda}$  com  $\lambda$  fixo.
4. Refaça os cálculos que levam ao teorema de Noether para partículas em vez de campos. Partindo de  $L(q, \dot{q}, t)$  e impondo as invariâncias de forma e de escala mostre que a equação (11.49) se reduz à

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right] X_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Psi_{ri} \right\} = 0$$

onde  $\delta t = \epsilon_r X_r$  e  $\delta q_k = \epsilon_r \Psi_{rk}$ . Compare esse resultado com a equação (11.14).



## Apêndice A

# Mudança de variáveis em integrais multidimensionais

Considere a integral multidimensional da função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(x)$  sobre uma região  $D$

$$\int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dS = \sum f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta S \quad (\text{A.1})$$

onde  $dS = dx_1 \dots dx_n$  e a fórmula à direita representa uma discretização da integral como soma sobre pequenos elementos de volume. Fazemos agora uma mudança de variáveis definida por  $y_i = y_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Vamos supor que essa transformação seja invertível no domínio  $D$ . Sob essa mudança, cada ponto  $x$  no espaço original é levado em  $y$  e, em particular, o domínio de integração  $D$  é levado em  $D'$ . Além disso, para todo valor  $f(x)$  em  $D$  corresponde o mesmo valor  $F(y) = f(x(y))$ . Assim,

$$\sum f(x) \Delta S = \sum F(y) \Delta S. \quad (\text{A.2})$$

Vamos agora relacionar  $\Delta S$ , o elemento de volume no espaço original, com  $\Delta S'$ , que é o elemento de volume correspondente no espaço  $y$ . Começamos considerando o espaço  $y$  (veja a figura abaixo), onde

$$\Delta S' = \Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_n. \quad (\text{A.3})$$

Considere o elemento de volume formado pelo paralelepípedo de lados  $dy_1, dy_2$ , etc. O volume desse elemento é definido pelos vetores infinitesimais

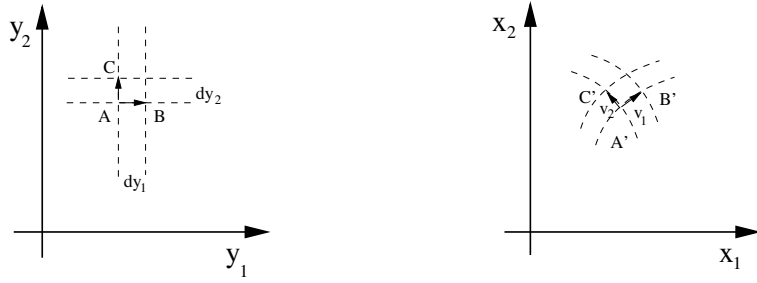


Figura A.1: Mapeamento do elemento de volume.

que ligam um dos vértices,  $A$ , aos outros  $n$  vértices  $B, C$ , etc. As arestas correspondentes são ortogonais, de comprimento  $dy_1, dy_2$ , etc, e o volume é  $\Delta S'$  conforme dado acima.

Pela transformação inversa, os vértices são levados em  $A', B'$ , etc, formando um paralelepípedo curvilíneo no espaço  $x$ . No limite em que os lados são pequenos, podemos também definir vetores infinitesimais ligando os vértices,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ , etc. O volume formado por esses  $n$  vetores é dado por

$$\Delta S = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \dots \times \vec{v}_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Os vetores  $\vec{v}_i$  podem agora ser calculados. Para  $\vec{v}_1 = B' - A'$ , por exemplo, temos que

$$A' = (x_1(y_1, y_2, \dots, y_n), x_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, y_2, \dots, y_n))$$

$$B' = (x_1(y_1 + dy_1, y_2, \dots, y_n), x_2(y_1 + dy_1, y_2, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1 + dy_1, y_2, \dots, y_n))$$

de forma que

$$\vec{v}_1 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \right) dy_1 \quad (\text{A.5})$$

e, em geral,

$$\vec{v}_k = \left( \frac{\partial x_1}{\partial y_k}, \frac{\partial x_2}{\partial y_k}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial y_k} \right) dy_k. \quad (\text{A.6})$$



Substituindo esse resultado em (A.4) obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} dy_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} dy_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} dy_n & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} dy_n & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} dy_n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} dy_1 dy_2 \dots dy_n \\
 &\equiv I dy_1 dy_2 \dots dy_n = I \Delta S'
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

onde o determinante  $I$  é o jacobiano da transformação. Finalmente, voltando à equação (A.2) temos

$$\sum f(x) \Delta S = \sum F(y) I(y) \Delta S' \tag{A.8}$$

ou

$$\int_D f(x) dS = \int_{D'} F(y) I(y) dS'. \tag{A.9}$$



## Apêndice B

# Comutador dos Campos Vetoriais

O conjunto dos vetores  $G_{F_i}(x) = J\nabla F_i(x)$  formam  $n$  campos vetoriais sobre o espaço de fases  $\mathcal{F}$  e, em particular, sobre  $M_f$ . Usaremos a notação  $x = (q, p)$ . Vamos mostrar aqui que

$$[G_{F_i}, G_{F_j}](x) \equiv G_{F_i} \circ G_{F_j}(x) - G_{F_j} \circ G_{F_i}(x) = G_{[F_i, F_j]}(x). \quad (\text{B.1})$$

A regra de composição indicada pelo símbolo  $\circ$  é a seguinte:

$$\begin{aligned} G_{F_i} \circ G_{F_j}(x) &= G_{F_i}(J\nabla F_j(x)) = G_{F_i} \left( \begin{array}{c} \partial F_j / \partial p \\ -\partial F_j / \partial q \end{array} \right) \\ &= J\nabla F_i(\partial F_j / \partial p, -\partial F_j / \partial q) \\ &= \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial p} F_i(\partial F_j / \partial p, -\partial F_j / \partial q) \\ -\frac{\partial}{\partial q} F_i(\partial F_j / \partial p, -\partial F_j / \partial q) \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c} \frac{\partial F_i}{\partial q} \frac{\partial^2 F_j}{\partial p^2} - \frac{\partial F_i}{\partial p} \frac{\partial^2 F_j}{\partial p \partial q} \\ -\frac{\partial F_i}{\partial q} \frac{\partial^2 F_j}{\partial p \partial q} + \frac{\partial F_i}{\partial p} \frac{\partial^2 F_j}{\partial q^2} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Analogamente obtemos

$$G_{F_j} \circ G_{F_i}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_j}{\partial q} \frac{\partial^2 F_i}{\partial p^2} - \frac{\partial F_j}{\partial p} \frac{\partial^2 F_i}{\partial p \partial q} \\ -\frac{\partial F_j}{\partial q} \frac{\partial^2 F_i}{\partial p \partial q} + \frac{\partial F_j}{\partial p} \frac{\partial^2 F_i}{\partial q^2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Subtraindo as duas parcelas e re-arranjando os termos podemos colocar o resultado na forma

$$(G_{F_i} \circ G_{F_j} - G_{F_j} \circ G_{F_i})(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p} \{F_i, F_j\} \\ -\frac{\partial}{\partial q} \{F_i, F_j\} \end{pmatrix} = J \nabla(\{F_i, F_j\}) = G_{[F_i, F_j]}(x). \quad (\text{B.4})$$

Assim, se as funções estão em involução,  $\{F_i, F_j\} = 0$ , os campos vetoriais correspondentes comutam,  $[G_{F_i}, G_{F_j}] = 0$ .

## Apêndice C

### Comutação dos Fluxos em $M_f$

Mostraremos aqui que se os campos vetoriais  $G_i(x)$  e  $G_j(x)$  comutam, então seus fluxos  $g_i^t(x)$  e  $g_j^s(x)$  também comutam. Em primeiro lugar consideramos  $t$  e  $s$  infinitesimais. Nesse caso

$$g_i^t(x) = x + tJ\nabla F_i(x) = x + tG_i(x). \quad (\text{C.1})$$

Expandindo o comutador em série de Taylor até segunda ordem em  $t$  e  $s$  temos

$$g_i^t g_j^s(x) - g_j^s g_i^t(x) = A_1 t + A_2 s + A_3 st + A_4 s^2 + A_5 t^2 + O(3). \quad (\text{C.2})$$

Podemos ver imediatamente que quatro dos coeficientes  $A_i$  são nulos:

(a) se  $s = 0$  o lado esquerdo é nulo, portanto  $A_1 = A_5 = 0$ ;

(b) se  $t = 0$  o lado esquerdo é nulo, portanto  $A_2 = A_4 = 0$ .

Mostraremos agora que  $A_3$  também é zero, de forma que o comutador é de ordem três em  $t$  e  $s$ . Usando  $t$  e  $s$  pequenos e a eq.(C.1) recursivamente podemos escrever

$$\begin{aligned} g_i^t(g_j^s(x)) &= g_i^t(x + sG_j(x)) = x + sG_j(x) + tG_i(x + sG_j(x)) \\ g_j^s(g_i^t(x)) &= g_j^s(x + tG_i(x)) = x + tG_i(x) + sG_j(x + tG_i(x)). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Os últimos termos dessas expressões podem ser calculados:

$$\begin{aligned}
 G_i(x + sG_j(x)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p} \left[ F_i(q + s\frac{\partial F_j}{\partial p}, p - s\frac{\partial F_j}{\partial q}) \right] \\ -\frac{\partial}{\partial q} \left[ F_i(q + s\frac{\partial F_j}{\partial p}, p - s\frac{\partial F_j}{\partial q}) \right] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p} [F_i(q, p) + s\{F_i, F_j\}] \\ -\frac{\partial}{\partial q} [F_i(q, p) + s\{F_i, F_j\}] \end{pmatrix} \\
 &= G_i(x) + sG_{\{F_i, F_j\}}(x).
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

Analogamente,

$$G_j(x + tG_i(x)) = G_j(x) + tG_{\{F_j, F_i\}}(x) = G_j(x) - tG_{\{F_i, F_j\}}(x). \tag{C.5}$$

Substituindo esses resultados nas equações (C.3) obtemos

$$\begin{aligned}
 g_i^t(g_j^s(x)) &= x + sG_j(x) + tG_i(x) + tsG_{\{F_i, F_j\}}(x) \\
 g_j^s(g_i^t(x)) &= x + tG_i(x) + sG_j(x) - stG_{\{F_i, F_j\}}(x).
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

Subtraindo uma da outra temos finalmente

$$g_i^t g_j^s(x) - g_j^s g_i^t(x) = 2tsG_{\{F_i, F_j\}}(x) = 0 \tag{C.7}$$

se  $\{F_i, F_j\} = 0$ .

Consideremos agora a propagação por tempos finitos, como ilustrado na figura C1. Vamos de  $x$  para  $y$  pelo caminho  $C_1$  andando  $N$  passos na direção de tamanho  $\epsilon$  com o fluxo de  $F_2$  (de tal forma que  $N\epsilon = t_2$ ) e depois  $M$  passos com  $F_1$  (tal que  $M\epsilon = t_1$ ):  $g_1^{M\epsilon} g_2^{N\epsilon}(x)$ . Depois fazemos o inverso pelo caminho  $C_2$ :  $g_2^{N\epsilon} g_1^{M\epsilon}(x)$ .

Para deformarmos  $C_1$  em  $C_2$  temos que fazer  $NM$  operações infinitesimais, como ilustrado na figura C2 para  $N = M = 2$ . A cada passo mudamos o percurso em apenas um quadradinho elementar. O erro que aparece devido à não comutatividade dos fluxos é de ordem  $\epsilon^3$  para cada uma dessas mudanças. O erro total acumulado é

$$NM\epsilon^3 = (N\epsilon)(M\epsilon)\epsilon = t_1 t_2 \epsilon \rightarrow 0. \tag{C.8}$$

Portanto os fluxos comutam também para tempos finitos.

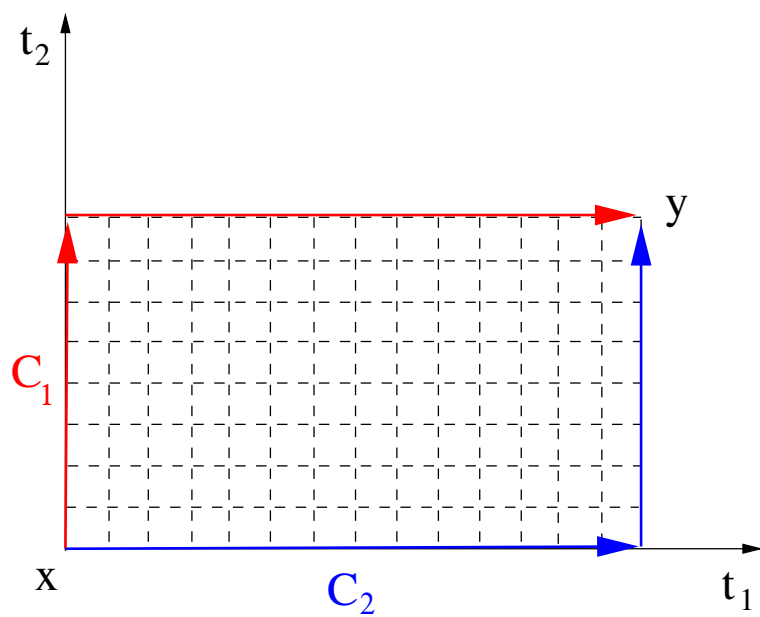


Figura C.1: Propagação por tempos finitos de  $x$  a  $y$  pelos caminhos  $C_1$  e  $C_2$ .

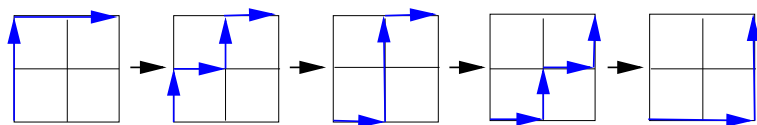


Figura C.2: Deformação dos caminhos de propagação em um trecho do percurso total.





## Apêndice D

### Variáveis de ação e ângulo para o problema de Kepler

No capítulo 9 consideramos o problema de três corpos movendo-se em um plano. Assumimos que o corpo principal tem massa  $M \gg m \gg \mu$ , onde o corpo de massa  $\mu$  é um corpo de teste e  $m$  faz o papel de perturbar sua órbita. Como  $M \gg \mu$ , vamos supor que  $M$  está fixo na origem e, neste apêndice, vamos esquecer de  $m$ . A Hamiltoniana para o problema de Kepler com  $M$  no centro e  $\mu$  orbitando em sua volta é dada por

$$H = \frac{1}{2\mu}p_r^2 + \frac{1}{2\mu r^2}p_\theta^2 - p_\theta\Omega - \frac{GM\mu}{r}. \quad (\text{D.1})$$

O termo  $p_\theta\Omega$  aparece porque estamos em um referencial que gira no plano da órbita com frequência  $\Omega$ . Esse termo não tem um papel fundamental no cálculo das variáveis de ação e podemos fazer  $\Omega = 0$  se quisermos obter resultados no referencial do centro de massa.

O problema é claramente integrável, e tanto  $H$  quanto  $p_\theta$  são constantes de movimento. A variável de ação  $I_\theta$  é obtida trivialmente de

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = p_\theta. \quad (\text{D.2})$$

A variável de ação  $I_r$ , por outro lado, é bem mais difícil de calcular. Substituindo  $p_\theta$  por  $I_\theta$  e  $H$  por  $E$  obtemos

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2\mu \left( E + \Omega I_\theta + \frac{GM\mu}{r} \right) - \frac{I_\theta^2}{r^2}} dr. \quad (\text{D.3})$$

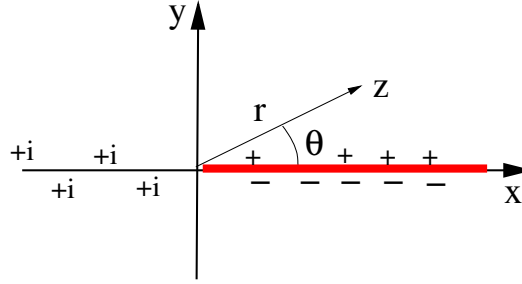


Figura D.1: Linha de corte para a função  $f(z) = \sqrt{z}$ .

Como o integrando tem um polo na origem (e também um polo no infinito), é conveniente fazer a integração pelo método dos resíduos. Esse cálculo foi feito primeiramente por Sommerfeld e está esquematizado no livro do Goldstein. No entanto, a integral envolve uma raiz quadrada, e vão aparecer as chamadas ‘linhas de corte’ (branch cuts, em inglês) e as folhas de Riemann associadas.

Para entender como isso funciona, considere  $f(z) = \sqrt{z}$ . Escrevendo  $z = re^{i\theta}$  ( $r \geq 0$  e  $\theta$  real) obtemos  $f(z) = r^{1/2}e^{i\theta/2}$ . Para  $\theta = 0$ ,  $f(z) = r^{1/2}$ . Para  $\theta = \pi$ ,  $f(z) = +ir^{1/2}$ . Para  $\theta = 2\pi$ ,  $f(z) = r^{1/2}e^{i\pi} = -r^{1/2}$ . A linha  $\theta = 0$  apresenta uma descontinuidade e não pode ser cruzada e é a ‘linha de corte’. Ao passarmos de  $\theta = 2\pi - \epsilon$  para  $\theta = 2\pi + \epsilon$  temos que assumir que  $f(z)$  passou continuamente de  $-r^{1/2}e^{-i\epsilon/2}$  para  $-r^{1/2}e^{+i\epsilon/2}$ , entrando na segunda ‘folha de Riemann’, e não na primeira, onde  $f(z) = +r^{1/2}e^{+i\epsilon/2}$ . A situação é ilustrada na figura D.1.

A função que vamos integrar é da forma  $f(z) = \sqrt{(z - z_0)(z_1 - z)}$ . Nesse caso a linha de corte deve ser escolhida conforme mostra a figura D.2(a). Perto de  $z = z_0$  podemos escrever  $\sqrt{z - z_0} = \epsilon^{1/2}e^{i\theta/2}$  e  $f(z) = \sqrt{z_1 - z_0}\epsilon^{1/2}e^{i\theta/2}$  (figura D.2(b)). Para  $\theta \approx 0$ , acima da linha de corte, o sinal da função é positivo, para  $\theta = \pi$  aparece  $+i$  e para  $\theta \approx 2\pi$ , abaixo da linha de corte, o sinal da função é negativo.

Perto de  $z = z_1$  a situação é um pouco mais complicada. A figura D.2(c) mostra o vetor  $z - z_1$ , mas precisamos de  $z_1 - z$ , que aponta na direção oposta. Escrevendo  $z - z_1 = \epsilon e^{i\theta}$ , então  $z_1 - z = \epsilon e^{i(\theta - \pi)}$  e  $f(z) = \sqrt{z_1 - z_0}\epsilon^{1/2}e^{i(\theta - \pi)/2}$ . Quando  $z$  está sobre o corte,  $\theta = \pi$  e o sinal é positivo. Quando  $z$  está sobre o eixo real,  $\theta = 0$  e aparece  $-i$ . Finalmente, quando  $z$  está sob o corte,  $\theta = -\pi$  e o sinal fica negativo.

Voltando à integral  $I_r$  e definindo  $A = -2\mu(E + \Omega I_\theta)$ ,  $B = GM\mu^2$  e

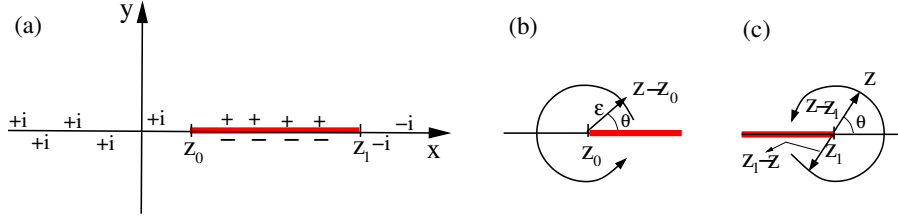


Figura D.2: Linha de corte para a função  $f(z) = \sqrt{(z - z_0)(z_1 - z)}$  e detalhe das vizinhanças de  $z_0$  e de  $z_1$ .

$C = I_\theta^2$  podemos escreve-la como

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}} dr.$$

Como  $E < 0$  vamos supor que  $A > 0$ . Para mostrar que a integral é singular tanto na origem como no infinito podemos ainda reescreve-la de duas formas diferentes:

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sqrt{A}}{r} \sqrt{-r^2 + \frac{2Br}{A} - \frac{C}{A}} dr = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sqrt{A}}{r} \sqrt{(r - r_-)(r_+ - r)} dr \quad (D.4)$$

ou, definindo  $u = 1/r$ ,

$$I_r = -\frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sqrt{C}}{u^2} \sqrt{-\frac{A}{C} + \frac{2Bu}{C} - u^2} du = -\frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sqrt{C}}{u^2} \sqrt{(u - u_-)(u_+ - u)} du \quad (D.5)$$

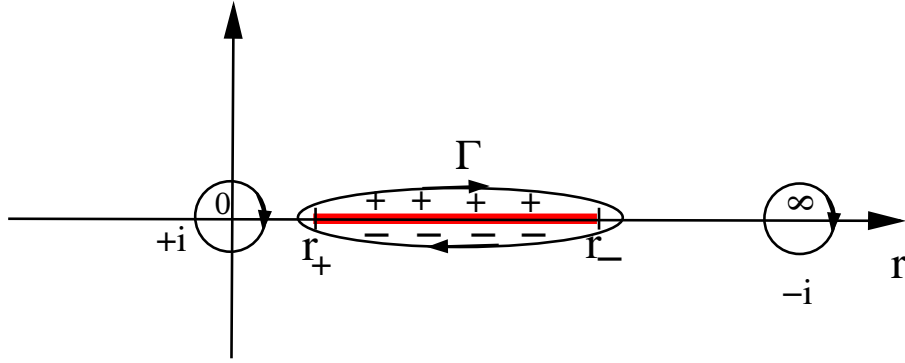
onde

$$r_\pm = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

são os pontos de retorno radiais e  $u_\pm = 1/r_\pm$ . O polo na origem é de primeira ordem. O no infinito,  $u = 0$ , de segunda.

A integral será feita ao longo do contorno ilustrado na figura D.3. Observe que quando vamos de  $r_-$  para  $r_+$  o momento radial  $p_r$  é positivo e tomamos o sinal positivo da raiz. Na volta, de  $r_+$  para  $r_-$ ,  $p_r < 0$  e tomamos o sinal negativo da raiz. O contorno  $\Gamma$  deve ser pensado como envolvendo o resto do plano complexo, para evitar a linha de corte. Assim, incluiremos o resíduo na origem, com fase  $+i$ , e o resíduo no infinito, com fase  $-i$ :

$$I_r = 2\pi i \{ (+i) |\text{resíduo em } 0| + (-i) |\text{resíduo em } \infty| \} \quad (D.6)$$

Figura D.3: Caminho de integração e singularidades de  $I_r$ .

O resíduo na origem, de acordo com a equação (D.5) é  $\frac{1}{2\pi}\sqrt{A}\sqrt{-r_-r_+} = \sqrt{-C}$ , com  $C = I_\theta^2$ . Se não tivéssemos feito a análise de sinais não saberíamos se isso é  $+iI_\theta/2\pi$  ou  $-iI_\theta/2\pi$ . Mas isso já está decidido em (D.6) e só precisamos de módulo,  $I_\theta$ .

O polo no infinito, ou na origem de  $u$ , é de segunda ordem. Escrevendo o integrando em (D.5) na forma  $h(u)/u^2$  o resíduo é  $h'(0) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{C}(u_+ + u_-)/\sqrt{-u_+u_-} = B/(2\pi\sqrt{-A})$ . Novamente só precisamos do módulo que é  $B/(2\pi\sqrt{A})$ .

Substituindo de (D.6) obtemos

$$I_r = -I_\theta + B/\sqrt{A} = -I_\theta + \frac{GM\mu^2}{\sqrt{-2\mu(E + \Omega I_\theta)}}. \quad (\text{D.7})$$

Resolvendo para  $E$  obtemos finalmente

$$H(I_r, I_\theta) = -\frac{G^2M^2\mu^3}{2(I_r + I_\theta)^2} - \Omega I_\theta. \quad (\text{D.8})$$

## Apêndice E

# Integrais de caminho de Feynman

No capítulo 3 apresentamos o princípio variacional de Hamilton para encontrar a trajetória seguida por uma partícula que parte do ponto inicial  $x_i$  e chega ao ponto final  $x_f$  no intervalo de tempo  $t$ . Mostramos que a solução desse problema deve satisfazer as equações de Lagrange. Discutimos também, de forma resumida, o papel da ação na mecânica quântica usando o conceito de integrais de caminho introduzido por Feynman. Nesse apêndice apresentamos de forma concisa esse formalismo para Hamiltonianas independentes do tempo, em uma dimensão e da forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\hat{p}^2 + V(\hat{x}). \quad (\text{E.1})$$

Vamos usar o *chapéu* para indicar operadores.

A equação de Schroedinger, que descreve a dinâmica de estados quânticos  $|\psi\rangle$  é dada por

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle. \quad (\text{E.2})$$

A solução formal dessa equação é

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle \quad (\text{E.3})$$

e a probabilidade da partícula estar no estado  $|\phi\rangle$  no tempo  $t$  é

$$Prob = |\langle\phi|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle|^2. \quad (\text{E.4})$$

A quantidade dentro do módulo é chamada de amplitude de probabilidade, e é geralmente um número complexo. Em particular, a amplitude de probabilidade da partícula sair de  $x_i$  em  $t = 0$  e ser encontrada em  $x_f$  no tempo  $t$  é

$$K(x_f, x_i, t) = \langle x_f | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | x_i \rangle \quad (\text{E.5})$$

e é conhecida como *Propagador de Feynman*. Essa quantidade é, de certa forma, o análogo quântico do problema clássico que o princípio variacional de Hamilton tenta resolver. O termo *propagador* vem da seguinte propriedade: a função de onde  $\psi(x, t)$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \langle x | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | \psi(0) \rangle \\ &= \int \langle x | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | x' \rangle \langle x' | \psi(0) \rangle dx' \\ &= \int K(x, x', t) \psi(x', 0) dx', \end{aligned}$$

ou seja, o propagador de fato propaga funções de onda pelo tempo  $t$  sob a dinâmica de  $\hat{H}$ .

Para calcular o propagador vamos proceder da seguinte forma: em primeiro lugar dividimos a evolução em  $N$  intervalos de duração  $\epsilon$ , de tal forma que  $N\epsilon = t$ :

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} \dots e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar}. \quad (\text{E.6})$$

Em segundo lugar inserimos operadores identidade da forma  $\int |x\rangle \langle x| dx = 1$  entre cada operador de evolução infinitesimal para obter

$$\begin{aligned} K(x_f, x_i, t) &= \int dx_1 \dots dx_{N-1} \langle x_N | e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} | x_{N-2} \rangle \\ &\dots \langle x_2 | e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} | x_0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

onde  $x_0 \equiv x_i$  e  $x_N \equiv x_f$ .

Para calcular cada um dos propagadores infinitesimais escrevemos

$$e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} \approx e^{-i\hat{p}^2\epsilon/2\mu\hbar} e^{-iV(\hat{x})\epsilon/\hbar}. \quad (\text{E.8})$$

onde a aproximação vale para  $\epsilon \rightarrow 0$ . De fato, como os operadores  $\hat{p}$  e  $\hat{x}$  não comutam, essa quebra no produto não é exata e há uma correção proporcional

ao comutador das energias cinética e potencial. Porém esse comutador é de ordem  $\epsilon^2$  e pode ser desprezado. Assim

$$\begin{aligned}
 \langle x_{k+1} | e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} | x_k \rangle &= \langle x_{k+1} | e^{-i\hat{p}^2\epsilon/2\mu\hbar} e^{-iV(\hat{x})\epsilon/\hbar} | x_k \rangle \\
 &= \int \langle x_{k+1} | e^{-i\hat{p}^2\epsilon/2\mu\hbar} | p \rangle \langle p | e^{-iV(\hat{x})\epsilon/\hbar} | x_k \rangle dp \\
 &= \int e^{-ip^2\epsilon/2\mu\hbar} e^{-iV(x_k)\epsilon/\hbar} \langle x_{k+1} | p \rangle \langle p | x_k \rangle dp \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-ip^2\epsilon/2\mu\hbar + ip(x_{k+1}-x_k)/\hbar} e^{-iV(x_k)\epsilon/\hbar} dp.
 \end{aligned} \tag{E.9}$$

A integral sobre  $p$  pode ser calculada usando a fórmula

$$J = \int e^{-i\alpha p^2 + i\beta p} dp = \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}} e^{i\beta^2/4\alpha}. \tag{E.10}$$

Com isso obtemos, após alguma simplificação,

$$\langle x_{k+1} | e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} | x_k \rangle = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi i\hbar\epsilon}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{x_{k+1}-x_k}{\epsilon} \right)^2 \right] \epsilon}. \tag{E.11}$$

Substituindo esse resultado na equação (E.7) obtemos

$$K(x_f, x_i, t) = \int dx_1 \dots dx_{N-1} \left( \frac{\mu}{2\pi i\hbar\epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^N \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{x_{k+1}-x_k}{\epsilon} \right)^2 - V(x_k) \right] \epsilon}.$$

Os termos dentro do colchetes são reconhecidos como a lagrangiana. Quando tomamos o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  a soma sobre os intervalos se transforma em uma integral. A integral de lagrangiana, por sua vez, é a ação calculada sobre a trajetória definida pelo conjunto  $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_n)$ . Como integramos sobre todos os pontos intermediários, isso equivale a somar sobre todos os caminhos que ligam  $x_i$  à  $x_f$  no tempo  $t$ .

Usando uma notação resumida, o propagador fica escrito como

$$K(x_f, x_i, t) = \int \mathcal{D}[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}. \tag{E.12}$$





# Bibliografia

- [1] James Gleick. *Isaac Newton, uma biografia*. Companhia das Letras, SP, 2004.
- [2] Isaac Newton. *The Principia*, Traduzido para o inglês por Andrew Motte. Prometheus Books, NY, 1995.
- [3] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1989
- [4] Keith R. Symon. *Mechanics*. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co., 1971
- [5] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko. *Classical mechanics*. Pearson Educ, 2001
- [6] Stephen T. Thornton, Jerry B. Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Belmont, Calif.: Brooks/Cole, 2004
- [7] Wolfgang Yourgrau, Stanley Mandelstam. *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*. Dover Publications Inc., 1979
- [8] Cornelius Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications Inc., 1986
- [9] Max Born, Emil Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 1999.
- [10] Alain Brizard. *An Introduction to Lagrangian Mechanics*. World Scientific, 2008.
- [11] Keith Moffatt. *Euler's disk and its finite-time singularity*. Brief Communication, Nature **404** (2000) 833 (see also Nature **408**, 540).

- [12] Martin C Gutzwiller. *Chaos in classical and quantum mechanics*. Springer, 1991
- [13] Richard Feynman, Robert Leighton, Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, 1963.
- [14] Nivaldo A. Lemos. *Mecânica analítica*. São Paulo Livraria da Física, 2007
- [15] *Sobre o teorema quântico de Sommerfeld e Epstein*, Rev. Bras. Fís. **27** (2005) 103.
- [16] *Einstein e a teoria do caos quântico*, Rev. Bras. Fís. **27** (2005) 101.
- [17] Wreszinski, Walter F. *Mecânica Clássica Moderna*. Edusp, 1997
- [18] Florian Scheck. *Mechanics : from Newton's laws to deterministic chaos*. Springer, 2010
- [19] Nivaldo Lemos. Am. J. Phys. **68** (2000) 88.
- [20] V. I. Arnold, André Avez. *Ergodic problems of classical mechanics*. Benjamin Inc., 1968
- [21] A.M.Ozorio de Almeida. *Sistemas Hamiltonianos: caos e quantização*. Editora da Unicamp, 1995
- [22] Lev Landau, E. Lifschitz. *Mecânica Quântica: teoria não relativística*. Editora Mir, Moscou, 1974.
- [23] Joseph L. McCauley. *Classical Mechanics*. Cambridge University Press, 1997
- [24] Dominic William Jordan, Peter Smith. *Nonlinear ordinary differential equations: an introduction to dynamical systems*. Oxford University Press, 1999
- [25] Morris W Hirsch, Stephen Smale. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press, 1974
- [26] Allan J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. *Regular and stochastic motion*. Springer-Verlag, 1982

- [27] John Guckenheimer, Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, 1990
- [28] Alexander L Fetter, John Dirk Walecka. *Theoretical mechanics of particles and continua*. Dover Publications, 2006
- [29] L E Reichl. *The transition to chaos : conservative classical systems and quantum manifestations*. Springer, 2004
- [30] Michael V. Berry. in *Topics in Nonlinear Dynamics*, ed. S. Jorna, Am. Inst. Cont. Proc. **46** (1978) 16.
- [31] A.Ya. Khinchin. *Continued Fractions*, Dover, NY, 1964.
- [32] Eliana X.L. Andrade, Cleonice F. Bracciali. *Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações*, Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, 2005.
- [33] Maria E. G. de Alencar. em *Física na Escola*, **5**(2) (2004) 4 (<http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol5/Num2/v5n1a02.pdf>).
- [34] Jurgen Poschel, Proc. Symp. Pure Math **69** (2000) 707-732.