

Exercícios sugeridos - II - Equações não-lineares

1. Estude os pontos de equilíbrio e estabilidade da equação

$$p_{n+1} = \frac{kp_n}{b + p_n}.$$

Interprete os parâmetros na equação.

2. Estude os pontos de equilíbrio e estabilidade da equação logística

$$X_{n+1} = rX_n \left(1 - \frac{X_n}{K}\right).$$

Interprete os parâmetros na equação. Defina a variável $x_n = X_n/K$ e reescreva a equação na nova variável.

3. A interação entre predadores e presas pode ser modelada pelas equações

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= rx_n(1 - x_n) - ax_ny_n \\ y_{n+1} &= r'y_n + bx_ny_n.\end{aligned}$$

(a) Obtenha os pontos de equilíbrio. Mostre que existem três possibilidades, correspondendo à extinção das duas populações, à extinção apenas dos predadores e à co-existência de predadores e presas. Determine as condições de existência de cada uma dessas soluções.

(b) Mostre que a extinção das duas populações só ocorre se $r < 1$ e $r' < 1$.

(c) Mostre que a extinção dos predadores com sobrevivência das presas ocorre se $b < r(1 - r')/(r - 1)$. Nesse caso, o que você espera que aconteça se $1 < r < 3$ e se $r > 3$?

(d) Fixando $r = 2$, $r' = 0.5$ e $a = 1$, estude as condições de estabilidade dos três pontos de equilíbrio.

(e) Idem para $r = 3.3$, $r' = 0.5$ e $a = 1$

4. Uma população de plantas V e herbívoros H pode ser modelada pelo sistema de equações

$$V_{n+1} = fV_n e^{-aH_n}$$

$$H_{n+1} = rH_n \left(\delta - \frac{H_n}{V_n} \right)$$

onde f , a , δ e r são parâmetros positivos.

(a) Interprete o papel dos parâmetros.

(b) Encontre os pontos de equilíbrio e estude as condições para que a coexistência seja possível.

(c) Seja $\bar{V}$ e $\bar{H}$ o ponto de equilíbrio correspondente à coexistência de plantas e herbívoros. Defina novas variáveis

$$v_n = V_n/\bar{V} \quad e \quad h_n = H_n/\bar{H}.$$

Mostre que as equações podem ser re-escritas nas novas variáveis em termos de dois parâmetros apenas como:

$$v_{n+1} = v_n e^{k(1-h_n)}$$

$$h_{n+1} = bh_n \left(1 + \frac{1}{b} - \frac{h_n}{v_n} \right)$$

onde $k = \ln f$ e $b = r\delta - 1$.

(d) Verifique que o ponto de equilíbrio de coexistência é dado agora por $\bar{v} = 1$ e $\bar{h} = 1$.

(e) Determine para que intervalo de parâmetros esse ponto é estável.