

Exercícios sugeridos - IV - Replicadores

1. Considere duas espécies A e B com mesmo fitness f_A e f_B respectivamente. Seja x a proporção de A na população e y a proporção de B. As equações para x e y são:

$$\frac{dx}{dt} = xf_A - \phi x$$

$$\frac{dy}{dt} = yf_B - \phi y.$$

- (a) Encontre ϕ para que $x + y = 1$.
- (b) Encontre os pontos de equilíbrio e estude sua estabilidade.
2. Considere duas espécies A e B com mesmo fitness $f = 1$. Seja x a proporção de A na população e y a proporção de B. Suponha que haja uma taxa de mutação μ_1 de A para B e μ_2 de B para A. As equações para x e y são:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - \mu_1) + y\mu_2 - \phi x$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - \mu_2) + x\mu_1 - \phi y.$$

- (a) Encontre ϕ para que $x + y = 1$.
- (b) Encontre os pontos de equilíbrio e estude sua estabilidade.
3. A equação de quasi-espécies de Eigen é dada por

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n x_j f_j q_{ji} - \phi x_i$$

- (a) Encontre ϕ para que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.
- (b) Interprete cada termo desta equação.

(c) Considere o caso de três espécies onde a matriz de mutações é dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - 2a & a & a \\ b & 1 - 2b & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e os valores de fitness são $f_1 = f_2 = 1$ e f_3 arbitrário. Mostre que $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$ é uma solução de equilíbrio. Em que condições essa solução é estável?

4. Considere agora a matriz de mutações

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - a & a & 0 \\ b & 1 - b & 0 \\ c & c & 1 - 2c \end{pmatrix}$$

ainda com $f_1 = f_2 = 1$ e f_3 arbitrário.

(a) Encontre as soluções de equilíbrio.

(b) Mostre que a solução que tem $x_3 \neq 0$ só é possível se f_3 for suficientemente grande. Encontre essa condição e interprete o resultado.