

### Exercícios sugeridos - IV - Replicadores

1. Considere duas espécies A e B com mesmo fitness  $f_A$  e  $f_B$  respectivamente. Seja  $x$  a proporção de A na população e  $y$  a proporção de B. As equações para  $x$  e  $y$  são:

$$\frac{dx}{dt} = x f_A - \phi x$$

$$\frac{dy}{dt} = y f_B - \phi y.$$

- (a) Encontre  $\phi$  para que  $x + y = 1$ .
- (b) Encontre os pontos de equilíbrio e estude sua estabilidade.
2. Considere duas espécies A e B com mesmo fitness  $f = 1$ . Seja  $x$  a proporção de A na população e  $y$  a proporção de B. Suponha que haja uma taxa de mutação  $\mu_1$  de A para B e  $\mu_2$  de B para A. As equações para  $x$  e  $y$  são:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - \mu_1) + y\mu_2 - \phi x$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - \mu_2) + x\mu_1 - \phi y.$$

- (a) Encontre  $\phi$  para que  $x + y = 1$ .
- (b) Encontre os pontos de equilíbrio e estude sua estabilidade.
3. A equação de quasi-espécies de Eigen é dada por

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^n x_j f_j q_{ji} - \phi x_i$$

- (a) Encontre  $\phi$  para que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ .
- (b) Interprete cada termo desta equação.

(c) Considere o caso de três espécies onde a matriz de mutações é dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ b & 1-2b & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e os valores de fitness são  $f_1 = f_2 = 1$  e  $f_3$  arbitrário. Mostre que  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$  é uma solução de equilíbrio. Em que condições essa solução é estável?

4. Considere agora a matriz de mutações

$$Q = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ b & 1-b & 0 \\ c & c & 1-2c \end{pmatrix}$$

ainda com  $f_1 = f_2 = 1$  e  $f_3$  arbitrário.

(a) Encontre as soluções de equilíbrio.

(b) Mostre que a solução que tem  $x_3 \neq 0$  só é possível se  $f_3$  for suficientemente grande. Encontre essa condição e interprete o resultado.