SEGUNDA PROVA - FI195 / F515

NOME: SOLUÇÃO RA:

1. Um anel de raio R é montado na posição vertical de forma a poder rodar em torno de um eixo também vertical que passa pelo seu ponto de apoio e pelo seu centro. No anel é colocada uma conta de massa m que pode deslizar sem atrito. Suponha que o anel seja colocado em rotação com velocidade angular constante Ω.

   (a) Escreva as equações de vínculo e encontre o número de graus de liberdade do sistema.

   (b) Descreva a posição da conta utilizando coordenadas esféricas com origem no centro do anel.

   (c) Escreva a lagrangiana.

   (d) Escreva as equações de movimento.

   (e) Mostre que se $\Omega > \sqrt{g/R}$ existem três pontos de equilíbrio da conta. Encontre esses pontos.

(a) $r = R \quad ; \quad \varphi = \Omega t \Rightarrow$ 1 grau de liberdade

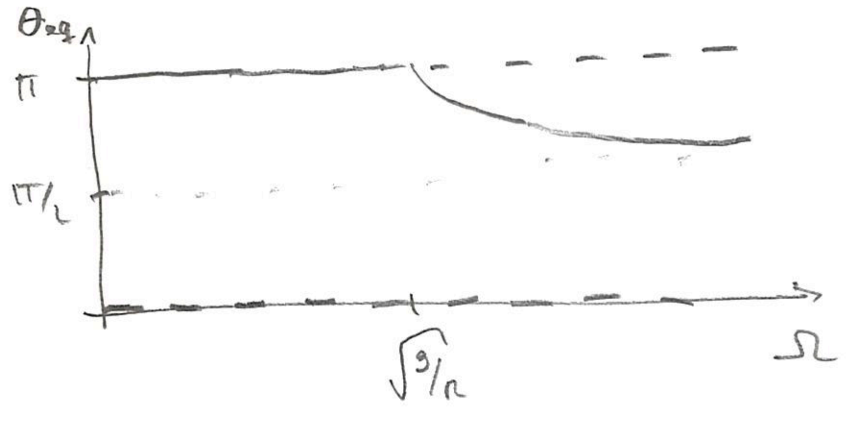
(b)
$$x = R \sin\theta \cos\Omega t$$
$$y = R \sin\theta \sin\Omega t$$
$$z = R \cos\theta$$

(c)
$$\dot{x} = R\dot{\theta}\cos\theta\cos\Omega t - R\Omega \sin\theta \sin\Omega t$$
$$\dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta\sin\Omega t + R\Omega \sin\theta\cos\Omega t$$
$$\dot{z} = -R\dot{\theta}\sin\theta$$
$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left[R^2\dot{\theta}^2 + R^2\Omega^2\sin^2\theta\right]$$
$$V = mgz = mgR\cos\theta$$
$$L = \frac{m}{2}\left[R^2\dot{\theta}^2 + R^2\Omega^2\sin^2\theta\right] - mgR\cos\theta$$

(d)
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mR^2\ddot{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\Omega^2 \sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta$$
$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta$$

(e) $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$ ou $\cos\theta = -g/R\Omega^2$

Como $|\cos\theta| \leq 1 \quad g/R\Omega^2 \leq 1 \Rightarrow \Omega \geq \sqrt{g/R}$



$\theta = 0$ instável

$\theta = \pi$ estável si $\Omega < \sqrt{g/R}$

2. Um sistema físico de dois graus de liberdade é descrito pela lagrangiana

$$L = \frac{\dot{q_1}^2}{2} + (a^2+1)\frac{\dot{q_2}^2}{2} + a\dot{q}_1\dot{q}_2 - bq_1^2$$

(a) Escreva L na forma

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^T A \dot{q} - V(q)$$

onde A é uma matriz simétrica e $q^T = (q_1, q_2)$.

(b) Calcule a inversa de A e obtenha a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}p^T A^{-1} p + V(q)$$

(escreva H explicitamente em termos de p_1 e p_2).

(c) Escreva as equações de movimento.

(d) Resolva essas equações.

(a) $$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 \ \ \dot{q}_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1+a^2 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} - b q_1^2$$

(b) $\det A = 1$ $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2}(P_1 \ \ P_2)\begin{pmatrix} 1+a^2 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + b q_1^2$$

$$H = \frac{1}{2}(1+a^2) P_1^2 + \frac{P_2^2}{2} - a P_1 P_2 + b q_1^2$$

(c) $$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1} = (1+a^2)P_1 - P_2$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -2bq_1$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2} = P_2 - aP_1$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0$$

(d) $$\boxed{P_2(t) = P_{20}}$$

$$\ddot{q}_1 = (1+a^2)\dot{P}_1 = -2b(1+a^2)q_1 \qquad \omega^2 = 2b(1+a^2)$$

$$q_1(t) = q_{10}\cos\omega t + A\sin\omega t$$

$$P_1 = \frac{P_2 + \dot{q}_1}{1+a^2} = \frac{1}{1+a^2}\left[P_{20} - \omega q_{10}\sin\omega t + A\omega\cos\omega t\right]$$

$$p_1(0) = p_{10} = \frac{1}{1+a^2}\left(p_{20} + A\omega\right) \Rightarrow A = \frac{(1+a^2)p_{10} - p_{20}}{\omega}$$

$$= \frac{\omega}{2b}p_{10} - \frac{p_{20}}{\omega}$$

$$\boxed{q_1(t) = q_{10}\cos\omega t + \left(\frac{\omega}{2b}p_{10} - \frac{p_{20}}{\omega}\right)\sin\omega t}$$

$$\boxed{p_1(t) = \frac{2b}{\omega^2}\left[p_{20} - \omega q_{10}\sin\omega t + \left(\frac{\omega^2}{2b}p_{10} - p_{20}\right)\cos\omega t\right]}$$

$$\dot{q}_2 = p_{20} - a p_1(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} q_2(t) = {} & q_{20} + \left(p_{20} - \frac{2ab}{\omega^2}p_{20}\right)t \\ & + \frac{2b}{\omega^2}q_{10}(\cos\omega t - 1) + \left(\frac{\omega}{2b}p_{10} - \frac{p_{20}}{\omega}\right)\sin\omega t \end{aligned}}$$