Aula 4

Momento, Força e Energia

O efeito Doppler e o paradoxo dos gêmeos

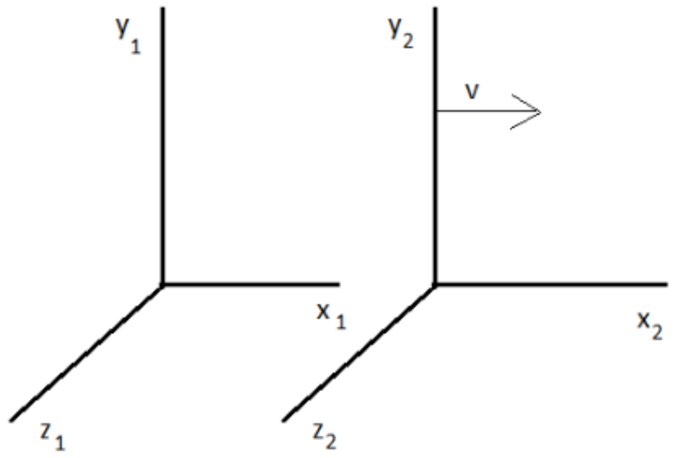
Transformações de Lorentz

$$x_2 = \gamma(x_1 - vt_1)$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = z_1$$

$$t_2 = \gamma\,(t_1 - v/c^2\,x_1)$$



$$\beta = v/c \qquad \text{e} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Intervalo entre eventos é invariante

Sistema inercial 1: Evento A: (x_A, y_A, z_A, t_A) Evento B: (x_B, y_B, z_B, t_B)

$\Delta s^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - c^2(t_B - t_A)^2$

Sistema inercial 2: Evento A: (x'_A, y'_A, z'_A, t'_A) Evento B: (x'_B, y'_B, z'_B, t'_B)

$\Delta s'^2 = (x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2 + (z'_B - z'_A)^2 - c^2(t'_B - t'_A)^2 = \Delta s^2$

Quadrivetor posição: $R = (ct,x,y,z) = (x^0,x^1,x^2,x^3)$

Propriedades:

- Módulo $R^2 := -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$
- R represena o intervalo entre $A = (0,0,0,0)$ e $B=(x,y,z,t)$
- Em outro referencial, $R' = (ct',x',y',z')$; $R'^2 = R^2$

Quadrivetores A=(A^0, A^1, A^2, A^3)

quadruplas de variáveis que se transformam como R, ou seja, em um referencial 'barra' teremos

$$\bar{A}^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1)$$

$$\bar{A}^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0)$$

$$\bar{A}^2 = A^2$$

$$\bar{A}^3 = A^3$$

Quadrivetor Momento: $P = m_0 \frac{dR}{dt_0}$

m_0 = massa de repouso

dt_0 = intervalo de tempo medido no referencial que está instantaneamente em repouso em relação à partícula

t e $\vec{r}$ são medidos em um referencial inercial que observa a partícula

como m_0 e dt_0 são independentes de referencial, P se transforma como R

Componentes de P:

$$P^0 = m_0 \frac{d\,(ct)}{d\,t_0} = m_0 \mathrm{c} \frac{d\,t}{d\,t_0} = m_0 \gamma \mathrm{c}$$

$$P^i = m_0 \frac{d\,x^i}{d\,t_0} = m_0 \frac{d\,x^i}{d\,t} \frac{d\,t}{d\,t_0} = m_0 \gamma\, v^i = p^i$$

$$P = (m_0 \gamma \mathrm{c}, \vec{p})$$

Mostre que $P^2 = -(m_0 c)^2$.

Energia

Como P^2 é constante: $d(P^2) = d(\vec{P}\cdot\vec{P}) = 2\vec{P}\cdot d\vec{P} = 0.$

Usando $\vec{P} = m_0 \dfrac{d\vec{R}}{dt_0}$ vemos que $d\vec{R}\cdot d\vec{P} = 0$ ou

$$(cdt, d\vec{r})\cdot(cm_0 d\gamma, d\vec{p}) = -m_0 c^2 d\gamma dt + d\vec{r}\cdot d\vec{p} = 0$$

$$m_0 c^2 d\gamma = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot d\vec{r} = dE \quad \Longrightarrow \quad E = m_0\gamma c^2.$$

trabalho realizado pela força

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt$$

Energia em termos do momento

Como $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ temos $p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-v^2/c^2}$ ou, resolvendo para v^2

$$v^2 = \frac{p^2c^2}{p^2 + m_0^2c^2}.$$

Dessa forma obtemos

$$\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2 = \frac{m_0^2c^2}{p^2 + m_0^2c^2}$$

que pode finalmente ser substituída na relação $E^2 = m_0^2\gamma^2c^4$ resultando em

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4.$$

Detalhes do cálculo de P:

1) Se observamos a partícula em S_1 e o referencial instantâneo é S_2:

$$t_1 = \gamma(t_2 + v/c^2\, x_2)$$

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx_2}{dt_2}\right) = \gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} v_2\right) = \gamma$$ pois v_2=0 (partícula em respouso)

2) Módulo de P

$$P^2 = -m_0^2\gamma^2c^2 + m_0^2\gamma^2v^2 = -m_0^2\gamma^2c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -m_0^2c^2$$

Aplicações: 1 – o efeito Doppler

Vamos considerar uma fonte S_2 que emite sinais a intervalos de tempo Δt_2

Suponha que essa fonte se afasta de nós com velocidade v

Qual o intervalo de tempo entre os sinais que recebemos?

Dois efeitos:

a) se o primeiro sinal viaja uma distância L_1 até nos atingir, o segundo sinal vai viajar $L_1 + v\,\Delta t_1$. Esse é um efeito clássico.
b) dilatação do tempo: $\Delta t_1 = \gamma\,\Delta t_2$, que dá uma correção relativística.

Chamamos ΔP_1 o intervalo entre as chegadas dos sinais:

$$\Delta P_1 = \Delta t_1 + v\Delta t_1/c = \Delta t_1(1+\beta) = \gamma\Delta t_2(1+\beta) = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t_2$$

$$1-\beta^2 = (1+\beta)(1-\beta)$$

$$\Delta P_1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\Delta t_2$$

O inverso do intervalo de tempo é a frequência com que os pulsos são emitidos:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu_2 < \nu_2$$

A luz recebida fica “avermelhada” (red shift).

Se a fonte está se aproximando basta trocar o sinal de β

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu_2 > \nu_2$$

e a luz recebida fica “azulada” (blue shift).

Aplicações: 2 – o paradoxo dos gêmeos

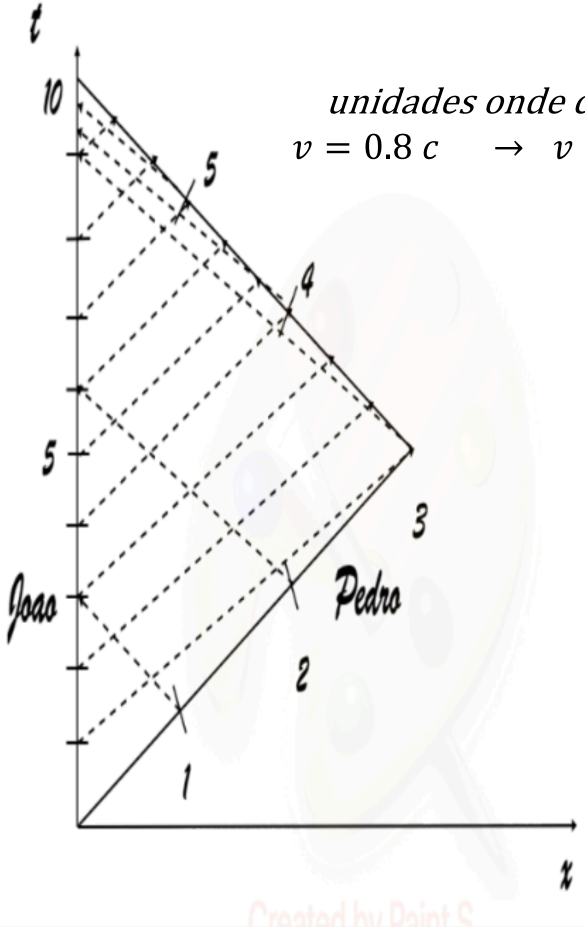
unidades onde c=1

$v = 0.8\,c \quad \rightarrow \quad v = 0.8$

Sabemos sobre a dilatação do tempo. Mas quem envelhece mais? A situação de Pedro e João não é simétrica?

R: Não! O referencial de Pedro não é inercial. Ele precisa desacelerar para retornar.

Vamos olhar o problema do referencial inercial de João.



Pedro e João enviam sinais luminosos a cada ano.

Ida:

$$\Delta P = \sqrt{\frac{1+0.8}{1-0.8}}(1\ ano) = 3\ anos.$$

Volta:

$$\Delta P = \sqrt{\frac{1-0.8}{1+0.8}}(1\ ano) = 1/3\ ano = 4\ meses.$$