FI -194 - Teoria de Campos I
Primeiro semestre de 2017
Lista de Exercícios 6

Data da entrega: 19/06/2017

Tópicos: Equação de Dirac, Espinores, Matrizes γ de Dirac e Seções de choque com férmions.

1. **Matrizes Gamma**

   Na prática, raramente usamos a forma explícita matricial das matrizes γ de Dirac em uma dada representação. A maioria dos cálculos podem ser feitos utilizando identidades algébricas que dependem somente da relação de anti-comutação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Derive algebricamente as seguintes igualdades (sem usar uma representação explicíta):

   (a) $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$
   (b) $\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2\not{p}$
   (c) $\gamma_\mu \not{p}\not{q}\not{p} \gamma^\mu = -2\not{p}\not{q}\not{p}$
   (d) $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$
   (e) $\mathrm{Tr}[\gamma^\alpha, \gamma^\mu\gamma^\beta, \gamma^\nu] = 4(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu})$

2. **Identidades spinoriais**

   Mostre que:

   (a) $$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not{p} + m \quad \text{e} \quad \sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = \not{p} - m\,;$$
   (b) $$\bar{u}_\sigma(p)\gamma^\mu u_{\sigma'}(p) = 2\delta_{\sigma\sigma'}p^\mu\,;$$
   (c) $$[\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu u_s(p)]^* = [\bar{u}_s(p)\gamma^\mu u_{s'}(p')]\,.$$

3. **Identidade de Gordon**

   Mostre que para espinores on-shell

   $$\bar{u}(q)\gamma^\mu u(q) = \bar{u}(q)\left[\frac{q^\mu + p^\mu}{2m} + i\frac{\sigma^{\mu\nu}(q_\nu - p_\nu)}{2m}\right]u(q)\,.$$

   onde $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Esta identidade é conhecida como identidade de Gordon. Ela é utilizada para calcular a correção em 1-loop do momento de dipolo magnético do elétron.

4. **Teoria de Yukawa**

A Lagrangiana da teoria de Yukawa é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - g\phi\bar{\psi}\psi\,,$$

a) Escreva todas as regras de Feynman para esta lagrangiana.

b) Desenhe os diagramas de Feynman, em ordem g^2, que contribuem para o espalhamento $\psi\psi \to \psi\psi$, indicando a convenção de momento adotada.

c) Escreva a amplitude de espalhamento $\mathcal{M}_{tot}$ em ordem g^2 correspondente ao processo do item (b).

d) Desenhe os diagramas de Feynman, em ordem g^2, que contribuem para o espalhamento $\psi\bar{\psi} \to \psi\bar{\psi}$, indicando a convenção de momento adotada.

e) Escreva a amplitude de espalhamento $\mathcal{M}_{tot}$ em ordem g^2 correspondente ao processo do item (d).

f) Desenhe os diagramas de Feynman, em ordem dominante, que contribuem para o espalhamento $\phi(k_1)\phi(k_2) \to \phi(p_1)\phi(p_2)$, indicando a convenção de momento adotada.

g) Escreva a amplitude de espalhamento $\mathcal{M}_{tot}$ correspondente a cada diagrama do item (f).

Dicas: 1) Atenção para não esquecer de analisar o sinal relativo entre os diagramas que compõem um determinado processo. 2) Caso $\mathcal{M}_{tot}$ seja expressa em termos de integrais, não é necessário calculá-las explicitamente.

5. **Espalhamento** $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

a) Usando as regras de Feynman, desenhe o diagrama e escreva a amplitude de espalhamento $\mathcal{M}_{tot}$ do processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ em ordem mais baixa (dominante) em e.

b) Escreva $|\mathcal{M}|^2$ em termos dos traços.

c) Considerando que a massa do elétron, m, e a massa do múon, M, são nulas $m = M = 0$ calculando os traços, mostre que: $\sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 4e^4(1 + \cos^2\theta)$, onde θ é o ângulo de espalhamento no referencial de centro de massa.